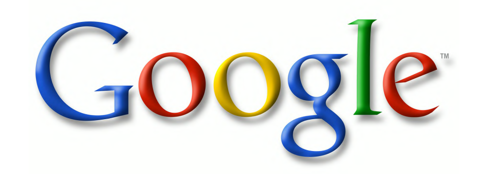
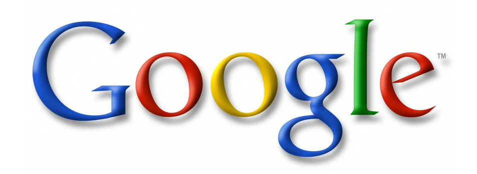
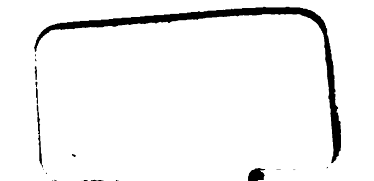



Google



A

HANDBUCH

DER

VERMESSUNGSKUNDE

VON

DR. W. JORDAN

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER

DRITTER BAND

LANDES-VERMESSUNG

UND

GRUNDAUFGABEN DER ERD-MESSUNG

DRITTE VERBESSERTE UND ERWEITERTE AUFLAGE

STUTTGART

VERLAG DER J. B. METZLERSCHEN BUCHHANDLUNG

1890

J. B. Metzler'sche Buchdruckerei in Stuttgart.

VORWORT.

Mit diesem dritten Bande wird die dritte Auflage des „Handbuchs der Vermessungskunde“ zum Abschluss gebracht.

Dieser Band enthält die Technik und die mathematischen Theorien der Triangulierungen erster Ordnung, mit den Coordinaten-Systemen für Landesvermessungen, und die damit eng verknüpften geodätischen Grundaufgaben der heutigen „internationalen Erdmessung“.

Die mathematischen Entwicklungen sind zunächst in möglichst elementarer Weise soweit geführt, als für den Feld- und Landmesser zum ersten Verständnis unserer Deutschen Landesvermessungen erforderlich ist (vgl. die Anmerkung auf S. 347), worauf zu Entwicklungen mit erweiterten mathematischen Begriffen und höheren Zielen übergegangen wird.

Dabei haben wir die Theorie der geodätischen Linie auf geometrischem Wege erheblich vereinfacht (§ 73.—75., § 93.—95.), wodurch, wie wir hoffen, erstens ein Beitrag zur Theorie dieser interessanten Linie überhaupt gegeben, namentlich aber, bei Wahrung der nötigen wissenschaftlichen Schärfe, für den Praktiker beim Aufsteigen von den unteren Gebieten des Feld- und Landmessens zu den höheren Gebieten der Landesvermessung und Erdmessung, das in den bisherigen analytischen Theorien der geodätischen Linie liegende Hindernis beseitigt sein wird.

Im Vergleich mit der vorhergehenden Auflage von Karlsruhe 1877 bis 1878, ist die hiemit vollendete neue, Hannoversche, Auflage wesentlich verbessert, umgearbeitet und erweitert, und in vielen Teilen als ein neues Buch zu betrachten, welches die Zusammenfassung, Befestigung und Abrundung der Feld-, Land- und Erdmessungs-Wissenschaft sich zur Aufgabe gestellt hat.

Hannover im Mai 1890.

Jordan.

INHALTS-ÜBERSICHT.

Kapitel XI. Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

Kapitel XII. Lotabweichungen.

Anhang.

Hilfstafeln.

§ 1. Einleitung.

Überblick über die Geschichte der Erdmessung.

Nach der kindlichen Anschauung. welche in *Homers* Gesängen (800—900 v. Chr.) ihren Ausdruck findet, war die Erde eine vom Okeanos umflossene Scheibe; und diese Anschauung hat sich lange erhalten, ohne sich von dem unmittelbaren Anblick, welchen z. B. die Krümmung der Meeresfläche beim Verschwinden eines Schiffes darbietet, stören zu lassen.

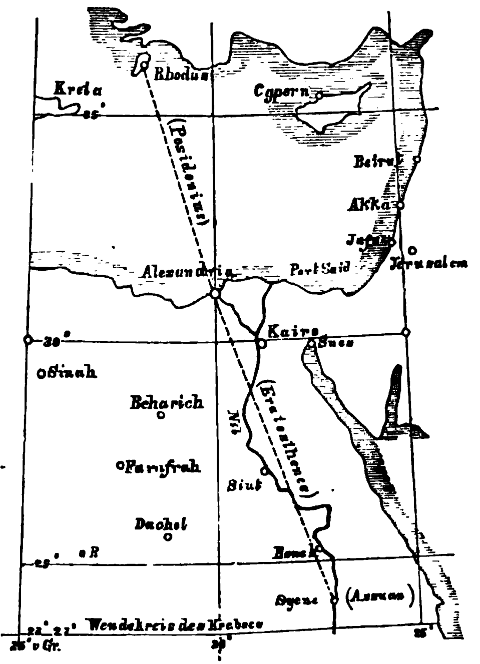
Pythagoras (geb. 582 v. Chr.) erklärte die Erde für eine Kugel.

Aristoteles (384—322 v. Chr.) entwickelt in dem Werke *περὶ ὀυρανοῦ*, B, 13—14, die Gründe für und wider die Kugelform, und kommt zu dem Schluss, dass die Form der Erde notwendig kugelförmig sei (Aristoteles, griechisch und deutsch von *Prantl.* S. 178: „ἀναγκαῖον εἶναι τὸ σχῆμα σφαιροειδές".

Was weiter die Frage nach der *Grösse* der Erde betrifft, d. h., nachdem die Kugelform erkannt war, die Frage nach dem Umfang oder dem Halbmesser der Erdkugel, so ist als einer der ersten, dem wir eine geschichtlich verbürgte Messung bzw. Schätzung verdanken, der alexandrinische Gelehrte *Eratosthenes* (276—195 v. Chr.) zu nennen.

Eratosthenes benützte zur Bestimmung des Erdumfangs den zufälligen günstigen Umstand, dass in Ober-Egypten in Assuan (heutiges Syene, vgl. Fig. 1.) zur Zeit der Sommersonnenwende die Sonnenstrahlen senkrecht in einen Brunnen schienen, während zu gleicher Zeit in Alexandrien die Sonnenstrahlen mit der Lotrichtung einen erheblichen Winkel bildeten, der zu $\frac{1}{50}$ von 360° gemessen wurde. Die Entfernung beider Punkte Alexandrien und Syene wurde aus der Zahl der Tagereisen zu 5000 Stadien geschätzt.

Fig. 1.
Gradmessungen von Eratosthenes und Posidonius.
Massstab = 1 : 1 800 000.

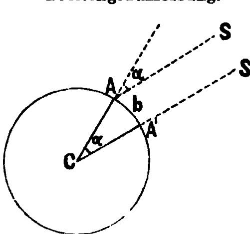


Auf diese Angaben gründete

Eratosthenes eine Bestimmung des Erdumfangs, nach dem Grundsatze der von da an durch Jahrtausende zur Ausführung von *Gradmessungen* gedient hat.

Wir wollen dieses mit Benützung von Fig. 2. ausführlichst darlegen:

Fig. 2.
Breitengradmessung.



Hier bezeichnen A und A' zwei Punkte der kugelförmigen Erdoberfläche (etwa A = Alexandrien, A' = Assuan), welche von den Sonnenstrahlen S und S' getroffen werden. Wegen der weiten Entfernung der Sonne sind die von S und S' aus gezeichneten Sonnenstrahlen als *parallel* zu betrachten.

In A' falle die Sonnenstrahlrichtung zufällig mit der Vertikalen oder der Richtung des Erdhalbmessers $A'C$ zusammen (Brunnen in Assuan) und in A sollen die Sonnenstrahlen mit dem Erdhalbmesser den Winkel α machen, was durch Schattenbeobachtung bestimmt werden kann. Dann ist dieser Winkel α in A auch gleich dem Erdcentriwinkel ACA', und wenn man auf irgend welchem Wege dazu noch den Meridian-Bogen $AA' = b$ bestimmt hat, so lässt sich daraus der Erd-Umfang bestimmen:

$$U = \frac{360°}{\alpha} b$$

In dem Falle der Gradmessung des Eratosthenes war $\alpha = \frac{1}{50} 360°$, und $b = 5000$ Stadien, also der

Erdumfang $= 50 \times 5000 = 250\,000$ Stadien.

Wie aus Fig. 1. zu ersehen ist, liegen Alexandrien und Syene nicht in einem Meridian, auch liegt Syene nicht genau unter dem Wendekreis, wie von Eratosthenes angenommen wurde; indessen kommen diese Nebenumstände bei einer *ersten* genäherten Beantwortung der Frage nach dem Erdumfang nicht in Betracht.

Nimmt man 1 Stadium rund $= 185^m$ an (vgl. *Karsten*, Allgemeine Encyclopädie der Physik, I. Band Einleitung in die Physik. Leipzig 1869. S. 433, nebst Litteraturangaben S. 441), so erhält man: Erdumfang $= 46\,250\,000^m$ oder:

Erdquadrant, nach Eratosthenes $= 11\,562\,500$ Meter

also, da in Wirklichkeit der Erdquadrant nahezu gleich $10\,000\,000^m$ ist, um 16% zu viel.

In ähnlicher Weise wie Eratosthenes machte Posidonius (von 135—51 v. Chr.) eine Bestimmung des Erdumfangs mittelst des Bogens Alexandrien-Rhodus (vgl. Fig. 1.) in folgender Weise:

Der Stern Canopus konnte in Rhodus gerade noch im Horizonte gesehen werden, während er in Alexandrien sich um $\frac{1}{48}$ des grössten Himmelskreises ($= 7° 30'$) über den Horizont erhob; daraus lässt sich schliessen, dass der Erdumfang das 48fache des Erdmeridianbogens Alexandrien-Rhodus ist, und indem dieser Bogen ebenso gross wie der frühere Alexandrien-Assuan, nämlich $= 5000$ Stadien geschätzt wurde, fand sich der Erdumfang $= 48$ mal 5000 Stadien $= 240\,000$ Stadien, also, das Stadium wieder rund $= 185^m$ gerechnet, der Erdumfang $= 44\,400\,000$ Stadien, oder:

Erdquadrant, nach Posidonius, $= 11\,100\,000$ Meter.

Um einen Überblick über die Genauigkeit dieser alten Messungen, bzw. Schätzungen zu erhalten, stellen wir dieselben mit den jetzt bekannten Zahlen ΔB und b zusammen:

	Breiten B	ΔB	Meridianbogen b	$\Delta B'$	Meridianbogen b'
Rhodus	36° 26′				
		5° 14′	580^{km}	7° 30′	5000 Stad. = 925^{km} (Posidonius)
Alexandrien	31° 12′				
		7′ 7′	789^{km}	7° 12′	5000 Stad. = 925^{km} (Eratosthenes)
Syene	24° 5′				

Die Fehler 925^{km} gegen 580^{km} und 925^{km} gegen 789^{km} sind also ganz erheblich.

In diesem Zusammenhange erwähnen wir auch noch ein Werk über Feld- und Landmessung aus dem Altertum, nämlich *Heron* (etwa 200 v. Chr.) über das Diopter (περὶ διόπτρας) vgl. Zeitschr. f. Verm. 1876 S. 120, 1887 S. 553, S. 674, 1888 S. 282, S. 325, S. 365.

Nach diesem haben wir über eine im Mittelalter ausgeführte Erdmessung zu berichten, welche wir den *Arabern* verdanken. Diese machten etwa um 827 nach Chr. eine Breitengradmessung, über welche der Niederländer *Snellius* in seinem Werke „Eratosthenes Batavus“ S. 107—112 nach Citat eines arabischen Schriftstellers *Abel. fedeas* (1322) etwa folgendes berichtet: Die Messung geschah auf Befehl des Califen *Almanon* in der Ebene *Zinjar* (Sindschar nordwestlich von Bagdad) unter der Breite 36° 20′.

Das Ergebnis war:

$$1 \text{ Meridiangrad} = 56\frac{2}{3} \text{ Meilen} = \frac{170}{3} \text{ Meilen}$$

$$1 \text{ Meile} = 4000 \text{ Ellen,}$$

also der Meridianquadrant der Erde:

$$Q = 90 \text{ Grad} = 90\,\frac{170}{3}\,4000 = 20\,400\,000 \text{ Ellen.}$$

Weiter soll sein 1 Elle = 24 Zoll und 1 Zoll = 6 Gerstenkornbreiten; was ist aber nun 1 Gerstenkornbreite? *Snellius* nahm an: 1 Gerstenkornbreite $= \frac{1}{89}$ rheinländische Fuss, also $= \frac{0{,}313853}{89} = 0{,}00352644$ Meter, und dieses giebt 1 Meridiangrad = 115 103 Meter und:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,359 \text{ Kilometer.}$$

Statt dieser Gerstenkorn-Rechnung haben wir in jüngster Zeit eine Bestimmung der arabischen Elle nach dem Nilmesser von Kairo vorgenommen, wonach in bewunderungswerter Übereinstimmung mit der heutigen Kenntnis der Erdgrösse, der Erdquadrant aus den arabischen Angaben sich sehr nahe = 10 000 Kilometer berechnet. (Weiteres hierüber wird mitgeteilt in der Zeitschr. f. Verm. 1889.)

Seit jener Zeit geschah 700 Jahre lang nichts mehr.

Die erste Erdmessung nach diesem langen Zeitabschnitt verdanken wir dem französischen Arzt *Fernel*, welcher im Jahr 1525 die Breiten von Paris und Amiens mittelst eines Quadranten, und die Entfernung beider Orte mittelst der Umdrehungen seines Wagenrades mass, und damit ein Ergebnis erzielte, welches zufällig nahezu richtig ist, nämlich nach *Lalande*'s Nachrechnung:

$$1 \text{ Meridiangrad} = 57\,070 \text{ Toisen} = 111\,229 \text{ Meter}$$

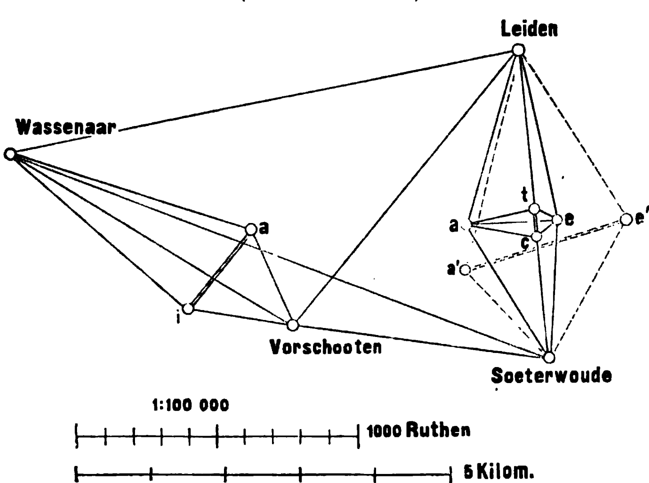
$$\text{Meridian-Quadrant} = 10\,011 \text{ Kilometer,}$$

also der Fehler nur $= +\,0{,}1\%$.

Eine neue Epoche der Erdmessung beginnt mit dem Niederländer *Willebrord Snellius* (1591—1626).

Snellius war, wie aus seinem Werke „Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, a Willebrordo Snellio, Lugduni-Batavorum 1617“ hervorgeht, ein nicht nur mathematisch sehr verständiger, sondern auch allgemein sehr gebildeter und scharfsinniger Mann. Die Erdmessung verdankt ihm wenn nicht die „Erfindung“, doch die erste uns überlieferte, auf etwa 1′ in den Winkeln gemessene und richtig trigonometrisch berechnete *Triangulierung*, deren Basisnetze wir in Fig. 3. darstellen.

Fig. 3.
Basisnetz der Triangulierung von Snellius.
(Massstab 1 : 100 000.)



Die erste Basis von *Snellius* war die kleine Strecke $t\,c$ auf der Geraden Leiden-Soeterwoude, nämlich $t\,c = 87{,}05$ Ruten (= 327,85ᵐ). Daraus wurde durch zwei Dreiecke abgeleitet $a\,e$ = 326,43 Ruten und unmittelbar gemessen 326,90 Ruten: Das trigonometrische Ergebnis $a\,e = 326{,}43$ R. wurde beibehalten, und daraus abermals durch 2 Dreiecke abgeleitet: Leiden-Soeterwoude = 1092,35 Ruten (= 4114,06ᵐ). Damit wurde tranguliert bis Wassenaar und Vorschooten, und zwischen diesen zwei Punkten wieder eine Grundlinie $a\,i$ = 348,1 Ruten gemessen. Der trigonometrische Anschlussfehler wird hier nicht mitgeteilt.

Dagegen hat *Snellins* einen Anschluss an eine *dritte* 166 Ruten lange Grundlinie zwischen Oudewater und Montfort etwa 30ᵏᵐ östlich von der ersten Grundlinie, der trigonometrische Anschluss ist 2923,3 — 2934,6 = — 11,3 Ruten oder 1 : 260, wozu *Snellius* bemerkt (S. 181), dass er solche Genauigkeit kaum zu hoffen gewagt habe.

Unsere Fig. 3. zeigt noch eine vierte, punktierte Grundlinie $a'\,e'$ = 475,00 R. Dieses ist *Snellius' spätere* Messung und *Musschenbroeks* Berechnung, sie giebt Leiden-Soeterwoude = 1097,117 Ruten gegen 1092,35 R. der ersten Bestimmung.

Die ganze Triangulierung von *Snellius* umfasst 33 Dreiecke, welche im wesentlichen in der heute noch üblichen Weise zu einer Breitengradmessung zwischen Alkmaar und Bergen op Zoom benützt wurden, wie folgende Zahlen zeigen:

Punkt	Breiten	Breiten-Unterschied	Meridianbogen (triang.)
Alkmaar	52° 40′ 30″		
		1° 11′ 30″	33 930 Rheinl. Ruten
Bergen op Zoom	51° 29′ 0″		

Hiernach ist 1 Grad $= \frac{60'}{71{,}5'} \cdot 33\,930 = 28\,473$ Ruten.

Nach diesem Ergebnis in Verbindung mit einer zweiten ähnlichen Messung nahm *Snellius* den Meridiangrad = 28 500 Rheinl. Ruten an. Dieses ist = 10 734 Meter, und damit berechnet man auch:

Meridian-Quadrant = 9 660 Kilometer.

Hiernach hat die *Snellius*sche Erdbestimmung einen Fehler von 3,4%. *Snellius* machte selbst Nachmessungen (vgl. *a′ e′* Fig. 3. S. 4), aber erst sein Nachfolger *Musschenbroek* brachte *Snellius*' Werk zum Abschluss; er fand 1719 „secundum mensuram ultimam Snellii et nostram" 1 Meridiangrad = 29 514 Ruten oder:

Meridianquadrant = 10 004 Kilometer.

Inzwischen waren auf *Snellius* zwei durch die Art ihres Verfahrens merkwürdige Gradmessungen gefolgt. Im Jahr 1633 mass *Norwood* den Bogen zwischen London und York unmittelbar mit der Kette.

Grimaldi und *Riccioli* bestimmten 1645 in Italien durch gegenseitige *terrestrische* Zenitdistanzen den Meridiangrad = 62 650 Toisen.

Diese Messung terrestrischer Zenitdistanzen, welche auch *Snellius* schon in seinem Schluss-Kapitel erwähnt, wäre das einfachste und beste Mittel zur Messung der Erde, wenn die Strahlenbrechung nicht bestünde, oder wenigstens der Rechnung besser zugänglich wäre, als es bis jetzt der Fall ist.

Indem wir nun den genauen Erdmessungen näher kommen, haben wir auch kurz zu erwähnen, *welche* Erdfläche bestimmt werden soll: Als Erdoberfläche im Sinne dieser Messungen ist zu betrachten die ruhend gedachte Meeresfläche, nebst ihrer unter den Kontinenten stetig angenommenen Fortsetzung.

Die wichtigsten Erdmessungen des 17. und 18. Jahrhunderts sind die *französischen*. Dieselben wurden von der im Jahre 1666 gegründeten Pariser Akademie veranlasst, und von *Picard* geleitet. Der Zweck dieser Messungen war ein zweifacher, erstens die Herstellung einer guten Karte von Frankreich und zweitens die Bestimmung der Grösse der Erde.

Aus der Fortsetzung der *Picard*schen Messungen, welche von *Lahire* und *Dominique* und *Jaques Cassini* geleitet wurde (1683—1716 südlich bis Collioure, nördlich bis Dünkirchen), schien zu folgen, dass die Erde an den Polen zugespitzt sei, während *Newtons* Theorie und *Richers* Pendelversuche, das Gegenteil behaupteten. Entschieden wurde die Frage durch die von den Franzosen im Jahre 1735 nach Peru und Lappland geschickten Gradmessungs-Expeditionen, durch welche festgestellt wurde, dass am Äquator der Erdmeridian stärker gekrümmt ist als in der Nähe des Pols, was mit der *Newton*schen Theorie stimmt.

Die Gradmessung in Peru, 1735—1741, ist beschrieben in dem Werk „Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hemisphère australe, tirée des observations de Mrs. de l'académie royale des sciences, envoyés par le roi sous léquateur, par M. *de la Condamine*. Paris 1751."

Die Gradmessung in Lappland, ausgeführt 1736—1737, ist beschrieben von *Maupertuis*: „La figure de la terre. Paris 1738."

Es folgte 1740 eine Nachmessung des französischen Meridianbogens durch *Cassini de Thury* (III) und *Lacaille.*

Folgendes sind die wichtigsten hierauf bezüglichen Zahlenwerte:

Picards Messung des Bogens zwischen Paris und Amiens, welche 1669 begann, gab einen Breitengrad = 57 060 Toisen und damit:

Meridianquadrant = 10 009 081 Meter.

Die nördliche und südliche Fortsetzung gab folgendes:

		Mittelbreite	1 Meridiangrad
nördlich	zwischen Paris und Dünkirchen	49° 56′	56 960 Toisen
„	Paris und Amiens	49° 22′	57 060 „
südlich	„ Paris und Bourges	47° 57′	57 098 „

Hieraus schien eine gegen die Pole zugespitzte Erdform zu folgen.

Wir haben versucht, hieraus ein langgestrecktes Ellipsoid zu berechnen, das also eine *negative* Abplattung erhält. Es fand sich:

Meridianquadrant = 10 042 650 Meter, Abplattung = 1 : — 66.

Die peruanische und die lappländische Gradmessung (letztere mit der späteren Verbesserung und Erweiterung durch *Svanberg,* 1801—1803) geben folgendes:

	Mittelbreite	1 Meridiangrad
Lappland	+ 66° 20′ 10″	57 196 Toisen
Peru	— 1° 33′ 32″	56 734 „

Hieraus wird berechnet

Meridianquadrant = 10 000 157 Meter, Abplattung = 1 : 310,3.

Von den nun folgenden aussereuropäischen Gradmessungen erwähnen wir hier besonders diejenige von *Mason* und *Dixon* in Nordamerika, 1764—1768.

Dieselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass eine Gerade von 434 011,64 engl. Fuss (= 132 286 Meter) Länge unmittelbar mit Messlatten (also ohne Triangulierung) nahezu in der Meridianrichtung gemessen wurde. Im ganzen wurde der Meridianbogen zwischen den Breiten 39° 56′ 19″ und 38° 27′ 34″ bestimmt.

(Eine neuere Mitteilung hierüber s. Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 33—39.)

In die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts fällt auch die Gradmessung von *La Caille* am Kap der guten Hoffnung, *Beccarias* Messung in Turin, *Liesganigs* Messung in Ungarn, dann die Anfänge der englischen Messungen in England selbst und in Indien.

Die wichtigste Gradmessung vom Schluss des vorigen und Anfang dieses Jahrhunderts ist jedoch wieder eine französische, nämlich die von *Delambre* und *Méchain* 1792—1808 zur definitiven Feststellung des *Meters* ausgeführte. Das hierüber veröffentlichte Werk ist: Base du système métrique décimal, ou mesure du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes, par M. M. *Méchain* et *Delambre,* rédigée par *M. Delambre.* Tome premier Paris janvier 1806, tome second Paris juillet 1807, tome troisième Paris novembre 1810.

Das Meter sollte möglichst genau der zehnmillionste Teil des Erdquadranten sein. Zur möglichst genauen Ermittlung desselben wurde die Gradmessung von *Delambre* und *Méchain* 1792 unternommen.

Dieselbe gab den Bogen zwischen Dünkirchen und Montjouy = 275 792,36 Modules (1 Module = 2 Toisen) und dieser nahezu 10° grosse Bogen zwischen den Breiten 51° 2′ 8,85″ und 41° 21′ 44,96″ wurde als Grundlage für das metrische System genommen. Um die Abplattung zu erhalten, wurde dieser Bogen mit der peruanischen Gradmessung kombiniert, woraus die Abplattung 1 : 334 erhalten wurde.

Nun wurde der Meridianquadrant berechnet = 2 565 370 Modules = 5 130.740 Toisen, und da eine Toise 864 Par. Linien hat, so ist hiernach:

$$1 \text{ Meter} = \frac{5\,130\,740 \times 864}{10\,000\,000} = 443{,}295\,936 \text{ Par. Linien,}$$

was auf 443,296 abgerundet wurde.

Indem man umgekehrt für die *Delambre*sche Messung das Meter = 443,296 Par. Linien als Einheit annimmt, hat man:

Meridianquadrant = 10 000 000 Meter, Abplattung = 1 : 334.

(Vorstehende Zahlenangaben finden sich in dem Werk: Base du système métrique III. Band S. 433, S. 619—622.)

Bestimmung der Meridian-Ellipse.

Nachdem die Abplattung der Erde entschieden war, handelte es sich nicht mehr bloss wie früher um *eine* Unbekannte, nämlich den Halbmesser der Erdkugel, sondern um *zwei* Unbekannnte, etwa die beiden Halbachsen a und b der Meridian-Ellipse (Fig. 4.) oder statt dessen um eine Halbachse a und dazu die Excentricität $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ oder den Meridianquadranten Q und die Abplattung $\alpha = \frac{a - b}{a}$.*)

Fig. 4. Erdmeridian-Ellipse.

Wenn zwei Gradmessungen in dem bisher gültigen Sinne vorliegen, nämlich ein Meridianbogen und die beiden geographischen Breiten der Endpunkte für je eine Gradmessung, so ist es mathematisch betrachtet eine leichte Aufgabe, mit genügender Näherung eine Ellipse zu bestimmen, welche diesen *zwei* Gradmessungen genügt, und wir werden später z. B. die Berechnung der oben angegebenen Gradmessungen von Lappland und Peru in wenigen Gleichungen entwickeln können.

Als man aber im vorigen Jahrhundert anfing, mehr als zwei Gradmessungen zusammen in Rechnung zu nehmen, stiess man auf starke Widersprüche, welche sich aus den unvermeidlichen Messungsfehlern kaum erklären liessen und bald den Gedanken nahe legten, dass die Erde nicht genau ein Umdrehungs-Ellipsoid sei.

Dennoch ist nun ein Zeitraum von wohl 100 Jahren (etwa von 1740—1840) der Aufgabe gewidmet, eine solche *Ausgleichung* der zahlreichen Gradmessungen zu erzielen, dass die übrig bleibenden Widersprüche in den Messungen der geographischen Breiten in ihrer Gesamtheit möglichst klein ausfallen.

Insofern fällt die Geschichte der Gradmessungs-Berechnungen mit der Geschichte

*) Aus der grossen Halbachse a und der Abplattung α berechnet man, wie wir später entwickeln werden, den Meridianquadranten Q nach der Formel:

$$Q = \frac{a\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

der Methode der kleinsten Quadrate zusammen, welche wir in unserem ersten Bande (Einleitung Seite 2) behandelt haben.

Die erste öffentliche Mitteilung über die Methode der kleinsten Quadrate, nämlich *Legendre*'s Abhandlung „sur la méthode des moindres carrés“, welche als Anhang der „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes“ im Jahre 1805 erschien, enthält zugleich auch die erste Ausgleichung von Gradmessungen nach dieser Methode.

Legendre nimmt 5 geographische Breiten zwischen Dünkirchen (51° 2′ 10,50″) und Montjouy (41° 21′ 44,80″) mit den 4 dazwischen liegenden französischen Meridianbögen, und macht damit eine theoretisch ganz richtige Ausgleichung, welche jedoch den viel zu grossen Abplattungswert 1 : 148 und auch einen zu kleinen Meridianquadranten = 9 997 780 Meter gab; doch berührt uns hier weniger das Erdberechnungs-Ergebnis als das theoretisch richtige dabei angewendete Verfahren.

Die nächste Ausgleichung dieser Art machte *Walbeck* im Jahre 1819. Nach den Mitteilungen, welche wir hierüber haben, von *Gauss* in der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona“ S. 72 und S. 82, hat Walbeck hierüber eine kleine Abhandlung geschrieben „De forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcubus meridiani, definiendis“ (Abo, 1819). *Walbeck* hat die peruanische, die beiden ostindischen, die französische, englische und die neuere lappländische Gradmessung der Rechnung unterworfen; indessen hat er bei jeder einzelnen Gradmessung nur den ganzen Bogen, oder die an den *End*punkten beobachteten Polhöhen in Betracht gezogen, ohne die Zwischenpunkte zu berücksichtigen. Das Ergebnis war Abplattung = 1 : 302,76 und mittlerer Meridiangrad = 57 009,746 Toisen, dieses giebt:

Meridianquadrant = 10 000 266 Meter   Abplattung = 1 : 302,76.

Neun Jahre später, 1828, haben wir eine abermals verbesserte und erweiterte Ausgleichung, welche *Schmidt* in Göttingen auf *Gauss*' Veranlassung machte, wie in der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona“ S. 82—84 von *Gauss* mitgeteilt wird. *Schmidt* hat die an den Zwischenpunkten beobachteten Polhöhen mitberücksichtigt, auch die hannoversche Gradmessung zugezogen, so dass er die peruanische, erste und zweite ostindische, französische, englische, hannoversche und schwedische Gradmessung, mit zusammen 25 Polhöhen nach dem Grundsatze ausglich, dass die Quadratsumme der übrigbleibenden Polhöhenfehler ein Minimum wird. Das Ergebnis war: Abplattung 1 : (298,39 ± 12,5) und mittlerer Meridiangrad = 57 010,35 Toisen, oder:

M[illegible]quadrant = 10 000 371 Meter   Abplattung = 1 : 298,39
± 88   ± 12,50

Der mit[illegible]e Polhöhenfehler ist ± 3,18″.

Schmidt hat solche Berechnungen noch weiter fortgesetzt, und hievon Mitteilung gemacht in dem „Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie von Dr. *J. C. Eduard Schmidt*, Privatdozent auf der Universität Göttingen.“ Erster Teil 1829. Vorrede Seite IV—V, und Astr. Nachr. 7. Band (1829) Nr. 161. S. 329—332.

Die letzte Bestimmung *Schmidts* ist vom Jahr 1830, und giebt (nach *Listing* (3)):

Meridianquadrant = 10 000 061 Meter   Abplattung = 1 : 297,648.

Der Engländer *Airy* machte im Jahre 1830 eine Bestimmung aus 14 Breitengradmessungen mit Hinzuziehung einiger gemessener Längengrade. Die Ergebnisse sind nach „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, London 1858, introduction" Seite XVI: $a = 20\,923{,}713$ engl. Fuss und $b = 20\,853{,}810$ engl. Fuss, woraus wir berechnen:

Meridianquadrant = 10 001 012 Meter Abplattung = 1 : 299,325.

Wir kommen nun 1837—1841 an die *Bessel*sche Ausgleichung der Gradmessungen, welche auf einer sehr gründlichen Prüfung und Sichtung des bis dahin angesammelten Gradmessungsstoffes beruht. Bessel benützte die folgenden Messungen:

Gradmessung	Mittelbreite	Amplitude	Zahl der Polhöhen
1. Peruanische	— 1° 31′	3° 7′	2
2. erste Ostindische	12 32	1 35	2
3. zweite Ostindische	16 8	15 58	7
4. Französische	44 51	12 22	7
5. Englische	52 2	2 50	5
6. Hannoversche	52 32	2 1	2
7. Dänische	54 8	1 32	2
8. Preussische	54 58	1 30	3
9. Russische	56 4	8 2	6
10. Schwedische	66 20	1 37	2
	Summen	50° 34′	38

Die Einzelheiten der Messungen und der Ausgleichung (Quadratsumme der 38 Polhöhen-Verbesserungen) sind von *Bessel* mitgeteilt in einer Abhandlung in den astr. Nachr. 14. Band (1837) Nr. 333, S. 333—346. Es wurde jedoch eine Neuberechnung nötig wegen Auffindung eines Fehlers in der französischen Gradmessung, worüber *Bessel* im 19. Bande der astr. Nachr. (1841) Nr. 438, S. 97—116 berichtet. Die *Bessel*schen End-Ergebnisse sind:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,000\,855{,}76 \text{ Meter} \pm 498{,}23 \,, \quad \text{Abplattung} = 1 : 299{,}1528 \pm 4{,}667$$

Diese *Bessel*schen Erddimensionen haben rasch allgemeinste Anerkennung und weiteste Verbreitung gefunden; sie sind namentlich deswegen wichtig, weil Hilfstafeln in grosser Zahl und Ausdehnung für praktische Vermessungen und Berechnungen darauf gegründet sind.

Mit diesen Mitteilungen über *Berechnungen* sind wir der Geschichte der *Messungen* zum teil vorausgeeilt.

Ausser den schon erwähnten französischen Arbeiten haben wir in diesem Jahrhundert folgende Erdmessungen zu erwähnen:

Die *dänische* Gradmessung unter Leitung von *Schumacher* von 1816 an. Zu einem abgeschlossenen Werke gelangte die dänische Gradmessung in jüngster Zeit unter Leitung von *Andrä* durch das Werk: Den Danske Gradmaaling, 1. Band, Kopenhagen 1867, 2. Band 1872, 3. Band 1878, 4. Band 1884. Einen Bericht hierüber gab Helmert in der Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft 1877, S. 184—239 und 1878, S. 57—80.

Hieran schloss sich die *hannoversche* Gradmessung von *Gauss* 1821—1823, und

bald folgte die Gradmessung in *Ostpreussen* von *Bessel*. Über diese zwei klassischen Werke werden wir im Zusammenhang mit den übrigen deutschen Vermessungen nachher weiteres berichten (S. 13—14).

Die grösste Ausdehnung in Europa hat die *russische* Gradmessung von *Struve* und *Tenner*. Der erste Teil hievon ist behandelt in dem Werk: „Beschreibung der von der Universität Dorpat veranstalteten Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet in den Jahren 1821—1831 mit Beihilfe des Kapitän-Lieutenants *B. W. v. Wrangel* und Anderer, von *F. G. W. Struve*, Direktor der Dorpater Sternwarte. Dorpat 1831". (Weiteres nebst Litteraturangaben findet man in *Petermanns* geogr. Mitteilungen 1857 S. 315—321.)

Von russischer Seite sind hier auch die Arbeiten des Generals *v. Schubert* zu erwähnen, welcher zuerst den Versuch machte, die Erde durch ein *drei*axsiges Ellipsoid darzustellen, und auch andere Erdberechnungen ausführte. Weiteres hierüber giebt *Listing* (11), vgl. das Litteratur-Verzeichnis am Schlusse dieses Abschnitts S. 16).

Die *englischen* Messungen begannen im Jahre 1783 unter General *Roy*. Wir haben hierüber das grosse Werk: „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland. Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived from, etc., by Captain Alexander Ross *Clarke* under the direction of Colonel *H. James*, Superintendent of the Ordnance survey. London 1858."

Auf Seite 771 dieses Werkes wird als Ergebnis einer Ausgleichung von 8 Gradmessungen mit 66 Breiten mitgeteilt:

$$a = 20\,926\,348 \qquad b = 20\,855\,233 \text{ engl. Fuss,}$$

woraus wir berechnen:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,001\,983 \text{ Meter,} \qquad \text{Abplattung} = 1:294{,}261.$$

Hier sind auch die britisch-ostindischen Arbeiten zu erwähnen, 1790 begonnen von *Reuben Burrow*, fortgesetzt von *Dalby*, *Lambton Everest* bis 1847, sowie die zweite Gradmessung am Kap der guten Hoffnung von *Maclear* 1836—1848.

Unter den englischen Erdmessungsarbeiten sind namentlich auch die zahlreichen Erd-Ellipsoid-*Berechnungen* anzuführen, welche *Clarke* seit 1856 bis in die neueste Zeit ausgeführt hat. (*Listing* (7)—(10).) Wir wollen hievon diejenigen beiden Bestimmungen hierhersetzen, welche in den Verhandlungen der permanenten Konferenz der internationalen Erdmessung von 1887, angegeben sind in Beilage I, Lotabweichungen, von *Helmert*, S. 5—6, nämlich mit Zufügung des Meridianquadranten:

$$\textit{Clarke } 1866 \quad a = 20\,926\,062 \qquad b = 20\,855\,121 \text{ engl. Fuss}$$
$$\text{Meridianquadrant} = 10\,001\,888 \text{ Meter,} \qquad \text{Abplattung} = 1:294{,}978$$
$$\textit{Clarke } 1880 \quad a = 20\,926\,202 \qquad b = 20\,854\,895 \text{ engl. Fuss}$$
$$\text{Meridianquadrant} = 10\,001\,871 \text{ Meter,} \qquad \text{Abplattung} = 1:293{,}466.$$

In diesem Zusammenhange haben wir auch die *nordamerikanischen* Messungen einzureihen, deren erste Anfänge, die *Mason-Dixon*sche Gradmessung von 1764, wir schon oben erwähnt haben. Die Fortsetzung der nordamerikanischen Messungen in

der Neuzeit sind wissenschaftlich und praktisch wichtig und interessant. Das Hauptwerk hierüber ist:

„Professional papers of the corps of engineers, U. S. Army, Nr. 24. Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Lieut. Col· *C. B. Comstock*, Corps of Engineers, Brevet Brigadier-General, U. S. A., aidet by the Assistents on the survey. Washington: Governement printing office. 1882.

Vgl. „Zeitschr. f. Verm.“ 1888, S. 203—207 und S. 385—395.

Lotabweichungen, Geoid.

Schon die ersten Berechner des Erdellipsoids hatten erkannt, dass die Widersprüche bei solchen Berechnungen und Ausgleichungen nicht durch Messungsfehler allein erklärt werden können, dass vielmehr die ideale Erdfläche überhaupt nicht genau die Form eines Umdrehungs-Ellipsoides hat. Trotzdem wurden die Berechnungen lange in der Form fortgeführt, als ob es sich nur um unregelmässige Messungsfehler handelte. Insofern jedoch die Widersprüche der Berechnungen nicht den Messungen, sondern den Abweichungen der Erdform von dem Ellipsoid zuzuschreiben sind, nannte man diese Widersprüche „*Lotabweichungen*“.

Einen wertvollen Beitrag zur Klarlegung der hiebei vorkommenden Begriffe, sowie zur Geschichte der Erdmessungen überhaupt hat *Listing* gegeben in der kleinen Abhandlung: „Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde“ in den Nachrichten von der K. Ges. d. Wiss. und der G. A. Universität zu Göttingen, 5. Febr. 1873. Nr. 3. S. 33—98.

Man hat hiernach *drei* verschiedene Flächen zu unterscheiden:

1) Die Begrenzungsfläche zwischen den starren und tropfbarflüssigen Teilen der Erde einerseits und der Atmosphäre andererseits, d. h. die *physische Erdoberfläche.*

2) Die Oberfläche des gesamten Meeres in seinem Gleichgewichtszustande, also abgesehen von Flut und Ebbe und Wellenschlag; unter den Kontinenten denkt man sich diese Fläche erweitert durch ein Netz von Kanälen, welche unter sich und mit dem freien Meer in Verbindung stehen. Diese Fläche, welche, dem hydrostatischen Gesetz der ruhenden Flüssigkeit entsprechend, alle Lotlinien (Richtung der Schwerkraft) rechtwinklig durchschneidet, heisst nach *Listing* das *Geoid.*

3) Da die Abweichungen des Geoids von einem Umdrehungsellipsoid im Vergleich mit den Erddimensionen selbst klein sind, z. B. in Deutschland nach den neuesten Bestimmungen von *Helmert* (1888) nur etwa 5—10 Meter, kann man auf die Bestimmung eines idealen *Erdellipsoids* ausgehen, dessen Umdrehungsaxse mit der wirklichen Erdaxse zusammenfällt, dessen Lage im übrigen jedoch verschieden definiert werden kann. *Listing* setzt hiefür fest:

erstens, es soll das Ellipsoid mit dem Geoid gleiches Volumen haben,
zweitens, es soll die Summe der Beträge von Erhöhungen und Vertiefungen zwischen dem Geoid und dem Ellipsoid ein Minimum sein.

Hiernach berechnet *Listing* ein „typisches Ellipsoid“ mit folgenden Dimensionen (*Listing* (20)):

$$a = 6\,377\,365^m \qquad b = 6\,355\,298^m$$

$$\text{Meridianquadrant } Q = 10\,000\,218^m \qquad \text{Abplattung } = 1:289{,}00$$

$$\text{Mittlerer Halbmesser } R = \sqrt[3]{a\,a\,b} = 6\,370\,000^m.$$

Pendelbeobachtungen.

Wie schon im vorigen Jahrhundert das Pendel *Richers* zur Aufklärung über die Abplattung beigetragen hatte, so sind heute noch die Pendelbeobachtungen ein wichtiges Hilfsmittel der Erdmessung.

Die neueste und gründlichste Bestimmung der Abplattung der Erde aus Pendelbeobachtungen hat *Helmert* ausgeführt in dem Werke: „Die mathem. und phys. Theorien der höheren Geodäsie, II. Band, Leipzig 1884". Auf S. 215—241 dieses Werkes wird aus einer Reduktion und Ausgleichung von 122 Pendellängen die Abplattung der Erde abgeleitet:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299,26 \pm 1,26} \quad (\textit{Helmert}, \text{Pendel}).$$

Auch ist hier zu erwähnen die Bestimmung der Abplattung aus der Mond-Theorie, welche nach *Helmerts* Interpretation ergiebt:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{297,8 \pm 2,2}$$

Im Anschluss hieran möge auch die neueste Annahme von *Helmert* für ein Referenz-Ellipsoid zu Lotabweichungs-Berechnungen hier hergesetzt werden, nämlich nach den „Verhandlungen der Konferenz der perm. Kommiss. d. internat. Erdm. von 1887, Berlin 1888, Beilage I Lotabweichungen" S. 7, ein Ellipsoid, dessen lineare Dimensionen (nach verschiedenen Erwägungen) unter Festhaltung des *Bessel*schen (genäherten) Abplattungswertes aus der französisch-englisch-russischen Breitengradmessung hervorgehen:

$$a = 6\,378\,153^{m} \qquad b = 6\,356\,832^{m}$$

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,002\,041 \qquad \text{Abplattung} = 1:299,149.$$

Die deutschen Vermessungen.

Nachdem in der Gesamtdarstellung der Geschichte der Erdmessungen überhaupt nur die beiden klassischen Gradmessungen von *Gauss* und von *Bessel* kurz erwähnt wurden, wollen wir unsere vaterländischen Messungen im Zusammenhang noch etwas näher betrachten.

(Vgl. *Jordan-Steppes*, das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882, und „die deutschen Landesvermessungen", Vortrag auf dem VII. Geographentag, zu Karlsruhe, Verhandlungen des VII. deutschen Geographentages zu Karlsruhe 14—16. April 1887, Berlin 1887, S. 18—32, und Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 310—325.)

Das erste ist die *bayerische* Landesvermessung, welche am Anfang dieses Jahrhunderts ursprünglich nach französischen Mustern unternommen, bald eine völlig selbstständige Entwicklung nahm, dieses ist namentlich dem Leiter derselben *Soldner* (1776 —1833) zu verdanken, dessen Name heute noch mit dem von ihm zuerst eingeführten rechtwinkligen sphärischen Coordinaten-System rühmlich genannt wird.

(Vgl. das amtliche Werk: „Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, herausgegeben mit höchster Genehmigung von der k. Steuerkataster-Kommission in Gemeinschaft mit dem topographischen Bureau des Generalstabs. München 1873", *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen, 1882, I, S. 195 u. ff. Ferner: „*Johann Georg Soldner* und sein System der bayerischen Landesvermessung,

Vortrag am 27. Juli 1885 von *Carl Max v. Bauernfeind*, München 1885" (Zeitschr. f. Verm. 1886, S. 45).

Nächst *Soldner* und der bayerischen Landesvermessung ist *Bohnenberger* (1765—1831) mit seiner *württembergischen* Triangulierung hier anzuführen; diese begann 1818. (Vgl. das amtliche Werk: „Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg u. s. w. von *Konrad Kohler*, Stuttgart 1858". *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen I, S. 244 u. ff., ferner die Biographie: *Johann Gottlieb Friedrich Bohnenberger*, von Dr. *L. F. Ofterdinger* in Ulm, Tübingen, Fues, 1885, (Zeitschr. f. Verm. 1886, S. 44).

Des geographischen Zusammenhangs wegen erwähnen wir hier auch kurz die *badische* Triangulierung unter *Klose*. Dieselbe hat jedoch eine andere Entwicklung genommen, als die beiden vorher genannten, sie ist in ihrer jetzigen Gestalt das Werk von Obergeometer *Rheiner*, unbedingt die genaueste der drei süddeutschen Triangulierungen, aber nicht amtlich veröffentlicht (vgl. *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen 1882, I. S. 270—285).

In dieser Reihe folgt die *hessische* Triangulierung von *Eckhardt* und *Schleiermacher* von 1808 an. (*Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen 1882, I. S. 285 bis 288), und als letzter Zweig des süddeutschen geodätischen Stammes die *nassauische* Triangulierung (Zeitschr. f. Verm. 1882, S. 313—322).

Im Zusammenhang mit den süddeutschen Triangulierungen sind wohl auch die *österreichischen* Vermessungen zu erwähnen, über welche in neuester Zeit Auskunft gegeben wurde von Major *Hartl* in drei Abhandlungen: „Materialien zur Geschichte der astronomisch-trigonometrischen Vermessung der österreichisch-ungarischen Monarchie, gesammelt und bearbeitet von *Heinrich Hartl*, k. k. Major im militär-geogr. Institute, veröffentlicht in den Mitteilungen des k. k. militär.-geograph. Instituts, 1887, S. 1—112, 1888, S. 113—280."

Auch die Vermessung der *Schweiz* ist hier kurz namhaft zu machen. Vgl. Geschichte der Vermessungen in der Schweiz von *R. Wolf*, Zürich 1879. Zeitschr. f. Verm. 1880, S. 367, 1882, S. 456.

Nach Zeit und Ort unabhängig von den bisher besprochenen Messungen steht in der Mitte von Deutschland die klassische Gradmessung von *Gauss* in Hannover 1821—1823, mit anschliessender Landesvermessung 1824—1844. Die wichtigsten Theorien der heutigen Erdmesskunde sind aus Veranlassung dieser Gradmessung von *Gauss* geschaffen worden: die Ausgleichung der Dreiecksnetze nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Theorie der konformen Coordinaten, die allgemeine Theorie der geodätischen Linie auf krummen Flächen u. s. w. Auch in den Messungen war die Gradmessung von 1821—1823 ein Meisterwerk ihrer Zeit; hier wurde das Heliotrop erfunden. Dagegen ist die hannoversche Landesvermessung von 1824—1844 in praktischer Beziehung den gleichzeitigen süddeutschen Messungen nicht gleichwertig (vgl. z. B. die pothenotische Ausgleichung in unserem I. Bande, M. d. kl. Q. S. 147).

Über die Geschichte der *Gauss*schen Vermessungen in Hannover ist erst in neuester Zeit völlige Aufklärung gegeben worden durch eine Arbeit: „Beiträge zur Kenntnis von *Gauss*' praktisch geodätischen Arbeiten, nach Original-Materialien bearbeitet von *Gaede*, Hauptmann, bei der trig. Abteilung der Landesaufnahme." (Zeitschr.

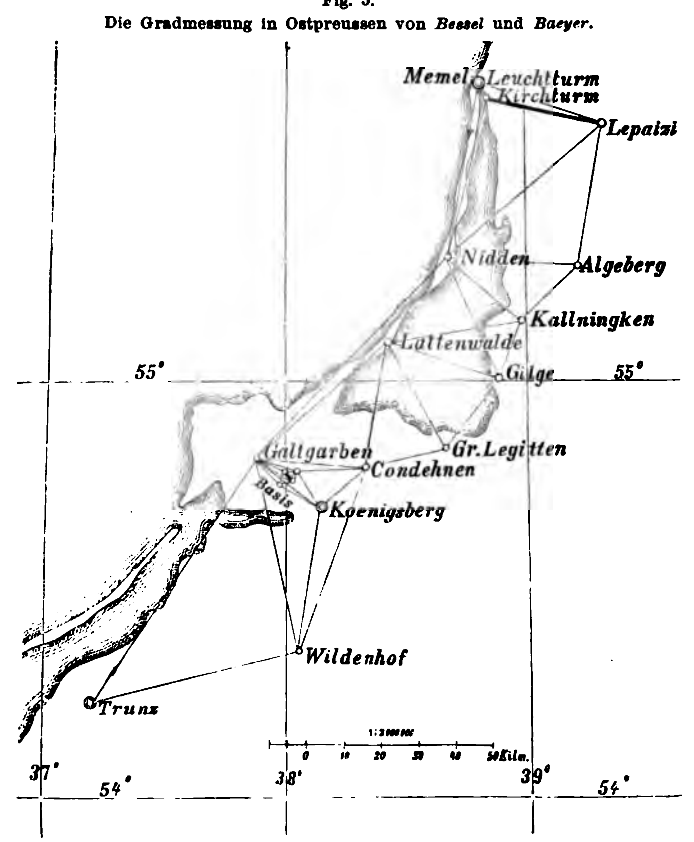
f. Verm. 1885, S. 113, 145, 161-, 177, 193, 225.) Ferner ist hier zu erwähnen: Gedächtnisrede zur Feier des 30. April 1877, von *Theodor Wittstein* in Hannover 1877.

Als Abzweigung der *Gauss*schen Gradmessung ist hier auch die *kurhessische* Vermessung von *Gerling*, einem Schüler von *Gauss*, zu erwähnen (vgl. *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen, I. S. 10 u. 14).

Das zweite klassische Erdmessungswerk in Deutschland ist die berühmte *Gradmessung in Ostpreussen von Bessel*, dargestellt in dem Werke: „Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten, ausgeführt von *F. W. Bessel*, Direktor der Königsberger Sternwarte, *Baeyer*, Major im Generalstabe, Berlin 1838."

Die Gradmessung in Ostpreussen, deren Netz in Fig. 5. dargestellt wird, ist ebenso wie die hannoversche Gradmessung ein in der Geschichte unserer Wissenschaft

Fig. 5.
Die Gradmessung in Ostpreussen von *Bessel* und *Baeyer*.



hochwichtiges Werk, in welchem die Triangulierungs-Ausgleichung (Richtungsmessungen) und die Erdbestimmung (Azimutübertragung) in ihrer theoretischen Entwicklung wesentlich gefördert worden sind (vgl. *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen I, S. 18—37).

Internationale Erdmessung.

Der Mitarbeiter *Bessels* an der Gradmessung in Ostpreussen, dessen Namen *Baeyer* *) wir soeben zitiert haben, hat das grosse Verdienst der Begründung der internationalen Erdmessung.

Im Jahre 1862 veröffentlichte General *Baeyer* den ersten „General-Bericht über den Stand der mitteleuropäischen Gradmessung" mit Teilnahme von 15 Staaten.

Im Herbst 1864 fand die „erste allgemeine Konferenz der Bevollmächtigten zur mitteleuropäischen Gradmessung" in Berlin statt, dabei wurde als erstes Organ der Vereinigung eine „*permanente Kommission*" bestellt, welche von da an jährlich einmal tagte, während die allgemeine Konferenz nur von 3 zu 3 Jahren zusammentritt.

In demselben Jahre 1864 erfolgte auch die Schaffung des Centralbureaus der mitteleuropäischen Gradmessung.

Auf der allgemeinen Konferenz von 1867 wurde die „mitteleuropäische Gradmessung" zur „europäischen Gradmessung" erweitert.

Am 10. September 1885 starb General *Baeyer*; sein Nachfolger wurde Professor *Helmert*.

Im folgenden Jahre 1886 fand die VIII. allgemeine Konferenz in Berlin statt, wobei die „europäische Gradmessung" zur „internationalen Erdmessung" erweitert, und die Vereinigung im ganzen reorganisiert wurde.

Die Geschichte der internationalen Erdmessung ist im wesentlichen enthalten in den seit 1863 nahezu jährlich erschienenen „Generalberichten" und „Verhandlungen der allgemeinen Konferenzen" u. s. w. der Gradmessung bzw. Erdmessung.

Verschiedene Ergebnisse der Erdmessung und Erdberechnung.

Jahr	Bezeichnung	Meridian-Quadrant Meter	Abplattung
1617	*Snellius*	9 660 000	1 : ∞
1719	*Musschenbroek*	10 004 000	1 : ∞
1720	*Cassini*	10 044 000	1 : (— 66)
1740—1803	Peruanische und verbesserte Lappländische Gradmessung	10 000 157	1 : 310
1792—1806	*Delambre*, Annahme für das Metermass	10 000 000	1 : 334
1819	*Walbeck*	10 000 266	1 : 302,76
1830	*Schmidt*	10 000 061	1 : 297,648
1830	*Airy*	10 001 012	1 : 299,325
1841	*Bessel*	10 000 856	1 : 299,153
1866	*Clarke*	10 001 888	1 : 294,978
1872	*Listing* (typisches Ellipsoid)	10 000 218	1 : 289,000
1880	*Clarke*	10 001 871	1 : 293,466
1884	*Helmert* (Pendel-Beobachtungen) . .	. .	1 : 299,26
1887	*Helmert* (Referenz-Ellipsoid)	10 002 041	1 : 299,15

*) *J. J. Baeyer*, geb. 1794, gest. 1885, vgl. Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 369 bis 372, und Vierteljahrsschr. d. astr. Ges. 1886, S. 2—13.

Litteratur zur Geschichte der Erdmessungen.

1617. *Snellius.* Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, u. s. w. Lugduni Batavorum, 1617 (I. Teil Altertum, Eratosthenes, Posidonius u. s. w., II. Teil niederländische Triangulierung).

1729. *Musschenbroek.* Dissertatio de magnitudine terrae, als Teil (S. 357—420) des allgemeinen Werkes: Petri van Musschenbroek physicae experimentales et geometricae u. s. w. Lugduni Batavorum 1729.

1806. *Delambre.* Base du système métrique I. Discours préliminaire.

1827. *Gehlers* physikalisches Wörterbuch, dritter Band, *Erde,* S. 825—940.

1829. *Schmidt.* Lehrbuch der math. und physischen Geographie. Göttingen 1829. I. S. 162—241.

1849. *Encke.* Über die Dimensionen des Erdkörpers. Berl. Astr. Jahrb. für 1852, S. 318 u. ff.

1860. *Posch.* Geschichte und System der Breitengradmessungen. Freysing 1860.

1861. *Baeyer.* Über die Grösse und Figur der Erde. Eine Denkschrift zur Begründung einer mitteleuropäischen Gradmessung. Berlin 1861.

1868. *Fischer.* Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868.

1869. *Wolf.* Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Zürich 1869. 2. Band S. 125—146. (Litteraturangaben.)

1873. *Mädler.* Geschichte der Himmelskunde. Braunschweig 1872, I. Band, S. 89, S. 412 und ff. (Litteraturangaben.)

1873. *Listing.* Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahr 1873, Göttingen 1873, S. 33—98.

1878. *Listing.* Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers. Aus den Nachrichten der K. Ges. der Wiss. Göttingen 1878.

1880. *Clarke.* Geodesy by Colonel A. R. Clarke, C. B. royal engineers; F. R. S.; u. s. w. Oxford at the Clarendon press. 1880.

1880—1884. *Helmert.* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil, die mathematischen Theorien. Leipzig 1880. II. Teil, die physikalischen Theorien. Leipzig 1884.

1885—1888. *Westphal.* Basisapparate und Basismessungen (mit Angaben über die älteren Gradmessungen). Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1885 und 1888.

Kapitel I.

Triangulierung erster Ordnung.

§ 2. Aufsuchung und Auswahl der Dreieckspunkte.

In dem zu vermessenden Gebiete werden solche hervorragende Punkte aufgesucht, zwischen welchen zusammengesehen werden kann, auf welchen feste Beobachtungsplätze eingerichtet werden können, und welche günstige Dreiecksverbindungen geben. Die Entfernungen solcher Punkte nimmt man etwa 20^{km} bis 50^{km}, nötigenfalls auch noch erheblich grösser.

Zur Aufsuchung von Triangulierungs-Punkten muss man das Land bereisen, namentlich alle *hoch* gelegenen Punkte, hohe Berge, Kirchtürme u. s. w. besteigen, und jedenfalls alles was man sieht, durch flüchtige Winkelmessung, oder auch nur durch Kompasspeilung, vorläufig bestimmen.

In früheren Zeiten mass man wohl auch sofort endgültige Winkel; so berichtete z. B. *Bohnenberger* über seine erste Triangulierung von Württemberg, von 1797: „Eine vorläufige Bereisung des Landes wurde nicht vorgenommen, um die schicklichsten Punkte zu den Hauptdreiecken aufzusuchen, daher wurden an jedem Standpunkte alle Winkel zwischen Punkten genommen, von denen man eine zur Fortsetzung der Arbeit günstige Lage erwarten konnte. Erst am Ende der Reise war ich im stande, die Hauptdreiecke heraus zu suchen, deren Winkel nachher bei der Kleinaufnahme nachgemessen und durch Vervielfältigung genauer bestimmt wurden.“

Dieses Verfahren ist heute nicht mehr am Platz aus zahlreichen Gründen: Zunächst ist im allgemeinen zu bemerken, dass Württemberg ein *Hügel*land ist, in welchem das Aufsuchen der Punkte am leichtesten ist, dann sind aber seit 1797 die Ansprüche an die Genauigkeit und an die günstige Form der Dreiecke so sehr gestiegen, dass das, was damals *Bohnenberger* als endgültige Triangulierung lieferte, heute kaum als erschöpfende Rekognoszierung gelten würde (ohne dass damit *Bohnenbergers* Arbeit von 1797 in ihrer damaligen Bedeutung beeinträchtigt würde).

Was *günstige Dreiecksverbindungen* sind, die man aufsuchen soll, das lässt sich allgemein schwer sagen, zumal die Anschauungen hierüber verschieden sind; jedenfalls ist ein Netz von nahezu *gleichseitigen* Dreiecken gut.

Indem weitere Betrachtungen hierüber auf später verschoben werden, bringen wir hier einen Auszug einer sehr wertvollen Abhandlung, welche auf unseren Wunsch

für die Zeitschrift für Vermessungswesen von einem sehr erfahrenen Beamten der Landesaufnahme geschrieben wurde, und deren Abdruck vom Verfasser der Abhandlung uns besonders gestattet wurde.*)

I. Die Rekognoszierung im allgemeinen.

Schon *vor* der Bereisung des Gebietes, auf welchem eine Triangulierung vorbereitet werden soll, sind gewisse Vorarbeiten zu machen, welche gewöhnlich in dem der Feld-Rekognoszierung vorhergehenden Winter ausgeführt werden. Diese *Vorarbeiten* sind im wesentlichen folgende:

1) *Kartenstudien.*

Hier kommt hauptsächlich die topographische Spezialkarte von Mittel-Europa im Massstabe 1 : 200 000 (früher *Reymann*sche Karte genannt) in Betracht. In diese werden alle Punkte und Seiten der bereits fertigen Triangulierung, an welche angeschlossen werden muss, eingetragen. Nur für die Rekognoszierung von Grundlinien und Basisvergrösserungsnetzen können Karten in grösserem Massstabe nötig werden. Sehr wichtig sind *Höhen*zahlen der Karte, sind solche nicht genügend vorhanden, so wird es sich empfehlen, nach weiteren Hilfsmitteln, nach Spezialkarten, geographischen Handbüchern und ähnlichen Publikationen die Höhenangaben der Karte möglichst zu vervollständigen.

2) *Studium der Vorgänge.*

Fast immer handelt es sich um Gebiete, welche in früherer Zeit schon mehrfach als Operationsfeld für grössere Triangulationen gedient haben. Die Landesaufnahme ist in der bevorzugten Lage, von diesen Vermessungen zum grössten Teil noch die Originalakten, Protokolle, Tagebücher, Rechnungen und eine grosse Zahl von Skizzen und Übersichtsblättern der verschiedensten Dreiecks-Konfigurationen zu besitzen. Dieses ganze ältere Material wird, so weit es für das Arbeitsgebiet in Betracht kommt, gründlich durchforscht, alles, was wertvoll oder von Interesse erscheint, herausgezogen und einem besonderen Tagebuche einverleibt.

Auf Grund dieser Studien und mit ihnen fortschreitend, werden sich ganz von selbst Projekte über vorhandene und wünschenswerte Dreiecks-Konfigurationen bilden, welche in vorläufigen Übersichtsdarstellungen zum Ausdruck gebracht, und deren Punkte, soweit sie älteren Triangulationen angehören, durch vorläufige rohe Rechnungen bestimmt werden. Dies geschieht in dem bei der trigonometrischen Abteilung eingeführten ebenen rechtwinkligen Coordinatensystem, und — da es hierbei auf einige Meter nicht ankommt — mit 4- oder 5stelligen Logarithmen.

Die Abscissenaxe dieses Systems ist der 31. Längengrad, und die Coordinaten werden in diesem System *einheitlich* in ganz Preussen gezählt.

Alle Rechnungsergebnisse werden in übersichtlicher Form, nötigenfalls durch Handrisse erläutert, in das Tagebuch eingetragen. Dieses Buch nimmt ferner Notizen auf über Kommunikationen, Quartier-Verhältnisse, Beschaffung von Fuhrwerk, Bauholz u. s. w.

---

*) Technischer Betrieb der Feldarbeiten der Triangulation erster Ordnung bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme, von Vermessungsdirigent *Erfurth*. „Zeitschrift für Vermessungswesen" 1887, S. 377—383 und S. 421—437. Da wir hier nur einen *Auszug* geben können, empfehlen wir besonders noch das Nachlesen des Originals, welches inzwischen auch in die holländische Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, 1887, S. 162—186 in Übersetzung aufgenommen wurde.

3) *Ausrüstung zu den Feldarbeiten.*

Jedes Mitglied der trigonometrischen Abteilung, welches während des Sommers mit Feldarbeiten betraut wird, erhält die nötige Zahl von „Offenen Ordres". Es sind dies Kollektiv-Erlasse der beteiligten Ministerien an die Landesbehörden, ausgestellt für den Chef der trigonometrischen Abteilung bzw. die diesem unterstellten Offiziere und Beamten, wodurch dieselben legitimiert werden und ihnen vorkommenden Falles die Unterstützung der Behörden gesichert wird.

Zur weiteren Ausrüstung des Dirigenten gehören:

ein kleines Universal-Instrument von $1{,}5^{kg}$ Gewicht,*)
ein Rekognoszierungstisch mit Stativ und Dosenlibelle,
ein grosses Handfernrohr,
ein Aneroidbarometer,
Massstäbe, Bandmass, ein Lot, Transporteur; —
ferner das gesammelte Material an Karten, Büchern und Manuskripten, Schreibmaterial, Formulare und Vorschriften.

Die zur Sektion gehörigen Trigonometer sind im wesentlichen ebenso ausgerüstet, führen aber ein erheblich grösseres Winkelmess-Instrument mit sich.

Ausserdem treten noch hinzu:

ein bis zwei kleinere Fernrohre,
einige Heliotrope,
ein Stativ zur Aufstellung des Universal-Instruments,
ferner Werkzeuge und Gerätschaften, welche für den Signalbau erforderlich sind, dazu gehören Werkzeuge des Zimmermanns und des Tischlers, Seil- und Tauwerk, Flaschenzüge u. s. w.

Näheres darüber wird sich beim Signalbau (§ 3.) ergeben.

II. Die Arbeiten im Felde behufs Auswahl der Punkte, oder die eigentliche Rekognoszierung.

Der Zweck der Rekognoszierung besteht darin, die Konfiguration einer neuen Dreieckskette oder eines neuen Dreiecksnetzes festzustellen und anzugeben, welche baulichen Einrichtungen auf jedem Punkte getroffen werden müssen, um die Konfiguration zu ermöglichen. So einfach diese Aufgabe klingt, so schwierig ist sie. Sie verlangt besondere körperliche und geistige Eigenschaften des Rekognoszierenden, und bürdet ihm zugleich eine erhebliche persönliche Verantwortlichkeit auf, da sich Vorschriften, wie die Arbeit auszuführen ist, allgemein gar nicht geben lassen. Es ist zunächst alles seiner Initiative und seinem Ermessen anheimgegeben.

Als Grundsatz ist festzuhalten, dass die Rekognoszierung eine in sich selbständige Arbeit ist, welche die Grundlage für die ganze spätere Triangulation bildet, dass Fehler und Unterlassungssünden, welche etwa hierbei vorkommen, später gar nicht mehr gut zu machen sind.

---

*) Nach unserer Ansicht könnten noch mit Vorteil gebraucht werden: Ein Kompass zum Aufsetzen auf das kleine Universal-Instrument, jedenfalls ein Taschen-Kompass; ferner ein *Spiegel-Sextant* oder kleiner Reflexionskreis zum Winkelmessen auf hohen Türmen, auf Umschaugerüsten, selbst auf Bäumen, kurz überall, wo kein fester Instrumentenstand zu gewinnen ist.

In Bezug auf dieses Thema sei hierbei auf die verdienstvolle Arbeit von *Gaede*, „Beiträge zur Kenntnis von *Gauss*' praktisch-geodätischen Arbeiten", Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1885, S. 136 u. ff. verwiesen.

Die Rekognoszierung eines Dreieckssystems, sei es nun Kette oder Netz, muss als eine einheitliche Arbeit für das ganze System aufgefasst werden. Sie darf nicht eher abgeschlossen werden, als bis das ganze Arbeitsfeld gründlich durchforscht ist, und bis alle möglichen brauchbaren Konfigurationen festgestellt sind. Bei einer *Kette*, für welche an beiden Enden feste Anschlussseiten gegeben sind, ist man nach der Mitte zu unabhängiger, hat grösseren Spielraum; doch ist nicht zu vergessen, dass jeder dieser Punkte bei späteren Arbeiten wiederum Anschlusspunkt für eine andere Kette oder für ein Netz werden kann.

Schwieriger ist die Rekognoszierung eines *Netzes*, für welches rundum ein ganzes Polygon von festen Anschlussseiten gegeben ist. Man kann von fast keinem Punkte, wenn er zunächst auch noch so brauchbar erscheint, von vornherein sagen, dass er wirklich endgültig brauchbar ist. Selbstverständlich giebt es einzelne Punkte, die vermöge ihrer dominierenden Lage gar nicht zu umgehen sind, wie z. B. den Brocken, Inselsberg, Feldberg im Taunus, Melibokus u. s. w. Solche Punkte sind aber Ausnahmen.

Die Rekognoszierung wird für gewöhnlich auf den gegebenen Anschlusspunkten beginnen, ferner diejenigen Punkte umfassen, welche man durch die Vorstudien als frühere Punkte kennen gelernt hat, und endlich auf alle Punkte sich erstrecken, welche während der Arbeiten im Felde sich sonst noch als vielleicht geeignet herausstellen. Die Rekognoszierung ist eine sehr mühsame, zeitraubende und aufregende Arbeit, welche an die körperliche und geistige Ausdauer hohe Anforderungen stellt.

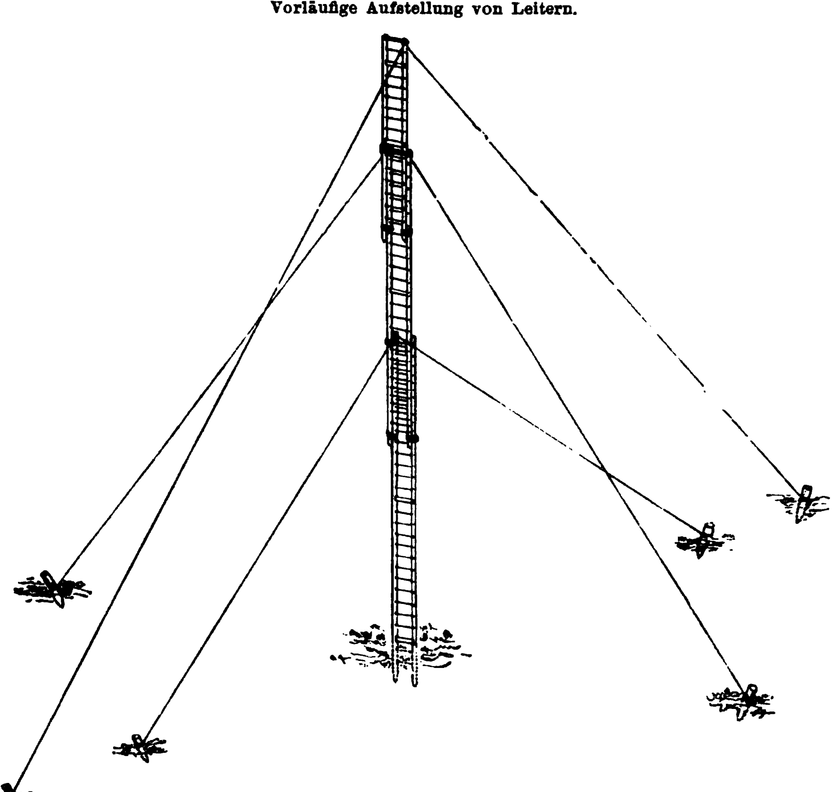
Die angeführten Schwierigkeiten beziehen sich zunächst nur auf Norddeutschland. In südlicheren Ländern von günstigerer Bodengestaltung, mit geringerer Bewaldung und klarerer Luft (z. B. Süddeutschland, Frankreich, Spanien, Italien) werden sie kaum, oder doch nicht in dem Masse vorhanden sein.

Die Rekognoszierung auf einem Punkte gestaltet sich folgendermassen: Bevor man sich auf ihn begiebt, empfiehlt es sich, alles, was man über ihn schon festgestellt hat, nochmals zu rekapitulieren und etwa fehlende rechnerische Vorarbeiten zu ergänzen. Auf ihm angekommen, hat man den ganzen Horizont gründlich zu durchforschen. Zu dem Ende stellt man den Rekognoszierungstisch und darauf das kleine Universal-Instrument auf und lässt den ganzen Umkreis langsam durch das Fernrohr marschieren. Alle hervorragenden Punkte stellt man ein, liest die Winkel ab und schreibt sie auf. Hierzu gehören trigonometrische Signale, Türme, Windmühlen, ferner hervorragende Bergkuppen, markierte Baumgruppen, Punkte, wo etwa näherer Horizont aufhört und fernerer anfängt, die Grenzen von Gebirgszügen, Wäldern u. dergl. Dabei dient das Instrument zur Messung der Winkel, dagegen zur näheren Untersuchung der Objekte das stärkere Handfernrohr. Die Entfernungen werden geschätzt. Die Resultate mit erläuternden Bemerkungen werden graphisch in einer Skizze auf starkem Zeichenpapier zur Darstellung gebracht. Solche Skizze nennt man bei der Abteilung „*Spinne*". Im Quartier findet die Verarbeitung, Sichtung und ordnungsmässige Eintragung des gewonnenen Materials unter Zuhilfenahme von Karte, Zirkel und Transporteur statt. Dies muss stets sofort erfolgen, damit weitere Entschlüsse gefasst und Vorbereitungen für den folgenden Tag getroffen werden können.

Es wird häufig der Fall eintreten, dass man auf dem in Aussicht genommenen

Punkte zu ebener Erde keinen Rundblick hat, wenn an der betreffenden Stelle Wald vorhanden ist, oder wenn die Gegend in hoher Kultur steht und anderweite Hindernisse bietet, Gehöfte, Gärten u. s. w. Dann muss man zunächst einen möglichst hohen Standpunkt zu gewinnen suchen, indem man Bäume erklettert, Windmühlen, Türme besteigt. In Ermanglung von solchen kann man sich mitunter dadurch helfen, dass man eine Leiter, wie man sie in jedem Dorfe findet, senkrecht aufrichten lässt (Fig. 1.).

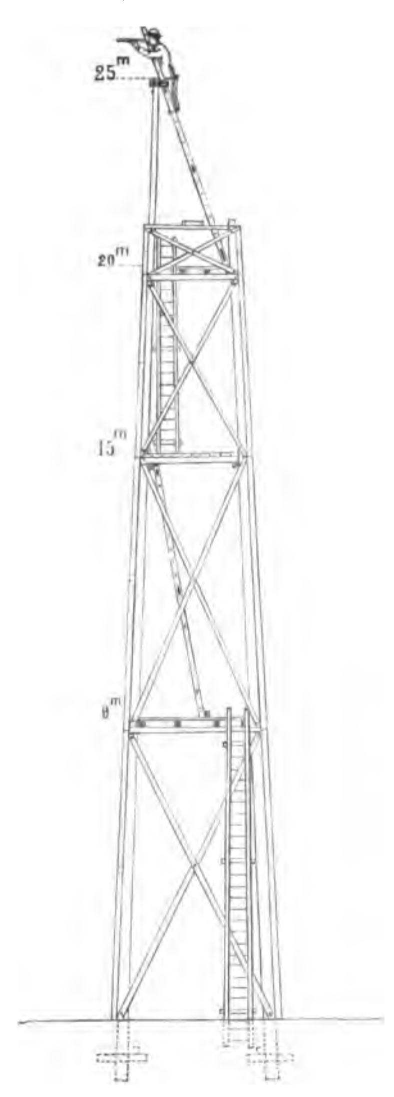
Fig. 1.
Vorläufige Aufstellung von Leitern.



Den nötigen Halt giebt man ihr dadurch, dass man sie mit dem unteren Ende in die Erde gräbt und das obere durch Seile halten lässt; eine zweite und dritte Leiter kann daran in die Höhe geschoben und ähnlich festgestellt werden. Man kommt auf diese Weise leicht 10—15^{m} hoch. Es ist dies jedoch alles nur eine vorläufige Massregel, welche die Auswahl des zweckmässigsten Platzes erleichtern soll.

Zur Ausführung der wirklichen Rekognoszierung, also zur Feststellung, ob die gewünschten Richtungen vorhanden, und in welcher Höhe sie zu haben sind, wird dann die Errichtung eines *Umschau-Gerüstes* (Fig. 2. S. 22) notwendig. Als Grundsatz ist hierbei festzuhalten, dass man das Gerüst immer einige Meter höher bauen lässt, als man voraussichtlich gebrauchen wird.

Fig. 2.
Umschau-Gerüst.



Ein solches Umschau-Gerüst ist leicht in die Höhe getrieben. Vier Ständer, welche bei grösserer Höhe aus starken Stangen zusammengesetzt werden, geben das Gerippe und werden durch mehrere horizontale Kränze zusammengehalten. Jede Wand dieses Gerüstes erhält durch Kreuzverbindungen (Verschwertungen) den nötigen Halt. Oben wird ein Fussboden gelegt, ein Geländer gezogen und ein roher Tisch oder ein Brett als Leuchtstand angebracht. Auf die Ständer wird event. eine Pyramidenspitze von schwarz angestrichenen Brettern aufgesetzt, um das Gerüst von den umliegenden Punkten leichter aufzufinden, und um es auch als Zielpunkt benutzen zu können. — Man kann rechnen, dass durchschnittlich in einem Tage 10m gebaut werden, und dass das Meter ungefähr 4—5 Mark kostet. Wird später der Punkt endgültig gewählt, so kann das Holz des Gerüstes beim Bau des Signals verwendet werden.

Bei der Rekognoszierung des Wesernetzes im Sommer 1883 sind von dem Vermessungsdirigenten Hauptmann *Gaede* über *zwanzig* Umschau-Gerüste leichtester Konstruktion bis zu 32m Höhe mit bestem Erfolge benutzt worden.

Eine weitere wichtige Gattung von Punkten bilden *Türme* und ähnliche Bauwerke. Sie bieten im allgemeinen den Vorteil, dass sie meist die Umgegend erheblich überragen, haben aber den Nachteil, dass sie besondere und oft recht schwierige Einrichtungen behufs Ausführung der Beobachtungen erfordern, und dass zu ihrer Benutzung die Erlaubnis der Behörden und Besitzer erwirkt werden muss. — Es giebt aber Gegenden, wo sie durchaus nicht zu umgehen sind, wie z. B. in dem stark angebauten Flachlande des nordwestlichen Deutschlands. In der hannoverschen Kette und im Wesernetz mussten deshalb, entsprechend dem Vorgange von *Gauss*, unverhältnismässig viele Türme zu Punkten I. Ordnung gemacht werden.

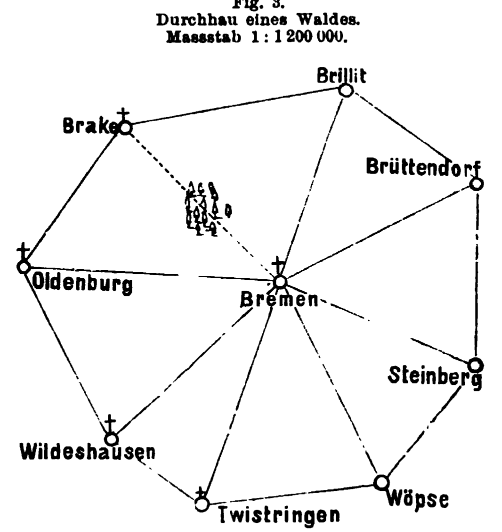
Für die vorläufige Rekognoszierung auf Türmen wird es zunächst genügen, eine flüchtige Einrichtung zu treffen, dass das kleine Instrument aufgestellt, vielleicht auch ein Heliotrop angebracht werden kann.

Erdkrümmung und Strahlenbrechung. Man kann manchmal durch Höhenwinkelmessung entscheiden, ob eine wünschenswerte Richtung überhaupt möglich ist. (Die nötigen Theorien hiezu, mit Erdkrümmung und Strahlenbrechung, haben wir in unserem II. Bande Kap. XI. behandelt.)

Durchhau von Wäldern.

Die Fälle, dass einzelne Bäume hindern und gefällt oder wenigstens ausgeästet werden müssen, kommen häufig vor. Von diesen ist hier nicht die Rede, da sie wenig Schwierigkeiten bieten. Anders liegt der Fall, wenn eine Richtung längere Waldstrecken durchschneidet. Solche grössere Durchhaue sind als äusserstes Gewaltmittel zu betrachten und nur durch die höchste Not gerechtfertigt, da sie erhebliche Eingriffe in private Rechte darstellen, viele, oft recht unerquickliche Verhandlungen mit den Besitzern erfordern und endlich grosse Kosten an Zeit und Geld verursachen. Nichtsdestoweniger wird man sich doch mitunter dazu entschliessen müssen, wenn nur dadurch eine wesentliche Verbesserung der Dreiecksformen gewonnen werden kann.

Fig. 3.
Durchhau eines Waldes.
Massstab 1 : 1 200 000.



Ein solcher Fall trat beispielsweise im Sommer 1883 bei Rekognoszierung des Wesernetzes mit der Richtung Bremen-Brake ein.

Diese Richtung war der einzige Strahl, welcher zur Vollständigkeit des Polygons um Bremen noch fehlte; ihre Herstellung erschien für die ganze Konfiguration von grossem Werte. Die örtlichen Verhältnisse lagen folgendermassen: Von Brake aus schlossen, etwa 16^{km} entfernt, in der Richtung nach Bremen bewaldete Berge den Horizont. Auch von Bremen aus erschien hochgelegener Wald, etwa 14^{km} entfernt, als Abschluss des Gesichtskreises gegen Brake. Es lag somit ziemlich in der Mitte der 35^{km} langen Richtung als Hindernis ein etwa 5^{km} breites Waldgebiet, über welches hinaus auch die Turmspitzen gegenseitig nicht sichtbar waren. Eine örtliche Rekognoszierung der Hindernisse ergab, dass eine Reihe parallel streichender, ziemlich bedeutender Höhenzüge die projektierte Verbindung der beiden Türme von Bremen und Brake annähernd senkrecht durchschnitt, und dass die ganze Gegend mit vielen einzelnen Waldparzellen bedeckt war, welche besonders auf den Kämmen der Berge sehr hohe Bäume, Eichen und Buchen von $30-40^{m}$ Höhe, enthielten.

Nun musste zunächst durch besondere schärfere Messung und Rechnung die Richtung in horizontaler Beziehung mit einer Genauigkeit von 10—20″ festgelegt werden. In vertikaler Beziehung wurden die Höhen in der Gegend der Hindernisse teils aus älteren Daten, teils durch besondere Messungen festgestellt. Es ergab sich daraus mit Sicherheit, dass nicht etwa die Berge selbst, sondern nur die Bäume das

Hindernis bildeten. Nunmehr wurde zur Markierung und Freilegung der Richtung geschritten.

Das allgemeine Verfahren bei solcher Arbeit ist im Prinzip einfach, in der Ausführung jedoch mitunter recht schwierig und zeitraubend. Man richtet auf beiden Endpunkten Beobachtungsstände ein und bringt in dem Hindernis einige Flaggen auf den höchsten Bäumen an, so dass sie schon möglichst in der Richtung liegen. Um sie nicht mit einander zu verwechseln, müssen sie durch verschiedene Farben oder dergl. kenntlich sein. Die Winkel nach den Flaggen werden gemessen, und aus ihnen unter Zuhilfenahme der angenähert festgestellten, etwa aus der Karte entnommenen Entfernungen die seitlichen Verschiebungen berechnet, welche nötig sind, um die Flaggen in die Richtung zu bringen. (Vgl. hiezu den Abschnitt „Abstecken von langen Geraden“ in unserem I. Bande S. 657.)

Bei dem Durchhau Bremen-Brake sind rund 1620 Mark an Entschädigungen gezahlt worden.

Grösse der Dreiecksseiten. Rein theoretisch lässt sich über die Vorzüge oder Nachteile kürzerer oder längerer Dreiecksseiten wenig sagen; so einfache allgemeine Gesetze, wie sie z. B. über die Zielweiten bei Polygonzügen, bei Nivellierung u. s. w. bestehen, giebt es für Triangulierung nicht.

Lange Seiten haben den Vorteil, dass man rasch weiter kommt, und wenn man einmal eine lange Seite aus einer kurzen Basis abgeleitet hat, dann ist es auch für die rein theoretische Genauigkeit besser, mit grossen Dreiecken fortzufahren, sowohl in Hinsicht auf Azimutübertragung als auch in Hinsicht auf Längenübertragung; lange Sichten sind aber schwieriger und seltener zu messen, und werden daher verhältnismässig, d. h. mit Rücksicht auf die aufgewendete Zeit und Mühe ungenauer als kurze.

Die Erfahrung hat dazu geführt, im Mittel nur etwa 20—50^{km} Seitenlänge zu nehmen, jedoch wenn besondere Gründe vorlagen, ist man auch schon bis zu 100^{km}, 200^{km} und noch weiter gegangen.

Einige besonders lange Dreiecksseiten stellen wir im folgenden zusammen:

Dreiecksseite	Meter	Bogen
Trunz-Galtgarben (Preussen, *Bessel*)	79 644	0° 43′
Brocken-Inselsberg (Hannover, *Gauss*)	105 977	0° 57′
Kamiensberg-Knibiskow (Afrika, *Maclear*)	128 028	1° 9′
Campvey-Desierto (Frankreich)	160 903	1° 27′
Slieve Donard-Sca Fell (England, Ord. trig. *survey* S. 434)	178 932	1° 36′
Ararat-Godarebi (Kaukasus, *Struve*)	202 384	1° 49′
Mulhacen-Filhaausen (Mittelländ. Meer, *Ibanez* und *Perrier*)	269 926	2° 26′

Nach *Helmert* math. u. ph. Th. d. h. G. I. S. 70 sind in Vorder-Indien von den Engländern nach dem Himalaya Sichten bis zu 340^{km} genommen worden.

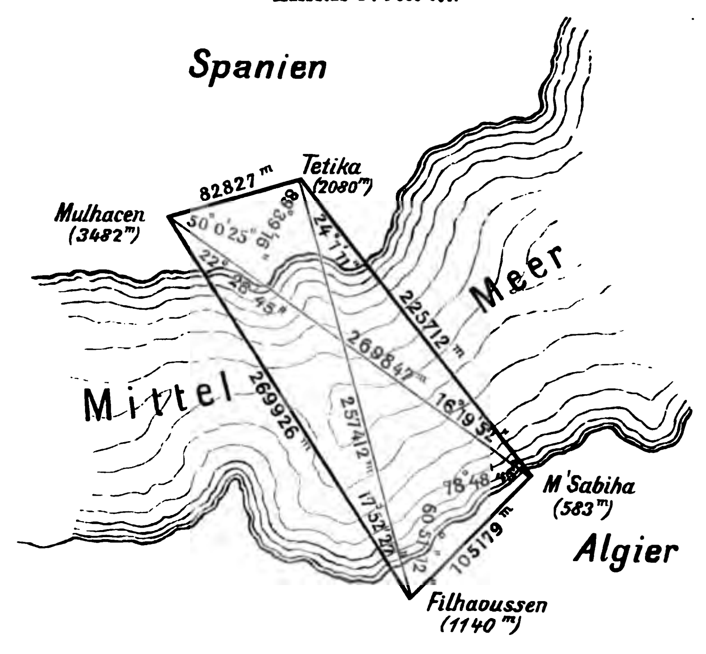
Von der vorerwähnten trigonometrischen Überspannung des mittelländischen Meeres geben wir in Fig. 4. S. 25 eine Darstellung mit eingeschriebenen Längen. Höhen und Winkeln. Das Unternehmen wurde im Herbst 1879 von *Ibanez* und *Perrier* ausgeführt.

Zur Signalisierung reichte Heliotropenlicht nicht aus, es wurde deshalb elektrisches Licht mit Nachtbeobachtung angewendet.

(Weiteres hierüber geben die Verhandl. d. 6. Konf. d. Eur. Gr., General-Bericht für 1880, S. 44—57; vgl. auch zwei Berichte in d. „Zeitschr. f. Verm.“, Pattenhausen 1881, S. 247—257 und *Fenner* 1882, S. 303—308.)

Fig. 4.

Triangulierung über das mittelländische Meer, zwischen Spanien und Algier, 1879.
Massstab 1 : 4 500 000.



§ 3. Pfeilerbau und Signalbau.

Nachdem die Triangulierungspunkte ausgewählt sind, hat man Einrichtungen zu treffen, erstens zum festen Aufstellen des Theodolits auf jedem Punkte und zweitens zum gegenseitigen Sichtbarmachen der Punkte für die Winkelmessung.

Diese Einrichtungen sind verschieden, je nachdem man es mit einem Punkte auf dem natürlichen Erdboden, z. B. auf dem Gipfel eines Berges, oder mit einem Punkte auf einem Turme oder ähnlichem Bauwerke zu thun hat.

Zur Sichtbarmachung dient heutzutage fast ausschliesslich das Heliotrop, von welchem später in § 4. die Rede sein wird. Die Einrichtung der Heliotropstände erfolgt gemeinsam mit dem Bau der Theodolitstände.

Zu ebener Erde nahm man früher als Theodolitstände allgemein hölzerne Stative; indessen in neuerer Zeit erbaut man für Messungen erster Ordnung *steinerne Pfeiler*.

Nach Mitteilung von Vermessungs-Dirigent *Erfurth* (vgl. die Anmerkung auf S. 18 unten) hat die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme hiefür folgende Einrichtungen:

„Ein Beobachtungspfeiler der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme

besteht entweder aus einem einzigen behauenen Stein, lang genug, um ihm den nötigen Halt im Erdboden zu geben, oder, da solche Monolithe schwer zu haben und teuer sind, aus mehreren behauenen Bruchsteinen von ganzem Querschnitt, welche mit Zement gemauert und lagenweise durch Dübel oder durch eine oder zwei durchgehende Eisenstangen fest verbunden werden. Aus Ziegelsteinen aufgemauerte Pfeiler sind möglichst zu vermeiden, da sie bei wechselndem Wetter, namentlich durch Regen und Frost, baldiger Zerstörung anheimfallen, auch mutwilligen Beschädigungen mehr ausgesetzt sind. Um den Pfeiler wird eine vierseitige Pyramide errichtet; die Spitze derselben wird mit Brettern bekleidet und schwarz angestrichen. Ausserdem wird ein Fussboden von Brettern gelegt, um bei windigem Wetter das Aufwirbeln von Sand und Staub möglichst zu verhindern."

Über Pfeilerbau und Punktversicherungen, teils auf dem natürlichen Erdboden, teils auf Türmen, können wir einige Erfahrungen mitteilen von den 10 „Gradmessungspfeilern", welche vom Verfasser 1869—1873 erbaut wurden. — Wir benützten dabei zuerst die von *Nagel* im Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1864, S. 39—40 mitgeteilten Erfahrungen.

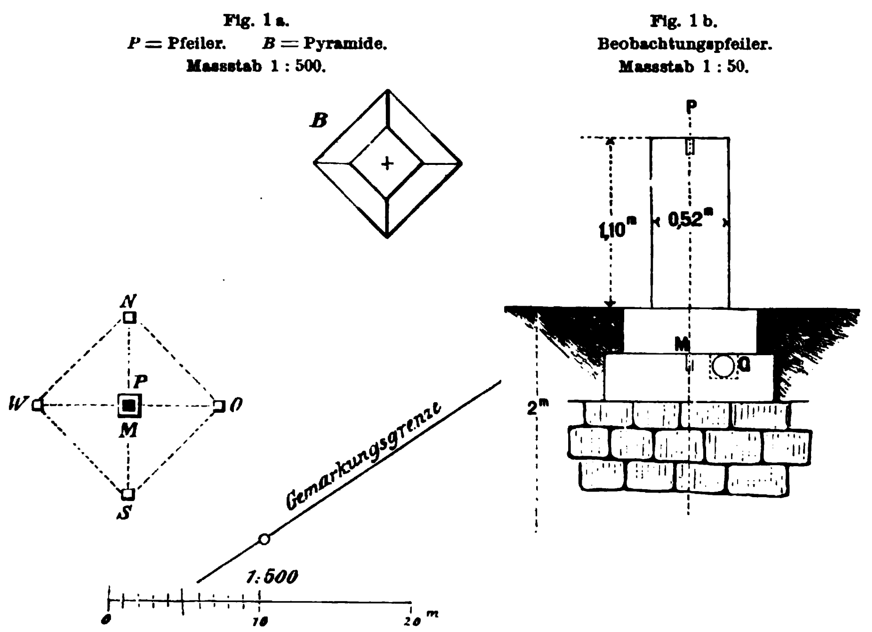
Die badischen Pfeiler mit ihren Versicherungen wurden zugleich an die vorzüglichen Punktfestlegungen der badischen Landes-Triangulierung angeschlossen.

Ein Beispiel für beides ist in Fig. 1a. und Fig. 1b. gegeben.

Trigonometrischer Punkt Kandel (Schwarzwald).

Fig. 1a.
P = Pfeiler. B = Pyramide.
Masstab 1 : 500.

Fig. 1b.
Beobachtungspfeiler.
Masstab 1 : 50.



Die Bezeichnung eines Punktes der (alten) badischen Landes-Triangulierung wurde etwa im Jahr 1820 durch eine von Felsstücken aufgebaute vierseitige abgekürzte Pyramide B bewerkstelligt. Der trigonometrische Punkt ist auf der Mitte der Pyra-

mide durch ein eingehauenes + bezeichnet. Ferner wurden noch vier solche Zeichen auf der Pyramide angebracht, und ausserdem der Dreieckspunkt gegen 8 benachbarte Gemarkungs-Grenzsteine durch unmittelbare Messung von 11 Entfernungen und 14 Winkeln festgelegt (letzteres ist in unserer Fig. 1 a. *nicht* angedeutet).

Im Jahr 1870 fand ich die Lage der 50 Jahre alten Versicherungspunkte noch auf wenige Centimeter übereinstimmend mit den früheren Messungen; jedoch wurde die Pyramide nun verlassen und ein *neuer* Punkt P auf einem Pfeiler mit einem 2^m tiefen Fundament hergerichtet, wie die Einzelzeichnung Fig. 1 b. zeigt, und ferner wurden 4 Versicherungsquader $S\ W\ N\ O$ auf Fundamentquadern versenkt.

In dem Fundamentquader des Pfeilers bei M und in jedem der 4 anderen Quader ist ein Messingcylinder in Blei eingegossen, und ein sechster Cylinder P lotrecht über M ist oben auf dem Pfeiler eingegossen, um die Theodolitmitte zur Winkelmessung zu bezeichnen.

Unten ist auch ein Glascylinder G eingesenkt, ein Schriftstück enthaltend, das der Nachwelt die Bedeutung der ganzen Anlage übermitteln soll.

Die 4 Versicherungspunkte wurden nicht willkürlich, sondern nach *Nord*, *Ost*, *Süd*, *West* eingewiesen, was leicht auf etwa 1' genau gemacht werden konnte mit Hilfe der alten badischen Landes-Triangulierung (trigonometrische Azimute mit Rücksicht auf Meridian-Convergenz).

Nachdem somit die 5 unteren Punkte auf ihren Fundamentquadern in den Baugruben festlagen, wurden ihre Abstände gemessen:

$$MN = 6{,}0591^m \qquad NO = 8{,}5793^m$$
$$MO = 6{,}0751 \qquad OS = 8{,}4274$$
$$MS = 5{,}8400 \qquad SW = 8{,}4650$$
$$MW = 6{,}1246 \qquad WN = 8{,}6204$$

Man hat die Proben $\sqrt{6{,}0591^2 + 6{,}0751^2} = 8{,}5802$ u. s. w.

Die 4 Hypotenusenproben gaben die Widersprüche $0{,}9^{mm}$, $0{,}5^{mm}$, $2{,}4^{mm}$, $5{,}1^{mm}$, welche als befriedigend auf sich beruhen blieben.

Um nun nach dem Aufbau des Pfeilers selbst den Punkt P genau lotrecht über M zu bringen, verfuhren wir so: Während der Theodolit zentrisch über M stand und die 4 Azimute 0°, 90°, 180°, 270° eingewiesen wurden, musste mindestens ein ferner Punkt H mit angezielt werden, der durch sein berechnetes Azimut jene 4 Einweis-Azimute lieferte. Nach dem Aufbau des Pfeilers wurde der Theodolit *vorläufig* aufgestellt mit Hilfe des fernen Punktes H orientiert und die 4 nahen Punkte wieder angezielt. Wegen der Exzentrizität der vorläufigen Theodolitstellung wurden nun nicht wieder genau 0°, 90°, 180°, 270° erhalten, sondern kleine Abweichungen, welche aber mit Zuziehung der 4 Entfernungen vollends zur genauen Zentrierung führten.

Vor und nach der Pfeileraufstellung wurden alle Punkte nivelliert.

Das Endergebnis drückt sich in folgenden Coordinaten und Höhen aus, im badischen System $+x$ nach Süden, $+y$ nach Westen, h ungefähr um 2^m zu gross im Vergleich mit Höhen über $N.$ $N.$

unkt		y	x	h
Pyramide, Kreuz	+	+ 33 403,830^m	+ 158 255,280^m	1247,010^m
Pfeiler oben	P	+ 33 421,215	+ 158 271,909	1244,360
„ unten	M	„	„	1242,986
Versicherung	N	+ 33 421,180	+ 158 265,850	1243,216
„	O	+ 33 415,140	+ 158 271,944	1242,993
„	S	+ 33 421,249	+ 158 277,749	1242,711
„	W	+ 33 427,340	+ 158 271,873	1242,861

Wir haben diese Zahlen beispielshalber hier hergesetzt, weil solche oder entsprechend genaue Angaben, mit Zeichnungen, den amtlichen Triangulierungs-Veröffentlichungen beigegeben werden sollen. — (Übrigens ist unser *Kandel* und der sehr schöne *Steinsberg* niemals zu Winkelmessungen benützt worden.)

Über *Signalbau* im besonderen haben wir die wertvollsten Mitteilungen in der Abhandlung von *Erfurth,* welche wir schon auf S. 18 zitiert und zum Teil abgedruckt haben.

Folgendes ist ein Auszug aus dem zweiten Teil von *Erfurth:*

Der Signalbau muss den Winkelmessungen mindestens ein Jahr voraus sein. Es wird schon im Laufe des Winters, sobald die Projekte festgestellt sind, Auftrag erteilt, welche Signale im folgenden Sommer gebaut werden sollen, damit das nötige Holz noch im Winter geschlagen werden kann. Denn die Bäume müssen vor dem Einschiessen des Saftes gefällt werden.

Der Signalbau umfasst die Herstellung aller Einrichtungen, welche erforderlich sind, um auf den endgültig bestimmten Punkten Beobachtungen machen, sowie auch dieselben von anderen Punkten aus als Zielpunkte benutzen zu können. Für gewöhnlich dient der Stand des Theodolits, der Beobachtungsstand, zugleich auch als Stand für den einzustellenden Heliotropen, als Leuchtstand. Es kommt jedoch nicht selten vor, dass für schwierige Richtungen noch besondere Leuchtstände in grösserer Höhe eingerichtet werden müssen. Bei Winkelmessungen erster Ordnung wird zwar in der Regel nur auf Heliotrope eingestellt, nichtsdestoweniger erhält aber jedes auf dem Erdboden erbaute Signal eine schwarze Spitze, welche hauptsächlich für die Messungen der niederen Ordnungen als Einstellungs-Zielpunkt dient.

Signale mit erhöhten Beobachtungs- und Leuchtständen werden bei der trigonometrischen Abteilung aus Holz bis zu ungefähr 25^{m} Beobachtungshöhe und 30^{m} Leuchthöhe noch mit solcher Festigkeit gebaut, dass auch bei ziemlichem Winde die Beobachtungen mit vollster Genauigkeit und Zuverlässigkeit gemacht werden können. Es ist dies dadurch möglich, dass die Beamten, welche die Signalbauten ausführen, seit Jahren in diesen Arbeiten thätig sind und reiche Erfahrungen unter den verschiedensten Verhältnissen gesammelt haben.

Bei jedem solchen Signal sind *zwei* vollständig von einander *unabhängige und für sich isolierte* Bauten zu unterscheiden: der Beobachtungspfeiler als Stand für das Instrument, und das den Pfeiler umgebende Gerüst für die Beobachter. Die Pfeiler sind entweder Standpfeiler oder Hängepfeiler.

Standpfeiler werden bei grösseren Beobachtungshöhen errichtet, ein Beispiel giebt die nachfolgende Fig. 4. S. 31.

Hängepfeiler werden seitwärts durch Streben getragen und reichen in der Mitte nicht bis zum Erdboden herab, sondern lassen in der Mitte so viel freien Raum, dass der Beobachtungspunkt von oben herunter gelotet und *zentrisch* festgelegt werden kann (was bei *Stand*pfeilern nicht möglich ist). Die Hängepfeiler lassen sich jedoch im allgemeinen nicht so hoch wie die Standpfeiler anordnen, während nämlich Standpfeiler 20—30^{m} hoch sein können, sind Hängepfeiler nur bis 10—12^{m} Höhe anwendbar.

Ein gutes Beispiel eines Hängepfeilers werden wir später in § 13. als Endpfeiler der Göttinger Basismessung kennen lernen.

Zur Verbindung von Pfeiler und Streben dienen durchgehende eiserne Schraubenbolzen. Zur Befestigung der unteren Stammenden in der Erde werden hölzerne Anker

angebracht; bei leichtem Boden werden ausserdem Steinbrocken in die Löcher geschüttet, schichtweise mit Wasser eingeschlemmt und festgerammt.

Das ganze System von Pfeiler und Streben muss nun noch gegen Winddruck, Durchbiegen und Verziehen bebesonders gesteift werden. Dies geschieht

1) durch Verbindungen zwischen zwei nebeneinander liegenden Streben, sogen. Kränze und Schwerter, Fig. 2.,
2) durch Verbindungen zwischen Pfeiler und Streben, Kreuze und Quirle, Fig. 3.

Fig. 2.
Kränze und Schwerter.

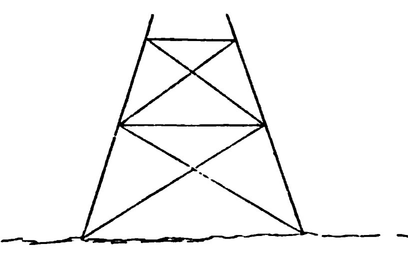
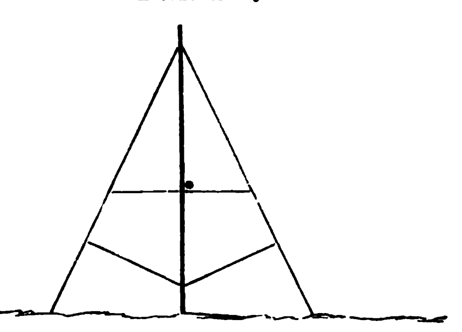


Fig. 3.
Kreuze und Quirle.



Ein Kranz besteht aus vier Hölzern, welche in gleicher Höhe über dem Erdboden von Strebe zu Strebe geführt werden.

Schwerter sind diagonale Verbindungen in den durch die Kränze entstandenen Paralleltrapezen. Bei sehr hohen Signalen können für die unterste Verschwertung noch besondere Hilfsstützen und Unterzüge nötig werden, welche immer in den Erdboden zu führen sind.

Kreuze sind Hölzer, welche je zwei gegenüberliegende Streben unter sich und mit dem Pfeiler verbinden. Quirle werden zwischen Pfeiler und je einer Strebe gesetzt; sie müssen die letztere möglichst rechtwinklig treffen.

Das Beobachtungs-Gerüst.

Um den Pfeiler wird das *Beobachtungs-Gerüst* unabhängig so errichtet, dass dasselbe nirgends mit dem Pfeilerbau in Berührung kommt. Es besteht aus vier Ständern, welche nicht senkrecht, sondern nach oben zu mit einer Neigung von ungefähr 1 : 15 nach innen gestellt werden. Die Feststellung der Ständer erfolgt wie beim Pfeilerbau durch Kränze und Schwerter; doch können diese selten so regelmässig angebracht sein, sondern müssen den Verhältnissen angepasst werden, da die völlige Isolierung beider Bausysteme von einander streng gewahrt werden muss. In Höhen von 5—8^{m} werden Fussböden gelegt, zu denen man auf Leitern emporsteigt. Der oberste Fussboden bildet den Beobachtungsraum in quadratischer Form von 2,3—2,5^{m} Seite. Die Höhe des Beobachtungs-Punktes über dem obersten Fussboden beträgt 1,12—1,16^{m}. Zum Schutze wird ein Geländer aus starken Latten gezogen. Zwei Meter über dem Fussboden läuft um alle 4 Gerüstständer ein horizontaler Kranz von Latten zum Anbringen von Leinwandplanen, welche später beim Beobachten zum Schutze des Instruments gegen Sonne und Wind ausgespannt werden. Bei der ersten Anlage des Gerüstes muss schon darauf geachtet werden, dass vom Beobachtungspunkt aus gesehen keine der zu messenden Richtungen durch einen Ständer verdeckt wird. Jede dieser

letzteren muss mindestens 5^{cm} daran vorbeistreichen. Auf die Ständer wird eine vierseitige Pyramide aufgesetzt, deren Spitze mit Brettern bekleidet und geschwärzt wird; die Spitze liegt in der Regel 4—5^{m} über der Beobachtungsplatte. Wird für einzelne Richtungen ein erhöhter Leuchtstand notwendig, so muss das Gerüst entsprechend höher und solider gebaut werden. Die Leuchtplatte, welche dieselbe Grösse hat wie die Beobachtungsplatte, wird gewöhnlich auf der Pyramidenspitze befestigt.

Da die Signale der ersten Ordnung auf eine längere Reihe von Jahren bis zur Beendigung aller Vermessungsarbeiten stehen bleiben müssen, so werden diejenigen Holzteile, welche dem Verderben am meisten ausgesetzt sind, d. h. die in oder nahe dem Erdboden befindlichen Stammenden, zum Schutze gegen Fäulnis und Insektenfrass *imprägniert*. Die Imprägnierung erfolgt durch Anstrich der betreffenden Holzteile und ausserdem durch Einguss in das Innere der Hölzer. Der dazu verwendete Stoff besteht aus Chlorzink, kaltem Wasser und Karbolsäure.

Zur besseren Erläuterung des bisher über den Bau erhöhter Signale Gesagten wird nachstehend auf S. 31 die Zeichnung eines solchen gegeben. Auch sei noch hinzugefügt, dass die Gesamtkosten in runden Summen betragen haben:

für das Signal Wöpse	1300	Mark
„ „ „ Brüttendorf	1190	„
„ „ „ Wittekind	1740	„

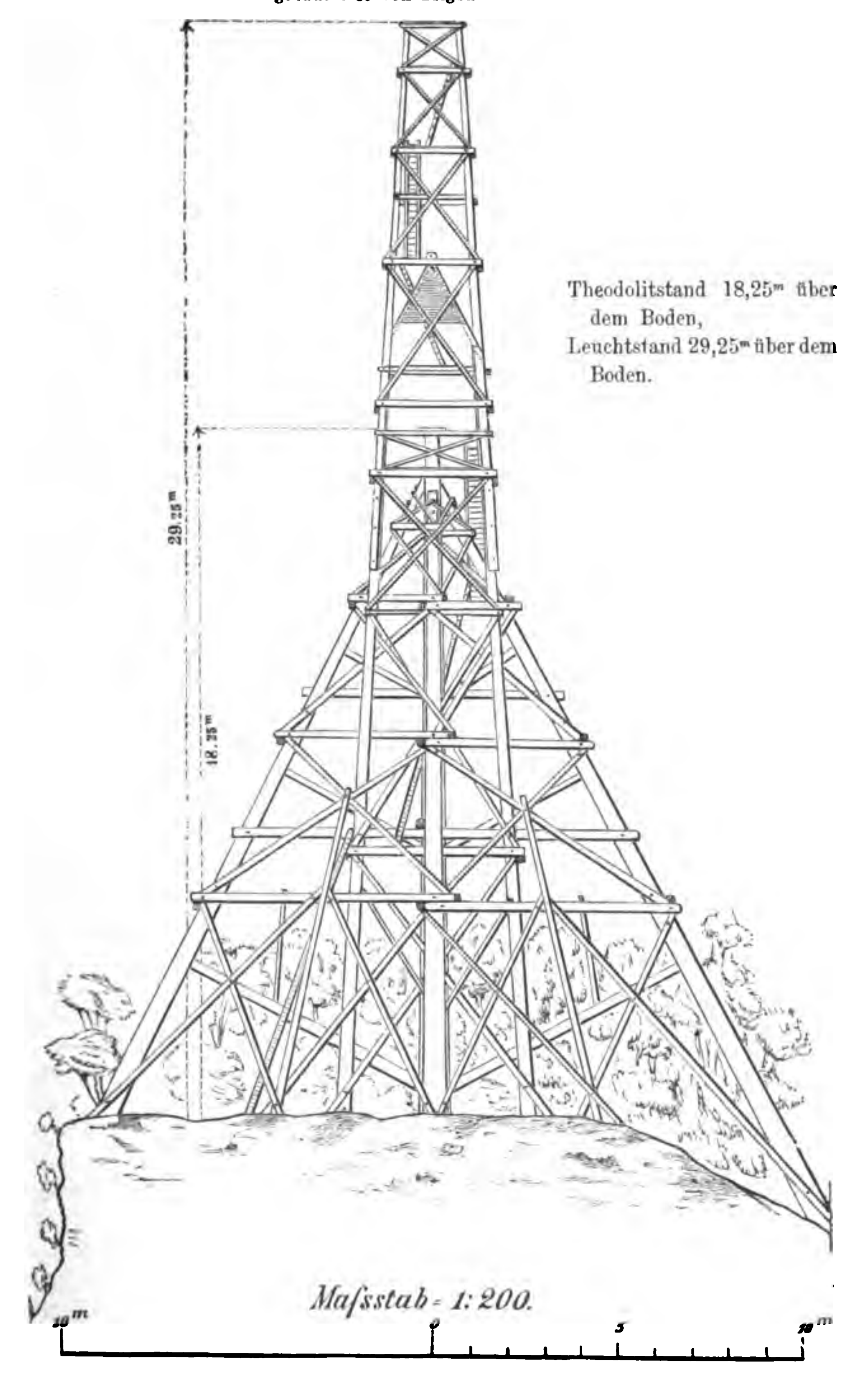
Kleinere Signale von 4—10^{m} Beobachtungshöhe kosten ungefähr 150—500 M., von 10—20^{m} Beobachtungshöhe 500—1000 M. Die Kosten können durch örtliche Verhältnisse, höhere Preise für Fuhrwerk und Arbeitskräfte, sowie namentlich durch etwaigen weiten Transport des Holzes sehr verschieden ausfallen. Was die erforderliche Bauzeit für ein höheres Signal anbetrifft, so kann man bis zu 20^{m} Beobachtungshöhe ungefähr 1 Tag für 1 Meter rechnen, für jedes Meter über diese Höhe hinaus 2 Tage.

Die Einrichtung von *Türmen* und ähnlichen Bauwerken zu Beobachtungszwecken bietet häufig besondere Schwierigkeiten. Es lassen sich für diese Arbeit keine allgemeinen Regeln geben, da dieselbe von der Bauart des Turmes abhängig ist. Als Grundbedingung ist festzuhalten, dass für das Instrument ein besonderer, möglichst fester und isolierter Stand, und für den Beobachter ausreichender und gesicherter Raum geschaffen werden muss. Dabei ist stets auf möglichste Schonung des Turmes Rücksicht zu nehmen und Vorkehrung zu treffen, dass durch die zu machenden Öffnungen nicht Regen und Schnee eindringen kann, damit eine Beschädigung des Turmes verhindert wird.

In dem nördlichen Teil der hannoverschen Kette und des Wesernetzes haben fast durchweg Kirchtürme und Leuchttürme zu Beobachtungs-Stationen eingerichtet werden müssen, und trotz der verschiedenen und mitunter recht mangelhaften Bauart der Türme ist es doch gelungen, die Einrichtungen so zu treffen, dass die Beobachtungen mit genügender Sicherheit gemacht werden konnten. Es trat hierbei nicht selten der Fall ein, dass, um den Horizont rundum zu beherrschen und alle Richtungen einstellen zu können, sogar *zwei* Beobachtungsstände auf einem Turme gebaut werden mussten, wie z. B. bei den Kirchtürmen von Brake und Westerstede und bei dem Leuchtturm von Neuwerk.

Am einfachsten gestaltet sich der Bau, wenn um den Turm in der erforderlichen

Fig. 4.
Signal Wittekind der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, gebaut 1885 von Trigonometer *Otto*.



Höhe ein Rundgang aus Mauerwerk führt. In diesem Falle wird ein Pfeiler aufgemauert, und für den Beobachter ein Stand geschaffen, indem Balken aus dem Innern des Turmes herausgestreckt werden. — Wenn ein Rundgang nicht vorhanden ist, sondern auf die Mauern des Turmes sich das Dach ohne Absatz aufbaut, so muss letzteres geöffnet werden. Der Pfeiler wird wieder auf Mauerwerk errichtet und der Beobachtungsstand von innen heraus balkonartig konstruiert. Es kann hierbei nötig werden, die Pfeiler zu grösserer Höhe aufzumauern. So hat beispielsweise der Kirchturm von Wangeroog einen gemauerten Pfeiler von 4^m, derjenige von Wildeshausen sogar einen solchen von 5^m Höhe erhalten. Um dem Pfeiler dann den nötigen Halt zu geben, wird eine Eisenbahnschiene oder starke Eisenstange mit eingemauert; auch werden besondere Verstrebungen angebracht. Die Oberfläche des Pfeilers muss 1,10 bis $1{,}16^m$ über dem Fussboden des Beobachtungsstandes liegen.

Hat der Turm eine genügend geräumige Laterne, so pflegt man einen Pfeiler von Holz zu verwenden und denselben wie den hängenden Pfeiler eines erhöhten Signals mit Streben zu versehen, welche sich auf das tiefer liegende Mauerwerk aufsetzen. Diese Einrichtung ist z. B. bei dem Kirchturme von Cloppenburg getroffen worden. Auf dem Ruinenturm der Landskrone im südlichen Elsass wurde der Fussboden der sehr geräumigen freien Plattform durchbrochen und ein gemauerter Pfeiler auf die tiefer gelegenen Gewölbedecken aufgesetzt, darüber eine vollständige Signalpyramide gebaut.

Der Kirchturm von Brake hat zwei Pfeiler auf dem Mauerwerk des Turmes erhalten; die beiden Beobachtungsstände mussten hängend konstruiert werden, wozu starke Balken als Träger aus den höher gelegenen Luken herausgestreckt wurden, dieses ist in Fig. 5. S. 33 dargestellt.

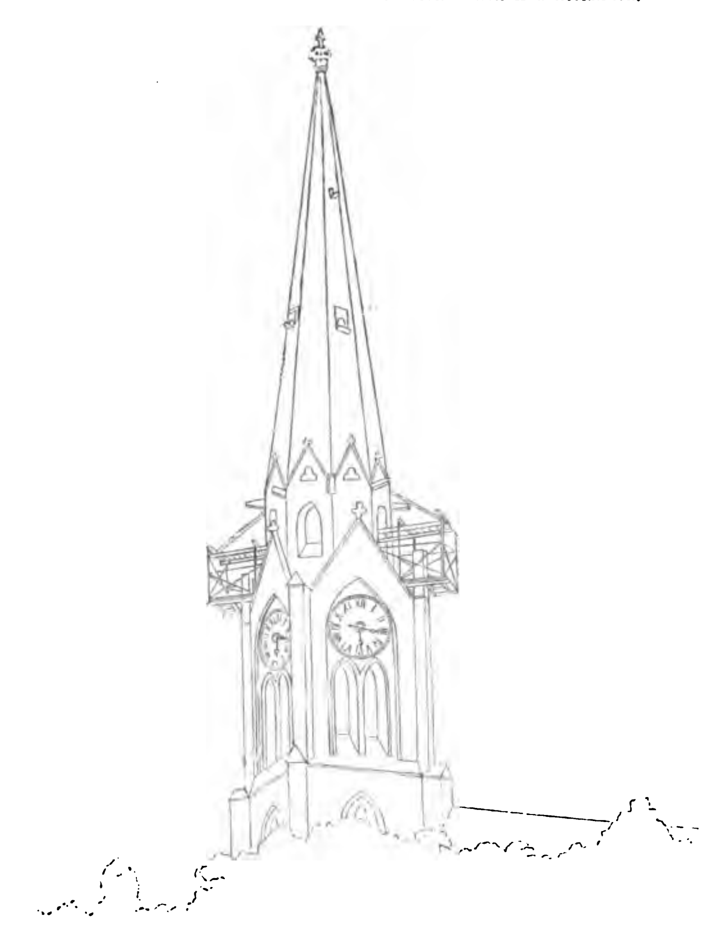
Dieselbe zeigt zugleich die Anbringung mehrerer Leuchtstände in der Spitze des Turmes.

Diese Einrichtung des Turmes von Brake mit zwei Ständen hat rund 520 Mark gekostet. Bei der Einrichtung des Kirchturmes von Twistringen sind beispielsweise für Kupferschmiede- und Dachdecker-Arbeiten besondere Kosten im Betrage von 380 M. entstanden.

Von den Signalen werden genaue Zeichnungen und von den Türmen photographische Aufnahmen gemacht. Zu dem letzteren Zwecke besitzt die trigonometrische Abteilung einen leicht transportablen photographischen Apparat. Die aufgenommenen Platten werden, gegen die Einwirkung des Lichts geschützt, nach Berlin gesandt und dort entwickelt.

Nach dem Wiedereintreffen in Berlin wird durch die Rekognoszierungs-Sektion auf Grund des Rekognoszierungs-Berichtes des Dirigenten und der beim Signalbau gemachten Aufnahmen und Notizen für jeden trigonometrischen Punkt I. Ordnung ein sogenannter *Stammbogen* angelegt. Derselbe enthält die Beschreibung der Örtlichkeit, die topographische Lage, Historisches über ältere Triangulationen, Angaben über bisherige Messungen der Abteilung, bauliche Einrichtungen, Zentrierungen, allgemeine Bemerkungen über Festigkeit, schwierige Richtungen, endlich Notizen über Quartier, bezahlte Entschädigungen, Abmachungen wegen des Stehenbleibens bezw. des Abbruches der Signale und Beobachtungsstände etc. Der Stammbogen ist sozusagen das curriculum vitae des Punktes. Jeder später folgende Beobachter hat für die nötige Vervollständigung Sorge zu tragen.

Fig. 5.
Kirchturm von Brake
mit zwei Theodolitständen und mehreren hohen Leuchtständen.



Drehen der Beobachtungs-Pfeiler.

Bei hohen Türmen und Gerüsten beobachtet man die für Winkelmessungen missliche Erscheinung des *Drehens,* infolge ungleichförmiger Erwärmung durch die Sonne. Vollständig fest stehen auch steinerne Türme nicht, indessen wird das Drehen hauptsächlich bei hölzernen Gerüsten gefunden.

Eine eingehende Untersuchung dieser Sache mit vielen Beobachtungen bei der mecklenburgischen Triangulierung wurde von *Paschen* in den astronom. Nachrichten, 63. Band (1865) Nr. 1492—1493 mitgeteilt.

Es fanden sich bei einem 11 Meter hohen Pfeiler auf der Station Karbow, welcher äusserst haltbar aus vierkantig beschlagenen Balken konstruiert, und vom Standpunkt des Beobachters völlig unabhängig gestellt im Juli 1857 erbaut worden war,

bei der Beobachtung im Juni 1858 starke Drehungen, die einen ziemlich regelmässigen Tagesverlauf zeigten, Morgens — 2′, Mittags 0′, Abends + 2′. (Astr. Nachr. 1492, S. 56.)

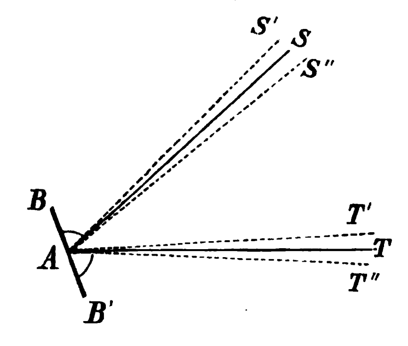
Das Drehen der Beobachtungs-Pfeiler wirkt offenbar am schlimmsten, wenn man lange Sätze nimmt; durch Hingang und Rückgang wird das Drehen zum teil unschädlich gemacht. Am besten ist es in dieser Hinsicht immer nur *zwei* Zielpunkte in einen Satz zusammen zu nehmen, d. h. reine „Winkel“-Messungen zu machen.

§ 4. Das Heliotrop.

Während bei kürzeren Entfernungen die Zielpunkte durch Baken mit Fahnen, durch kleine Pyramiden, durch Zieltafeln u. dgl. genügend bezeichnet werden können, ist bei grösseren Entfernungen die Sichtbarmachung der Dreieckspunkte oft eine sehr schwierige Sache. Früher dienten bei grossen Entfernungen hauptsächlich Kirchtürme und besonders erbaute grosse hölzerne Pyramiden als Zielpunkte. In Frankreich und England wurden auch künstliche Lichtsignale bei Nacht als Zielpunkte genommen (auf welche man neuerdings wieder teilweise zurückkommt).

Im Jahr 1821 hat *Gauss* das *Heliotrop* erfunden, welches seit jener Zeit hauptsächlich zur Anzielung von Hauptdreieckspunkten benützt worden ist.

Fig. 1.
Wirkungsweise des Heliotrops.



Die Wirkungsweise des Heliotrops ist einfach zu erklären (Fig. 1.). Wenn von einem Punkte A (Heliotrop) nach einem entfernten Punkte T (Theodolit) ein Signal gegeben werden soll, so stellt man in A einen ebenen Spiegel $B\,B'$ so auf, dass durch ihn die Sonnenstrahlen $S\,A$ nach T geworfen werden. Dieses ist bekanntlich nach dem Reflexionsgesetze der Fall, wenn die Ebene des Spiegels rechtwinklig ist auf der Ebene $S\,A\,T$ und wenn die Winkel $S\,A\,B$ und $T\,A\,B'$ einander gleich sind.

Da die Sonne einen scheinbaren Durchmesser $S'\,A\,S''$ von etwa $1/2°$ hat, so sendet der Heliotropenspiegel $B\,B'$ einen Lichtkegel $T'\,A\,T''$ von ebenfalls etwa $1/2°$ Öffnung aus, und ein entfernter Punkt T bekommt Licht, wenn er nur wenigstens innerhalb dieses Strahlenkegels fällt, ohne gerade von der Axe $A\,T$ des Kegels getroffen zu werden.

Dieser Umstand ist für die Anwendung des Heliotrops in zweifacher Beziehung günstig; erstens ist infolge hievon bei der Einstellung des Instruments keine grosse Genauigkeit erforderlich, und zweitens kann *eine* Einstellung während der Dauer von nahezu 1 Minute beibehalten werden, obgleich sich während dieser Zeit die Sonne um einen merkbaren Bogen bewegt. (1 Zeitminute entspricht einer Sonnenbewegung von 15′). Das fortgesetzte Einstellen des Heliotrops, entsprechend der Sonnenbewegung, kann zwar durch mechanische Mittel (Heliostat) erzielt werden, doch hat man bei Triangulierungen bis jetzt im allgemeinen das fortgesetzte Richten durch einen Gehilfen vorgezogen, weil ein solcher Gehilfe zur Bedienung des Instruments aus anderen Gründen ohnehin notwendig ist.

Nach dieser allgemeinen Darlegung wollen wir auf die Beschreibung verschiedener Heliotrope im einzelnen eingehen, und zwar wollen wir, aus geschichtlicher Rücksicht, mit einem Werkzeuge beginnen, welches jetzt kaum noch gebraucht wird:

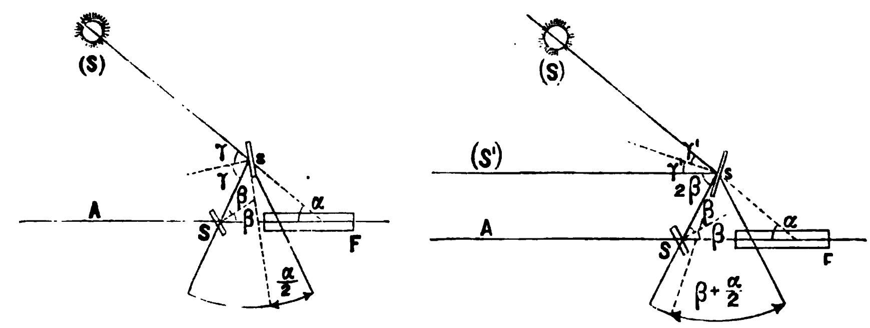
I. Das Sextanten-Heliotrop von Gauss („Vice-Heliotrop").

Dasselbe wird zuerst von *Gauss* in einem Briefe an *Schumacher* in den astr. Nachr. 1. Band, S. 106 (Februar 1822) kurz erwähnt. Weiteres hierüber geben die Mitteilungen von Hauptmann *Gäde* in der „Zeitschr. f. Verm." 1885, S. 125.

Hiernach fiel die Erfindung des Sextanten-Heliotrops in die Zeit der Ausführung des eigentlichen *Gauss*schen (Spiegelkreuz-) Heliotrops, das wir nachher (S. 36—37) beschreiben.

Gauss schreibt (vgl. „Zeitschr. f. Verm," 1885, S. 125): „Noch vor dessen (des eigentlichen Heliotrops) Vollendung war ich auf die Idee gekommen, einen blossen Spiegelsextanten zu einer Art Vice-Heliotrop einzurichten, freilich viel unvollkommener, als jenes Instrument selbst, aber doch bei geschickter Behandlung gleichfalls brauchbar."

Fig. 2. Sextant. Fig. 3. Sextanten-Heliotrop.



Die Theorie dieses „Vice-Heliotrops" erklärt sich an Fig. 2. und Fig. 3., bei welchen wir die Sextantentheorie selbst als bekannt voraussetzen (vgl. *Jordan*, Grundzüge der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885, S. 155 und S. 175).

In Fig. 2. ist (S) die Sonne und A der Zielpunkt, welcher Licht erhalten soll, Fig. 2. zeigt also diejenige Sextantenstellung, welche zur Messung des Winkels α zwischen A und (S) erforderlich ist. Der Sextant wird hiebei auf einem festen Stativ gebraucht, und nachdem die Einstellung Fig. 2. gemacht ist, wird die Alhidade um den doppelten Schärfungswinkel, d. h. um 2β vorwärts gedreht, (Fig. 3.) worauf man erwarten darf, dass das am grossen Spiegel S reflektierte Sonnenbild (S') nun in die Richtung (S') parallel SA geworfen wird.

Um dieses nach Fig. 2. und Fig. 3. einzusehen, hat man sich des allgemeinen Sextanten-Reflexions Gesetzes zu erinnern, dass eine Spiegeldrehung (oder Alhidadendrehung) um den Winkel β an dem reflektierten Strahl sS, bzw. $s(S)$ eine Drehung um den *doppelten* Betrag von β, also um 2β, erzeugt, oder es wird in Fig. 3. der Winkel $Ss(S') = 2\beta$, wie auch daselbst eingeschrieben ist, und damit wird $s(S')$ parallel FA, was man haben will.

II. Das Spiegelkreuz-Heliotrop von Gauss.

Dieses ist das Instrument, welches von *Gauss* zuerst (im Jahr 1821) erfunden wurde. Eine Beschreibung desselben wurde von *Gauss* im 5. Bande der astr. Nachrichten, S. 329—334 (Februar 1827) nebst Zeichnungen gegeben.

Fig. 4.
Grundsatz des *Gauss*schen Heliotrops.

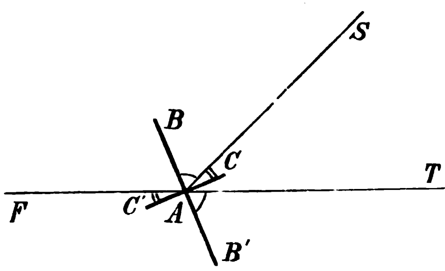
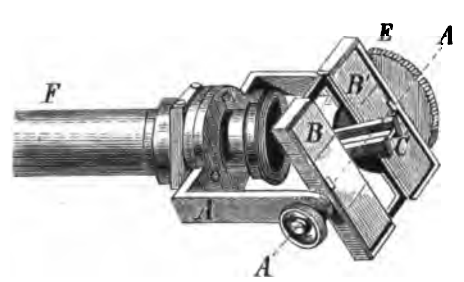


Fig. 5.
Ansicht des *Gauss*schen Heliotrops.
(Massstab etwa 1 : 3).



(Hannov. Sammlung.)

In Fig. 4. haben wir den Grundsatz und in Fig. 5. die äussere Ansicht des *Gauss*schen Heliotrops. Wir haben zwei ebene, rechtwinklig gekreuzte Spiegel $B\,B'$ und $C\,C'$, welche vor einem Fernrohr F so angebracht sind, dass die gemeinsame Spiegelaxe $A\,A'$ rechtwinklig zur Fernrohraxe ist, und sich in Fig. 4. als ein Punkt A zeigt. Ein von der Sonne S herkommender Lichtstrahl $S\,A$ wird nun von dem einen grösseren Spiegel $B\,B'$ vorwärts nach T reflektiert, und von dem zweiten kleineren Spiegel $C\,C'$ rückwärts nach F in das Fernrohr; und wegen der rechtwinkligen Kreuzung beider Spiegel ist $T\,A\,F$ *eine* ungebrochene Gerade.

Die technische Ausführung des *Gauss*schen Heliotrops zeigt Fig. 5., wobei im wesentlichen dieselben Buchstaben-Bezeichnungen wie in Fig. 4. angewendet sind. Der grosse Spiegel $B\,B'$ erscheint in Fig. 5. in 2 Teile B und B' zerlegt, deren Ebenen jedoch zusammen fallen. Der Spiegelapparat wird mit dem Fernrohr verbunden, und das Fernrohr muss dann um seine Axe drehbar sein.

Die Anwendung besteht in Folgendem: Man richtet das Fernrohr für sich allein nach dem entfernten Punkt T, welcher Licht erhalten soll, und zwar hat man hiebei den kleinen Spiegel C parallel der Fernrohraxe zu stellen, so dass er zwar einen Teil des Objektivs verdeckt, aber immer noch genügend Licht auf dasselbe fallen lässt. Von da an bleibt das Fernrohr in seiner Richtung unverändert, und es wird vor das Okular desselben eine Sonnenblendung vorgeschoben. Nun stellt man zuerst die Spiegelaxe $A\,A'$ rechtwinklig zu der Ebene $S\,A\,T$ von Fig. 4., und zwar beurteilt man dieses darnach, dass eine Scheibe E (Fig. 5.), welche auf der Axe $A\,A'$ rechtwinklig aufgesteckt ist, keinen Flächenschatten wirft, sondern im Sonnenschatten als Linie erscheint. Sobald irgend eine zu $A\,A'$ rechtwinklige Ebene keinen Schatten mehr wirft, kann man durch Drehen der Spiegel um die Axe $A\,A'$ ein Sonnenbild im Fernrohr zum Vorschein bringen, und das Heliotrop ist dann gerichtet.

Was die Prüfung und Berichtigung des Apparates betrifft, so hat *Gauss* selbst im 5. Band d. astr. Nachr. S. 329—334 dieselbe sehr ausführlich behandelt und zwar mit Unterscheidung von folgenden 8 Forderungen:

1\. 2. Die Absehlinie des Fernrohrs soll mit der Drehaxe des Fernrohrs zusammenfallen (oder wenn das Fernrohr fest und der Spiegelapparat um das Fernrohr drehbar ist, soll die Absehlinie des Fernrohrs mit der Drehaxe des Spiegelapparats zusammen fallen).

3\. Die Drehaxe $A A'$ (Fig. 5.) der Spiegel soll rechtwinklig zur Fernrohraxe sein.

4\. 5. 6. Die Ebenen der Spiegel sollen parallel dieser Drehaxe $A A'$ sein.

7\. Die beiden Bestandteile B und B' (Fig. 5.) des grossen Spiegels sollen parallel sein.

8\. Die Ebene des grossen Spiegels und die Ebene des kleinen Spiegels sollen rechtwinklig zu einander sein.

Die Ausführung wird so gemacht:

1\. 2. Centrierung des Fernrohrs wie bei einem Nivellier-Instrument.

3\. $A A'$ rechtwinklig zur Fernrohr-Axe, wird von *Gauss* mit Hilfe einer angehängten Libelle gemacht, worauf wir hier nicht weiter eingehen.

4\. 5. 6. 7. Kann nötigenfalls rein äusserlich, durch angelegte Lineale und rechte Winkel untersucht werden.

8\. Die Hauptforderung, ob die beiden Spiegel gegenseitig *rechtwinklig* sind, kann man dadurch erfüllen, dass man die beiden Spiegel zusammen wie ein Spiegelkreuz oder Prismenkreuz beim Feldmessen behandelt (vgl. Band II. S. 8—11).

Zu der Heliotrop-Prüfung schrieb Mechaniker *Meyerstein* im Januar 1876 im 87. Band, Nr. 2080, der astr. Nachrichten folgendes:

„Die Methode, welche *Gauss* zur Berichtigung des für die Geodäsie so wichtigen Instrumentes im 5. Bande der astr. Nachr. angegeben hat, lässt bekanntlich im Resultate nichts zu wünschen übrig. Soll aber dieses Resultat erzielt werden, so ist es nur durch eine so grosse Sorgfalt möglich, mit welcher *Gauss* diese Berichtigung vornahm, welche aber einen sehr bedeutenden Zeitaufwand erfordert. Diese letzte Bemerkung hat der selige *Gauss* mir gegenüber, indem ich ihm bei der Berichtigung der Heliotrope sehr häufig assistierte, oft gemacht." *Meyerstein* giebt dann eine andere Prüfungsmethode mit einem Hilfsfernrohr, das, mit beleuchtetem Fadenkreuz, auf das Heliotropen-Fernrohr eingerichtet wird.

Es ist hiezu auch über einige Bemerkungen zu berichten, welche von *Helmert* in dem Berichte über die wissenschaftlichen Apparate auf der londoner internationalen Ausstellung 1876, Berlin 1878, S. 165 ff. zu dem *Gauss*schen und zu anderen Heliotropen gemacht hat. Für das *Gauss*sche Heliotrop findet *Helmert* den Einstellfehler $\Delta = 2\sqrt{f^2 + \delta^2}$, wenn f die Neigung der Spiegelaxe in der Ebene der Fernrohraxe und δ der Fehler in der Rechtwinkligkeit der beiden Spiegel ist; es wirkt also auch f als Grösse erster Ordnung.

Da das *Gauss*sche Heliotrop nur noch historisches Interesse hat, und in der Anwendung namentlich durch das *Bertram*sche Heliotrop ersetzt ist (s. u. S. 38 bis 40) schliessen wir damit ab.

III. Das Heliotrop von Steinheil.

Auch dieses, zuerst in *Schumacher*s astr. Jahrbuch 1844, S. 13 beschriebene Instrumentchen ist praktisch kaum von Bedeutung, doch lohnt die sinnreiche Einrichtung wohl eine kurze Beschreibung:

Der Spiegel $B B'$ hat in der Mitte bei A eine unbelegte Stelle, so dass die von S herkommenden Sonnenstrahlen durchgehen, und auf eine hinter dem Spiegel

angebrachte Sammellinse L fallen können. Diese Linse L erzeugt ein Sonnenbild in C, welches durch eine matte Fläche aufgefangen wird. Das Sonnenbild in C sendet seinerseits wieder Strahlen zurück nach der Linse L, welche von da wieder parallel austreten, auf die unbelegte Rückseite des Spiegels in A fallen, und nach O zurückgeworfen werden. In folge dessen sieht das Auge O ein mattes Sonnenbild in der Richtung $A\,T$. Die nach O gelangenden Sonnenstrahlen machen hiernach folgenden Weg:

$S\,A\,L\,C$, dann zurück $C\,L\,A$ und reflektiert nach O.

Fig. 6.
Grundsatz des *Steinheil*schen Heliotrops,
S = Sonne, T = Zielpunkt.

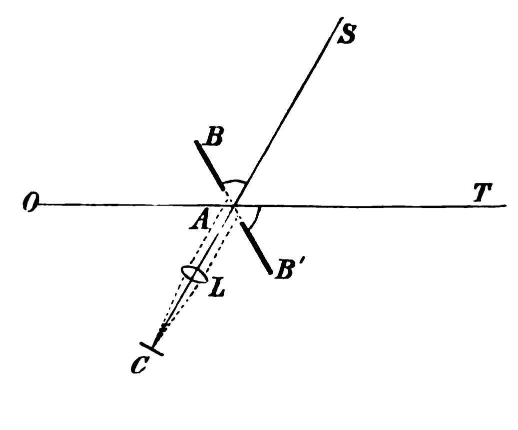


Fig. 7.
Ansicht des *Steinheil*schen Heliotrops.
(Massstab ungefähr 1 : 2.)



(Hannov. Sammlung.)

Andererseits werden die von S auf den *belegten* Teil der Spiegelfläche $B\,B'$ fallenden Strahlen in der Richtung $A\,T$ vorwärts reflektiert, und daraus giebt sich folgende Anwendung:

Das Instrument wird unter Benützung eines Gelenkes bei C, so gestellt, dass die Linse L durch die unbelegte Stelle bei A Sonnenlicht erhält. Dann zielt das Auge O hinter dem Spiegel durch die Öffnung A nach dem Zielpunkt T, welcher Licht erhalten soll, und der Spiegel wird teils im Kugelgelenk C, teils um seine durch A gehende Axe so gedreht, dass in der Richtung $A\,T$ das oben erwähnte matte Sonnenbild erscheint.

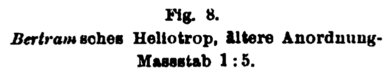
IV. Das Heliotrop von Bertram.

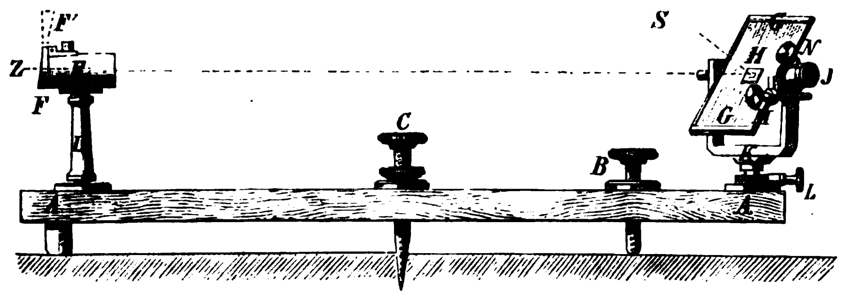
Diese einfache Vorrichtung, welche keine Prüfung und Berichtigung braucht, und ohne Fernrohr von jedem Gehilfen bedient werden kann, ist zur Zeit die am meisten gebrauchte.

Das Instrument wird zuerst von *Bessel* in der „Gradmessung in Ostpreussen" S. 65 erwähnt mit den Worten: „Die benützten Heliotrope waren teils von der Einrichtung, welche der Erfinder (*Gauss*) dieser unschätzbaren Methode ihnen gegeben hat, teils waren sie von einer sehr leicht ausführbaren Konstruktion, welche von Herrn Ingenieur-Geographen *Bertram* herrührt." Die erste Beschreibung und Zeichnung dieses *Bertram*schen Heliotrops findet sich in General *Baeyer*s „Küstenvermessung" S. 52

bis 53 und Tafel III. (Über den Urheber der Erfindung wurde eine Erörterung geführt von *Nagel* bzw. *Baeyer*, „Zeitschr. f. Verm." 1878, S. 34 und von *Bertram* selbst S. 193.)

Wir geben im Nachfolgenden zwei Zeichnungen des *Bertram*schen Heliotrops.


Fig. 8.
*Bertram*sches Heliotrop, ältere Anordnung.
Massstab 1 : 5.



(Karlsr. Sammlung.)

Die Konstruktion des *Bertram*schen Heliotrops beruht auf dem einfachen Grundgedanken, dass ein entfernter Punkt *Z* dann Licht durch einen Spiegel *H* erhält, wenn ein Zwischenpunkt *E*, welcher sich auf der Ziellinie *H Z* befindet, von der Lichtlinie getroffen wird.

In Fig. 8. ist *G G* der Spiegel, welcher, wie immer, so gestellt wird, dass seine Ebene rechtwinklig ist auf der Leuchtebene *S H Z*, wobei *S* die Sonne, *H* die Spiegelmitte und *Z* der entfernte Punkt ist, welcher Licht erhalten soll, und dass die Strahlen *S H* und *H Z* gleiche Winkel mit der Spiegelebene machen.

Der Spiegel *G G* hat in der Mitte ein kleines Loch *H*, welches zwei Zwecken dient, wie wir nachher sehen werden.

Der Holzrahmen *A A*, auf welchem rechts der beschriebene Spiegel drehbar angebracht ist, trägt auf der anderen Seite links, durch Vermittlung der Säule *D*, ein kleines Rohr *E* in gleicher Höhe mit der Spiegelmitte *H*. Im Innern dieses Rohres ist ein Fadenkreuz *E* angebracht, welches in Verbindung mit dem Okularloche *H* des Spiegels als Diopter zum Anzielen eines entfernten Punktes *Z* dient.

Nachdem dieses geschehen ist, wird links am Ende der Röhre *E* eine Klappe *F*, welche vorher geöffnet (in der Lage *F'*) war, vor die Öffnung gebracht, und nun muss der Spiegel *G* so gestellt werden, dass sein Licht auf die Innenseite der genannten Klappe *F* fällt, und genauer noch so, dass die Klappe im allgemeinen hell ist, in der Mitte aber einen dunkeln Fleck zeigt, herrührend von dem *nicht* reflektierenden Loche *H* in der Spiegelmitte.

Das Loch *H* in der Spiegelmitte dient also zwei verschiedenen Zwecken: erstens ist es Okular beim Zielen längs der Geraden *H E*, und zweitens dient es zur Bezeichnung der Licht*mitte*. Die Bewegung des Spiegels wird in horizontalem und vertikalem Sinn bei *K*, *L*, *M*, *N* gehandhabt.

Die zwei Schrauben *C* und *B* dienen zum Centrieren und zum Einstellen nach der Höhe.

Fig. 9.
*Bertram*sches Heliotrop, nach Anordnung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme.
(Massstab 1 : 8.)
(Hannov. Sammlung, Mechaniker *Bamberg*.)

Hilfsspiegel (*G* Fig. 9.).

Wenn die Sonnenstrahlen sehr schief auf einen Heliotropenspiegel auffallen, welcher nach dem entfernten Punkte Licht senden soll, so wird dieses Licht sehr schwach (es ist überhaupt immer nur die Projektion der Spiegelfläche auf eine Ebene rechtwinklig zur Strahlenrichtung als wirksam zu betrachten). In diesem Falle hilft man sich dadurch, dass man das Sonnenlicht zuerst mittelst eines günstig gestellten Hilfsspiegels (*G* Fig. 9.) auffängt und durch dessen Vermittlung dem eigentlichen Heliotropenspiegel zuführt. Dasselbe ist notwendig, wenn der Heliotropenspiegel im Schatten, z. B. im Innern eines Turmes, steht.

Ausser Fig. 8. geben wir noch in Fig. 9. eine Darstellung des *Bertram*schen Heliotropes, in neuerer Anordnung, wie sie zur Zeit bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme im Gebrauch ist. (Fig. 9. ist entlehnt aus dem Bericht über d. wissensch. Instr. auf d. Berliner Gew.-Ausst. 1879, von *Löwenherz*, Berlin 1880, S. 71.)

A Holzrahmen, 52cm lang, 10cm breit,
B Leuchtspiegel, 8,2cm lang, 8,2cm breit,
G Hilfsspiegel (bei ungünstiger Sonnenstellung u. s. w., s. o.),
H Vorsteck-Rahmen für das grüne Glas *h''* (selten gebraucht, vgl. Gitterblenden S. 42),
C Objektivdiopter mit Fadenkreuz *d* und Leuchtröhre *e* (in der Nebenfigur rechts ist *e* aufgeschlagen),
f Axenschraube zum unmittelbaren Centrieren über Holz,
D Leuchtaxe mit Schlüssel *E* zum schärferen Centrieren statt *f* (unterhalb *D* kommt die hier nicht mehr dargestellte „Leuchtschraube").

V. *Das Heliotrop von Reitz.*

Dieses ist im wesentlichen auf dasselbe Prinzip gegründet wie das *Bertram*sche, es wird aber im Gegensatz zu letzterem in Verbindung mit einem Fernrohr gebraucht.

Das Instrument besteht im wesentlichen in einer Verbindung von zwei Spiegeln mit einem Fernrohre. Der grosse Spiegel *A* lässt sich in jede beliebige Lage bringen und reflektiert das Sonnenlicht nach dem entfernten Zielpunkt. Bei *a* ist die Folie des Spiegels *A* abgenommen, der kleine Spiegel *B* ist rechtwinklig zur Fernrohraxe, *b* und *c* sind die Richteschrauben zur Erzielung dieser rechtwinkligen Lage.

In Fig. 11. (s. S. 41) sind die beiden Spiegel *A* und *B* gezeichnet nebst dem

Ring R, welcher durch Vermittlung von 3 Schrauben $S_1\ S_2\ S_3$ zur Befestigung des Apparates an der Objektivfassung eines Fernrohrs dient. Der grosse Spiegel A ist in Fig. 11. parallel der Fernrohraxe gestellt (wie er beim Gebrauch nicht steht).

Fig. 10.
Grundsatz des *Reitz*schen Heliotrops.

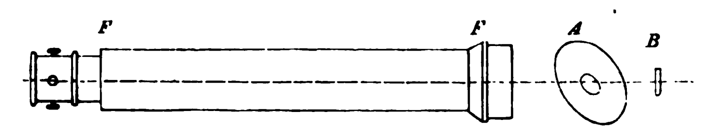
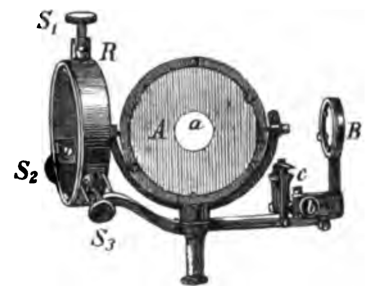


Fig. 11.
Ansicht des *Reitz*schen Heliotrops.



Ein zu Anfang angezielter, also in der Fernrohraxe liegender Punkt erhält Licht von dem grossen Spiegel A, wenn im Fernrohr (nach Vorschieben eines Blendglases) ein Sonnenbild gesehen wird, das durch den kleinen Spiegel B ins Fernrohr zurückgeworfen wird. Die Sonnenstrahlen, welche nach dem entfernten Punkt gesendet werden, machen also den Weg von der Sonne zum grossen Spiegel A, und von da an dem kleinen Spiegel B vorbei zu dem Zielpunkt; ein Teil der Strahlen aber, welche von dem grossen Spiegel A ausgehen, trifft den kleinen Spiegel B, und wird von diesem zurück ins Fernrohr gebracht.

Wenn der Apparat richtig wirken soll, so muss die Ebene des kleinen Spiegels B rechtwinklig zur Fernrohraxe sein. Zur Prüfung und Berichtigung gibt *Reitz* folgendes Verfahren an:

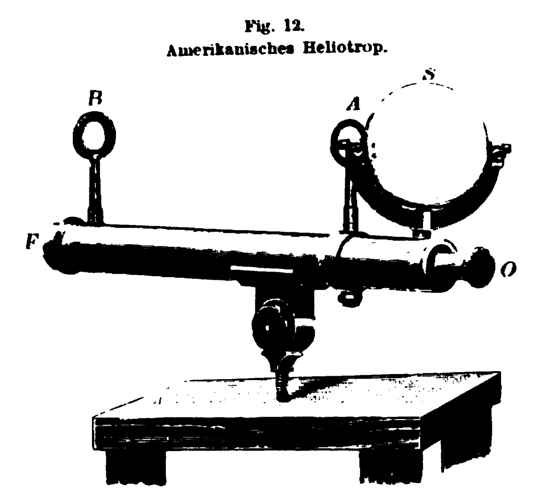
Man richtet das Fernrohr auf einen nahen (etwa 10^m entfernten) Gegenstand, und dreht den grossen Spiegel A so, dass das Sonnenbild sichtbarlich auf denselben Gegenstand fällt. Man stellt dann das Okular auf unendliche Entfernung ein. Sieht man nun, nachdem ein Sonnenglas vorgeschoben, in das Fernrohr, so lässt sich durch Drehung der Richteschrauben b und c das Sonnenbild, welches von B reflektiert wird, in das Gesichtsfeld des Fernrohres bringen. Geschieht dies, so sieht man zugleich im Gesichtsfelde auch das von B reflektierte *Spiegelbild des Fadenkreuzes*, welches nun durch die Schrauben b und c zur Deckung mit dem Fadenkreuz selbst gebracht wird.

Die Thatsache, dass man am Fadenkreuz des Fernrohrs ein Bild dieses Fadenkreuzes selbst wahrnimmt, erklärt sich dadurch, dass bei der Einstellung des Fernrohrs auf Unendlich, die vom Fadenkreuz nach dem Objektiv gehenden Strahlen nach der Brechung parallel austreten, und nach der Reflexion durch den kleinen Spiegel B auf ihrem eigenen Wege wieder zurückkehren. Zugleich wird durch eben diesen kleinen Spiegel B so viel Licht auf das Fadenkreuz geworfen, dass die beschriebene Bilderzeugung überhaupt wahrnehmbar wird.

Ein ähnliches Instrument wurde von *Reitz* beschrieben in d. „Zeitschr. f. Instrumentenkunde", 1881, S. 338—340. In derselben Zeitschrift 1883, S. 265—268 giebt *Reitz* auch die Beschreibung und Zeichnung eines „*Periheliotrops*", welches rings umher zeitweise jedem Punkte des Horizontes einen Blitz reflektierten Sonnenlichtes zusendet.

VI. Amerikanisches Heliotrop.

Fig. 12.
Amerikanisches Heliotrop.



Zum Schluss geben wir noch in Fig. 12. die Zeichnung eines amerikanischen Heliotrops nach der Beschreibung und Zeichnung des Werkes „The final results of the triangulation of the New-York State survey u. s. w. Albany 1887“ S. 127.

Wie Fig. 12. zeigt, besteht das Instrument aus einem Fernrohr OF mit aufgesetztem Spiegel S und 2 Ringen A und B. Der Spiegel soll sein Licht in der Axe der beiden Ringe fortsenden und dabei muss der Schatten des Ringes A den Ring B decken.

Ob das ganze richtig wirkt, wird untersucht durch Leuchten nach einem *nahen* Zielpunkte, indem beobachtet wird, ob der Punkt richtig Licht erhält. Dieses Instrument wird namentlich zu Rekognoszierungen angewendet.

Heliotropen-Telegraphie.

Durch Auf- und Zudecken des Spiegels und Verabredung der Aufeinanderfolge der dadurch erzeugten Lichtblitze wird eine einfache Telegraphie erzielt, welche zur Verständigung zwischen dem Winkelbeobachter und dem Heliotropisten sehr wichtig ist.

Regulierung der Lichtstärke.

Da das Heliotropenlicht unter verschiedenen Umständen *sehr verschieden* stark ist, muss man ein Mittel haben, nach Bedarf das Licht zu verstärken oder namentlich zu schwächen. Die Verstärkung des Lichtes kann durch Anwendung eines grösseren Spiegels oder durch günstigere Stellung eines Hilfsspiegels erzielt werden. Die Verkleinerung des Lichtes machte man früher auch am Heliotrope selbst durch teilweises Decken des Spiegels, oder durch Vorsetzen farbiger Gläser u. s. w. Das hat aber namentlich den Übelstand, dass die Lichtänderung vom Theodolite aus umständlich durch Heliotropen-Telegraphie befohlen werden muss.

In neuerer Zeit ist ein viel einfacheres und besseres Mittel der Lichtschwächung im Gebrauch, welches am Theodolit selbst gehandhabt wird, nämlich das Vorsetzen von *Gitterblenden*, bestehend aus mehreren Lagen eines losen Gewebes, wie Flortuch, Musselin u. s. w. (farbige Gläser dürfen vor dem Theodolit nicht angewendet werden wegen der Gefahr der Lichtablenkung). Professor *Bruns* berichtet hierüber in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“ 1883, S. 308 mit der Bemerkung, dass dieses Mittel schon vor einem halben Jahrhundert in der *astronomischen* Praxis Anwendung gefunden hat.

Dauer der Heliotrop-Lichter.

Die Winkelmessung nach Heliotrop-Lichtern ist nur während eines beschränkten Teiles eines Tages möglich, etwa von 3 Uhr Nachmittags bis Sonnen-Untergang, ausnahmsweise auch unmittelbar nach Sonnen-Aufgang. Vormittags und unmittelbar nach Mittag ist die Messung auf weite Entfernung nicht möglich wegen des Schwirrens und der Unruhe der Bilder.

Da auch in der günstigen Tageszeit noch viele Zeit verloren geht wegen mangelnden Sonnenscheins, so ist die Winkelmessung nach Heliotrop-Licht eine langwierige Arbeit. Nach einer von kompetentester Seite angestellten Vergleichung („Zeitschr. f. Verm.“ 1879, S. 111) ist die mittlere Leistung für 1 Tag und 1 Instrument nur etwa zwischen 12 und 17 Einstellungen (in je zwei Lagen).

Anhang zu § 3.

Nacht-Beobachtungen.

Man ist in neuester Zeit wieder teilweise von der Signalisierung durch Heliotrope zur Anwendung nächtlicher Lampensignale zurückgekommen. Im Generalbericht d. Eur. Gr. f. 1875, S. 144 150 wird von *Perrier* eine „Etude comparative des observations de jour et de nuit“ mitgeteilt, welche den Nacht-Beobachtungen den Vorzug giebt.

Die elektrische Nacht-Signalisierung zwischen Spanien und Algier haben wir bereits auf S. 24—25 erwähnt.

Eine schätzbare Abhandlung: „Die Winkelmessungen bei Tage und bei Nacht“ von *W. Werner* ist in der „Zeitschr. für Instrumentenkunde“ 1883, S. 225—237 erschienen.

§ 5. Anordnung der Winkelmessung.

Die Winkelmessung, das wichtigste Element der Triangulierung, ist in ihrer Anordnung durch zwei wesentlich verschiedene Umstände bedingt, erstens durch die mechanischen und optischen Verhältnisse des Messens selbst, und zweitens durch die Ausgleichung.

In geschichtlicher Beziehung hat sich die Winkelmessung für Triangulierung etwa so entwickelt:

Schon vor der Anwendung des Fernrohrs konnte man an geteilten Kreisen von grossem Halbmesser Winkel auf etwa 1′ genau messen (*Snellius* 1615, vgl. unsere Einleitung S. 4), bald stieg die Genauigkeit so, dass man einzelne Sekunden in Rechnung nahm.

Das im vorigen Jahrhundert von *Tobias Mayer* in Göttingen erfundene und von den Franzosen weiter entwickelte Verfahren der *Repetitions-Messung* mit Nonienablesung galt bis zur Mitte dieses Jahrhunderts im allgemeinen als das beste und die Genauigkeit stieg auf 1″.

Das Wesentlichste über Repetitions-Messung haben wir schon in unserem II. Bande, S. 178—185 und S. 212 mitgeteilt, zugleich sei über die hannoverschen Repetitions-Messungen von *Gauss* verwiesen auf *Gäde*, „Zeitschr. für Verm.“ 1885, S. 121 und 205, sowie *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen“ S. 10—17, und „Zeitschr. f. Verm.“ 1882, S. 431. Über den älteren „cercle répétiteur“, vgl. *Jordan*, Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885, S. 219 und S. 206.

Struve und *Bessel* gingen etwa 1820—1830 zur „*Richtungs-Messung*" über, welche später mit Mikroskop-Ablesung (etwa seit 1840, vgl. Küsten-Vermessung S. 51) weiteste Verbreitung fand. Man nahm möglichst viele Sichten in einen Satz zusammen und wiederholte die Sätze mit verstelltem Limbus. In neuester Zeit ist die reine „Winkelmessung" (mit nur *zwei* Sichten in einem Satze) mit Vorteil angewendet worden.

Nach dieser allgemeinen Übersicht wollen wir einzelne Verhältnisse näher betrachten:

Richtungs-Messungen.

Die Messung von möglichst vollen Sätzen, wie man sie im einzelnen Falle bekommen kann, wurde von *Bessel* bei der Gradmessung in Ostpreussen angewendet und seitdem Jahrzehnte lang fortgesetzt. *Bessel* schreibt (Gr. in Ostpr. S. 69):

„Wenn man immer *alle* auf einem Dreieckspunkt zu beobachtende Richtungen hätte einstellen können, so würde das Resultat aller daselbst gemachten Beobachtungen ganz einfach das Mittel aus allen Ablesungen jeder Richtung gewesen sein. Dieses war aber sehr selten möglich; man musste sich auf die Beobachtung derjenigen Punkte beschränken, welche gerade sichtbar waren und nicht zu unruhig erschienen".

Für die Messungen selbst scheint nun ein solches Anpassen an die Umstände das beste, allein die Ausgleichungen werden dadurch ungemein verwickelt.

Wir können heute davon absehen, dass es mehrerer Jahrzehnte bedurft hat, bis die formelle Theorie der Ausgleichung von Triangulierungen mit solchen unvollständigen Satzbeobachtungen fertig gestellt, und unbestritten anerkannt war (*Bessel*, *Hansen*, *Andrä* u. A. 1834—1870, man vgl. unseren I. Band, § 48—54, und § 78—83., zusammenhängende Entwicklung aller hierher gehörenden Theorien). Aber auch wenn diese Theorien nun vorliegen und die ganze Ziffernmenge mit den Coëfficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. berechnet ist, ist sie doch in sich kaum konsequent zu nennen, weil die mittleren Fehler *nach* der Ausgleichung immer grösser ausfallen, als *vor* der Ausgleichung. Eine solche Triangulierungs-Berechnung bietet für jede Weiterverwertung eine starre und unerfreuliche Masse, einem Bauwerke vergleichbar, das zwar nicht einstürzt, aber durch zahllose planlos zusammen gebrachte Streben gehalten wird.

Null-Marke.

Um die vorerwähnten Richtungs-Messungen etwas geschmeidiger und von zufälligen Umständen unabhängiger zu machen, hat man in jeden Satz einen naheliegenden Zielpunkt, welcher gar nicht zu der Triangulierung selbst gehört, aufgenommen.

Über dieses Mittel wurde zuerst von *Struve* (Astr. Nachr. 2. Band, 1824, S. 435) berichtet. Die Nullpunktsmarke wurde von *Struve* in 500 bis 1000^m Entfernung gesetzt; sie bestand aus einem vertikalen Rechteck von 10″ Breite und 20″ Höhe mit weisser Farbe auf schwarzem Grunde angelegt; da der Vertikalfaden des Fernrohrs 6″ deckte, so blieb links und rechts von dem Rechteck ein Streifen von 2″ Breite übrig.

Die ausgedehnteste Anwendung fand dieses Mittel der Nullmarke bei den Triangulierungen des geodätischen Instituts, etwa 1870—1880, namentlich bei dem „Rheinischen Dreiecksnetz"; es hat aber ein kompetenter Beurteiler hieraus gefunden, „dass die Beobachtungen der Nullmarke auf den Stationen des rheinischen Dreiecksnetzes

erheblich schlechter sind, als die der übrigen Objekte. („Zeitschr. für Verm." 1879, S. 149).

Ein Teil dieser Nullmarkenfehler mag jedenfalls darin liegen, dass die Nullmarken nicht immer in genügend gleicher Höhe mit dem Theodolit angebracht werden konnten; wenn indessen eine Nullmarke unter einem starken Neigungswinkel erscheint, so sollte man den Horizontal-Axenfehler (*i tang h* Band II, S. 163) hiefür in Rechnung bringen. Wir glauben, dass man damit, und mit Beschränkung auf je einen oder zwei Zielpunkte ausser der Nullmarke in jedem Satze, vorteilhaft messen könnte.

Winkelmessungen in allen Kombinationen.

Dieses Mittel, welches schon von *Gauss* und *Gerling* als Ideal gepriesen wurde, ist von General *Schreiber* etwa seit 1871 angewendet worden und bildet jetzt den Grundton der Haupttriangulierungen der Landesaufnahme.

Die Theorie hiezu haben wir bereits in unserem I. Bande § 82. behandelt, und über die Entstehung und Vergleichung mit dem früheren Verfahren geben 2 Abhandlungen Auskunft:

Schreiber: Über die Anordnung von Horizontalwinkel-Beobachtung auf der Station, „Zeitschr. f. Verm." 1878, S. 209—237.

Schreiber: Richtungs-Beobachtungen und Winkel-Beobachtungen, „Zeitschr. für Verm." 1879, S. 97 149.

Ferner das amtliche Werk: „Die königl. preussische Landesaufnahme", II. Teil, Berlin 1873, zweite Abteilung, S. 303—313 und Bearbeitung *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen, S. 88—94.

Hiernach sind die Vorteile doppelt: Erstens werden die Messungen selbst so genau als möglich, durch Beschränkung auf kürzeste Dauer (nur *zwei* Zielpunkte) des einzelnen Satzes; zweitens aber werden dadurch alle Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. gleich *Null*, und die Netzausgleichung, welche bei unvollständigen zerstreuten Sätzen eine unerfreuliche starre Masse bildet, wird nun, bei Wahrung aller formellen Strenge, so übersichtlich und geschmeidig, wie wenn man es mit unabhängigen Richtungs-Messungen zu thun hätte (vgl. hiezu auch unseren späteren § 21.).

§ 6. Schraubenfehler und Teilungsfehler.

Nachdem das Wichtigste über das Schrauben-Mikroskop schon in unserem II. Bande § 49. und § 68. mitgeteilt ist, d. h. alles das, was man unbedingt wissen muss, um mit einem Mikroskop-Theodolit messen zu können, wollen wir nun noch einige feinere Untersuchungen vornehmen.

Man hat zu fragen, ob die Schrauben der Mikroskope durchaus gleichförmige Verschiebungen der Fäden erzeugen, oder im einzelnen:

1) ob die verschiedenen Schraubengänge alle gleich sind (fortschreitende Fehler),

2) ob in der einzelnen Umdrehung die Drehungswinkel den Fadenverschiebungen proportional sind (periodische Fehler).

Die erste Frage, fortschreitende Fehler betreffend, kann man dadurch beantworten, dass man ein und denselben Teilwert des Kreises an verschiedenen Stellen der Schraube misst. Die Untersuchung wird bei den wenigen Umdrehungen, welche

bei Theodolit-Mikroskopen gewöhnlich nur gebraucht werden, selten merkliche Fehler ergeben, und ist jedenfalls nicht schwierig. (Eine sehr feine Untersuchung dieser Art findet man in „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, Tome V, Paris 1886, S. 47—60, erreurs progressives d'une vis micrométrique.)

Dagegen sind die *periodischen Fehler*, welche von unsicherer Führung der Schrauben u. s. w. herrühren, oft bedeutend und müssen stets untersucht werden.

Man braucht dazu ein Intervall, welches *nicht* einer ganzen Umdrehung oder einem Vielfachen einer Umdrehung entspricht, sondern am besten einen runden Bruchteil, z. B. ein Viertel, ein Fünftel oder dergl. einer Umdrehung giebt.

Die Theodolitkreise haben meist keine Teilstriche für solche Zwecke, und es wäre zu wünschen, dass die Mechaniker bei Herstellung der Teilungen darauf Rücksicht nähmen, indem an irgend welcher Stelle einige Hilfsstriche in Abständen von 1′, 2′, 3′, 4′ u. s. w. angebracht würden.

Statt eines Hilfs*striches* auf der Teilung kann man auch einen Hilfs*faden* (bzw. Doppelfaden) im Gesichtsfelde des Mikroskopes anwenden, indem dann der Haupt Faden und der Hilfs-Faden (bzw. die beiden Faden-Mitten) nacheinander auf denselben Strich der Teilung eingestellt werden.

Manchmal kann man auch irgend ein nicht zur Teilung selbst gehöriges Zeichen auf dem Teilkreise als Hilfsstrich benützen; z. B. giebt *Reinhertz* in der „Zeitschr. f. Vermessungswesen", 1887, S. 549, an, dass er den Mittelstrich der Ziffer 1 als Hilfsstrich genommen habe. Ähnlich haben wir bei dem nachfolgenden Beispiel die Ziffer 2 benützt, welche im Gesichtsfeld erschien, indem auf das rechts unten an 2 befindliche vertikale Abstossstrichchen eingestellt wurde.

Der Abstand dieses Hilfsstriches von dem nächsten Teilstriche war rund $i = 1'$, und die Mikroskop-Trommel hat 5′ auf einer Umdrehung. Nun wurde das Hilfsintervall i auf der Schraube 5 mal gemessen, indem nach jeder Messung die Alhidade wieder um i zurückgedreht wurde. Das ganze wurde mehrfach hin und zurück wiederholt, doch geben wir hier nur die *Mittel*zahlen s mit ihren Differenzen i, woran sich auch die leichtverständliche Berechnung anschliesst.

Schrauben-ablesungen s	Differenzen i	Verbesserungen $i_0 - i = v$	Δs	Schrauben-ablesung rund s	
0′ 0,00″			0,00″	0′	
	1′ 6,15″	— 1,06″			
1′ 6,15″			— 1,06″	1′	
	1′ 8,75″	— 3,66″			
2′ 14,90″			— 4,72″	2′	
	1′ 3,95″	+ 1,14″			(1)
3′ 18,85″			— 3,58″	3′	
	1′ 3,75″	+ 1,34″			
4′ 22,60″			— 2,24″	4′	
	1′ 2,85″	+ 2,24″			
5′ 25,45″	———	———	0,00″	5′	
Mittel	i_0 = 1′ 5,09″	0,00″			

Die Trommelteilung geht von 10″ zu 10″, einzelne Sekunden werden geschätzt. (*Doppel*sekunden sind nicht angewendet), die Dezimalen bis auf 0,05″ bei den Ablesungen s sind nur durch Wiederholungen und Mittelbildung entstanden. Das Mittel

i_0 nehmen wir nun als richtig an (obgleich $s = 5' 25''$ statt $5' 0''$ am Schlusse ab gelesen ist), berechnen die Differenzen $i_0 - i = v$, deren Summe $= 0$ sein muss, und dann die Verbesserungen $\varDelta s$ als Summen der v, indem das erste $s = 0{,}00''$ gesetzt wird, dann $0{,}00 - 1{,}06 = 1{,}06$, $1{,}06 - 3{,}36 = 4{,}72$ u. s. w.

Nach dem Ergebnis dieser Untersuchung ist also jede Schrauben-Ablesung in der Gegend von 2′ um 4,7″ zu vermindern u. s. w.

Wenn die Verbesserungen $\varDelta s$ so gross werden, wie in diesem Beispiel, so ist es bedenklich, sie zu vernachlässigen; eine Korrektions-Tabelle anzulegen und alle Ablesungen darnach zu verbessern, wäre sehr mühsam, vielleicht kann man den Grund der Ungleichheit in der mechanischen Lagerung der Schraube u. s. w. finden und verbessern, oder man muss schlechte Schrauben entfernen und durch bessere ersetzen lassen.

Es ist hier zu zitieren:

Westphal, Übersicht über die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen von Mikrometer-Schrauben, „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“, 1881. S. 149, 229, 250, 397.

Einige Beispiele und Fingerzeige hiefür giebt auch die erwähnte Abhandlung von *Reinherz* in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1887, S. 545—553, aus welcher wir noch einen weiteren sehr praktischen Vorschlag entnehmen, nämlich, die periodischen Schraubenfehler durch planmässige Anwendung *verschiedener Trommelstellungen* zu eliminieren, was gleichzeitig mit der Verteilung der Richtungen auf verschiedene Kreislagen geschehen kann.

Wir wollen beispielshalber annehmen, man wolle mit unserem Instrumente, dessen Trommel $5' = 300''$ Umdrehung hat, eine Richtungs-Messung in 8 Kreislagen machen; dann muss man nach jedem Satze die Trommelstellung um $300'' : 8 = 37{,}5''$ ändern, oder man bekommt für die 8 Kreislagen folgende Anfangs-Ablesungen:

1.	0° 0′ 0″	5.	90° 2′ 30″	
2.	22° 30′ 38″	6.	112° 33′ 8″	(2)
3.	45° 1′ 15″	7.	135° 3′ 45″	
4.	67° 31′ 52″	8.	157° 34′ 22″	

Stellt man diese Anfangs-Ablesungen ein, so werden auch alle anderen Ablesungen je um 37,5″ verschoben, und damit die periodischen Schraubenfehler mit derselben Wahrscheinlichkeit eliminiert, wie man das bei den Kreisteilungs-Fehlern durch die planmässigen Kreisverstellungen erwartet.

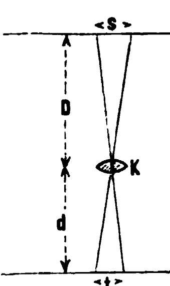
Ausgleichung der periodischen Schraubenfehler.

Bei unserem vorstehenden Beispiele ist die ganze Berechnung in der kleinen Tabelle (1) enthalten, und man kann nötigenfalls die erhaltenen $\varDelta s$ auch noch graphisch ausgleichen.

Jedenfalls bietet aber auch die rechnerische Ausgleichung (welche in dieser Form von *Bessel* eingeführt wurde) viele Vorteile; wir wollen eine solche als Beispiel hier vornehmen. Dieses Beispiel bezieht sich nicht auf einen Theodolit, sondern auf den *Repsold*schen Komparator der K. Normal-Aichungs-Kommission, und wurde von uns im April 1881 bei Gelegenheit der Messungen erhalten, die wir später in § 9. weiter vorführen werden.

Dieses Beispiel kann indessen auch die Schraubenfehler-Ausgleichung für *Theodolit*-Messungen veranschaulichen.

Fig. 1.
Schrauben-Mikroskop.



In Fig. 1. soll t das Intervall einer Teilung bedeuten, welche durch ein Schrauben-Mikroskop gemessen wird. K sei der optische Mittelpunkt des Mikroskop-Objektives, und s sei der Schraubenwert, den man durch Einstellen auf den linken und rechten Strich des Intervalls t findet.

Hat die Schraube keine Fehler, so wird man immer *denselben* Wert s erhalten, welche Teile der Schraube auch benützt werden (abgesehen von den unregelmässigen Einstellfehlern), wenn dagegen die Schraube selbst Fehler enthält, so werden die Werte s verschieden ausfallen.

Wir bezeichnen allgemein eine Schrauben-Ablesung mit S und wir nehmen an, die zu S gehörige Schrauben Verbesserung lasse sich durch folgende Gleichung darstellen:

$$\Delta S = \varphi(S) = r \sin(A + S) = r \sin A \cos S + r \cos A \sin S \tag{3}$$

Setzt man hier $r \sin A = \alpha$ und $r \cos A = \beta$

$$\text{oder } tang\, A = \frac{\alpha}{\beta} \quad , \quad r = \frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\cos A} \tag{4}$$

so kann man (3) auch in diese Form schreiben:

$$\Delta S = \varphi(S) = \alpha \cos S + \beta \sin S \tag{5}$$

Zur Bestimmung der Konstanten α und β wird nun die Messung von t, entsprechend Fig. 1., an verschiedenen Stellen der Schraube vorgenommen, so dass verschiedene Werte s entstehen.

Wenn S die Anfangsstellung einer solchen Messung, folglich $S + s$ die Endstellung ist, so hat man für die Anfangsstellung die Gleichung (5) und für die Endstellung die zugehörige Gleichung:

$$\varphi(S + s) = \alpha \cos(S + s) + \beta \sin(S + s) \tag{6}$$

Wenn man aus (5) und (6) die Differenz bildet, so erhält man:

$$\varphi(S+s) - \varphi(S) = -2\alpha \sin\left(S + \frac{s}{2}\right) \sin\frac{s}{2} + 2\beta \cos\left(S + \frac{s}{2}\right) \sin\frac{s}{2}$$

$$\text{Wir setzen:} \qquad -2\alpha \sin\frac{s}{2} = x \quad , \quad +2\beta \sin\frac{s}{2} = y \tag{7}$$

$$\text{und} \quad S + \frac{s}{2} = \sigma \tag{8}$$

folglich ist die Verbesserung für den Schraubenwert s:

$$\varphi(S + s) - \varphi(S) = x \sin\sigma + y \cos\sigma \tag{9}$$

Es sollen 4 symmetrisch gelegene Beobachtungen von s gemacht werden mit den Ergebnissen s_1, s_2, s_3, s_4 und wir setzen:

$$\frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{4} = s_0 \tag{10}$$

Dieses ist auch, wie wir nachher sehen werden, der wahrscheinlichste Wert von s überhaupt, indessen wollen wir vorläufig (um die Zahl der Unbekannten sicher zu stellen) den wahrscheinlichsten Wert $= s_0 + \xi$ setzen, und haben daher durch Vergleichung mit (9), nun die Fehlergleichung:

$$v = (s + x \sin\sigma + y \cos\sigma) - (s_0 + \xi)$$

Wir setzen wie gewöhnlich $s_0 - s = l$ und haben dann in 4facher Anwendung:

$$\left.\begin{aligned} -v_1 &= \xi - x \sin \sigma_1 - y \cos \sigma_1 + l_1 \\ -v_2 &= \xi - x \sin \sigma_2 - y \cos \sigma_2 + l_2 \\ -v_3 &= \xi - x \sin \sigma_3 - y \cos \sigma_3 + l_3 \\ -v_4 &= \xi - x \sin \sigma_4 - y \cos \sigma_4 + l_4 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Wenn nun aber die 4 Beobachtungen symmetrisch liegen, d. h. wenn die 4 Werte σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 nach (8) je um 90° gegen einander verschoben sind, so wird die Ausgleichung dieser 4 Fehlergleichungen sehr einfach, wie wir schon an einem ähnlichen Beispiel in Band II. § 56. gesehen haben, die Ausgleichung des Systems (11) giebt nämlich in diesem Falle:

$$\xi = 0 \qquad x = \frac{[l \sin \sigma]}{2} \qquad y = \frac{[l \cos \sigma]}{2} \quad (12)$$

und die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler wird:

$$[v\,v] = [l\,l] - \frac{[l \sin \sigma]^2}{2} - \frac{[l \cos \sigma]^2}{2} \quad (13)$$

Rechnet man ausserdem die einzelnen v und v^2 aus, so erhält man in ihrer Summe eine Rechenprobe.

Der mittlere Fehler einer Bestimmung von s wird, weil 3 Unbekannte ξ, x, y vorhanden sind:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{4-3}} = \sqrt{[v\,v]} \quad (14)$$

Aus x und y kann man nach (12) und (7) auch α und β herstellen, nämlich:

$$\alpha = -\frac{[l \sin \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2}} \qquad \beta = +\frac{[l \cos \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2}} \quad (15)$$

und nach (4) kann man auch die ursprünglichen Unbekannten A und r wieder herstellen:

$$\operatorname{tang} A = \frac{-[l \sin \sigma]}{+[l \cos \sigma]}\ , \quad r = \frac{-[l \sin \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2} \sin A} = \frac{+[l \cos \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2} \cos A} \quad (16)$$

Bei unseren Messungen am *Repsold*schen Komparator (Mikroskop I. rechts, mit 25facher Vergrösserung) war ungefähr $s = 4{,}6239$ Umdrehungen, (und zwar herrührend von der Beobachtung eines Intervalls = 0,2 Pariser Linien = 0,4511658^{mm}, also 1 Umdrehung = 97,57$^{\mu}$ oder rund 1 Umdrehung = 0,1^{mm} = 100$^{\mu}$).

Da jedoch hier die *ganzen* Umdrehungen nicht in Betracht kommen, rechnen wir mit dem Wert $s = 0{,}6239$ Umdrehungen oder:

$$s = 0{,}6239 \text{ Umdrehungen} = 0{,}6239 \times 360° = 224° \, 36' \quad (17)$$

Es wurde immer mit 0,00 angefangen, folglich sind nun die Werte σ:

$$\sigma_1 = \frac{s}{2} = 112° \, 18' \qquad \sigma_2 = \frac{s}{2} + 90° = 202° \, 18'$$

$$\sigma_3 = \frac{s}{2} + 180° = 292° \, 18' \qquad \sigma_4 = \frac{s}{2} + 270° = 22° \, 18'$$

Ein Messungsversuch am Mikroskop I. (rechts) gab folgendes:

1)	$s_1 = 0{,}6254$	$l_1 = -15$	$l_1^2 = 225$	
	$s_2 = 0{,}6311$	$l_2 = -72$	$l_2^2 = 5184$	
	$s_3 = 0{,}6232$	$l_3 = +7$	$l_3^2 = 49$	
	$s_4 = 0{,}6158$	$l_4 = +81$	$l_4^2 = 6561$	
Mittel	$s_0 = 0{,}6239$	$[l] = +1$	$[l\,l] = 12019$	(18)
		soll = 0		

Da $s = 1$ rund $= 100^\mu$, also s_1 nahezu $= 62{,}54^\mu$ ist, sind die l hier rund in Einheiten von 100^μ oder $0{,}1^{mm}$ gezählt, oder rund $l_1 = 0{,}15^\mu$.

Nun rechnet man:

nach (12):	$x = + 18{,}85$	$y = + 74{,}955$	(12*)
nach (13):	$[v\,v] = 12\,019 - 710{,}6 - 11236{,}5 = 71{,}9$		(13*)
nach (15):	$\alpha = - 10{,}187$	$\beta = + 40{,}507$	(14*)
nach (16):	$A = 345^\circ\,53'$	$r = 41{,}768$	(16*)

Man hat also nun nach (3) die Korrektionsformel:

$$\Delta S = 41{,}768 \sin (345^\circ\,53' + S) \tag{19}$$

Wenn man hier für S die 4 Anfangswerte 0°, 90°, 180°, 270° und dann die 4 Endwerte $s = 224^\circ\,36'$, $90^\circ + s$, $180^\circ + s$, $270^\circ + s$ einsetzt, so bekommt man:

für die Anfangswerte	− 10,2	+ 40,5	+ 10,2	− 40,5	(20)
„ „ Endwerte	− 21,2	− 36,0	+ 21,2	+ 36,0	
Differenzen ΔS:	− 11,0	− 76,5	+ 11,0	+ 76,5	
Beobachtungen (18), l:	− 15	− 72	+ 7	+ 81	
übrig bleibende Fehler v:	+ 4,0	− 4,5	+ 4,0	− 4,5	

Die Quadratsumme dieser 4 Werte ist $[v\,v] = 72{,}5$, was mit (13*) hinreichend stimmt. Nach dieser Bestätigung rechnen wir den mittleren Fehler einer Messung nach (14):

$$m = \sqrt{72{,}5} = \pm 8{,}5 \text{ (nahezu } = 0{,}085^\mu) \tag{21}$$

Nach der Formel (19) kann man nun eine Korrektionstafel für das betreffende Mikroskop berechnen, deren 4 Hauptwerte schon in (20) enthalten sind. Indessen reduziert man nun alles auf den Anfang, da es sich doch immer nur um Schrauben-*Differenzen* handelt. So bekommt man (Mikroskop I, rechts):

Schrauben-Ablesungen	Verbesserung nach (20)	Verbesserung reduziert	
0,0000·0	− 10·2	0·0	
0,2500·0	+ 40·5	+ 50·7	(22)
0,5000·0	+ 10·2	+ 20·4	
0,7500·0	− 40·5	− 30·3	
1,0000·0	− 10·2	0·0	

In gleicher Weise wurde auch das andere Mikroskop behandelt und dann für beide Mikroskope ausführliche Korrektionstafeln berechnet. Die später in § 9. mitzuteilenden Mikroskop-Ablesungen sind nach diesen Reduktions-Tabellen reduziert.

Ein sehr feines Beispiel solcher Bestimmung und Ausgleichung periodischer Schraubenfehler ist mitgeteilt in dem Werke: „travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, tome II, Paris 1883, Seite C 104—C 118". Es wurden drei Hilfsstriche I, II, III in Abständen von 20^μ und zwei Fäden 1 und 2 im Abstande von 30^μ angewendet. Damit wurde gemessen:

1) Faden-Abstand 1—2 = 30^μ an einem beliebigen Strich,
2) Strich-Abstand I—II = 20^μ mit demselben Faden,
3) „ „ II—III = 20^μ „ „ „
4) „ „ I—III = 40^μ „ „ „

Alles dieses wurde in den verschiedensten Trommelstellungen sehr oft wiederholt.

Kreisteilungsfehler.

Zu den kurzen Angaben über Teilungsfehler diametraler Striche und Bestimmung von Teilungsfehlern durch Repetition, die schon in unserem II. Bande, § 57. enthalten sind, können wir hier noch einiges weiteres, was hierüber veröffentlicht worden ist, berichten:

General *Schreiber* hat in der Abhandlung „Richtungs-Beobachtungen und Winkelbeobachtungen" („Zeitschr. f. Verm." 1879, S. 118 u. ff.) Teilungs-Untersuchungen mitgeteilt. Er sagt:

Nach den Erfahrungen, die sich auf die Untersuchung verschiedener aus unseren ersten Werkstätten hervorgegangener Teilungen stützen, ist *der unregelmässige Teilungsfehler ein sehr bedeutender Teil des Gesamtfehlers einer unter günstigen Beobachtungen gemachten Beobachtung.* Es fand sich im Mittel aus 16 Instrumenten der Firmen *Pistor* und *Martins*, *Repsold u. Söhne*, *J. Wanschaff*, *C. Bamberg* folgendes:

Mittlerer Gesamtfehler einer beobachteten Richtung . . . . $\tau = \pm 0{,}78''$
Mittlerer unregelmässiger Teilungsfehler einer beobachteten Richtung $\tau' = \pm 0{,}50''$

Diese Werte sind aus wirklichen trigonometrischen Gebrauchsmessungen berechnet, und der regelmässige Teil des Teilungsfehlers ist durch einen 8gliedrigen periodischen Ausdruck von τ' abgesondert worden („Z. f. V." 1879, S. 120).

Ferner ist von General *Schreiber* hier zu zitieren: „Untersuchung von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen" („Zeitschrift für Instrumentenkunde", 1886, S. 1—5, S. 47—55, S. 93—104.

Die Untersuchungen sind angestellt mit einem Instrument, welches 1879 besonders zu diesem Zwecke von *J. Wanschaff* konstruiert wurde, dasselbe ist beschrieben und abgebildet in dem „Berichte über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbe-Ausstellung im Jahre 1879", herausgegeben von *Löwenherz*, 1880, S. 74 bis 76, und in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde" 1881, S. 67, wornach unsere Fig. 2. (s. S. 52) als Kopie gemacht wurde.

Das Instrument hat unten einen unbeweglichen Kreis A und damit fest verbunden eine Schiene SS mit zwei Mikroskopen M_1 und M_2.

Eine zweite Schiene TT mit zwei Mikroskopen M_3 und M_4 ist drehbar gegen den Unterlagskreis A, so dass die Schienen SS und TT unter jedem Winkel gegen einander gestellt werden können.

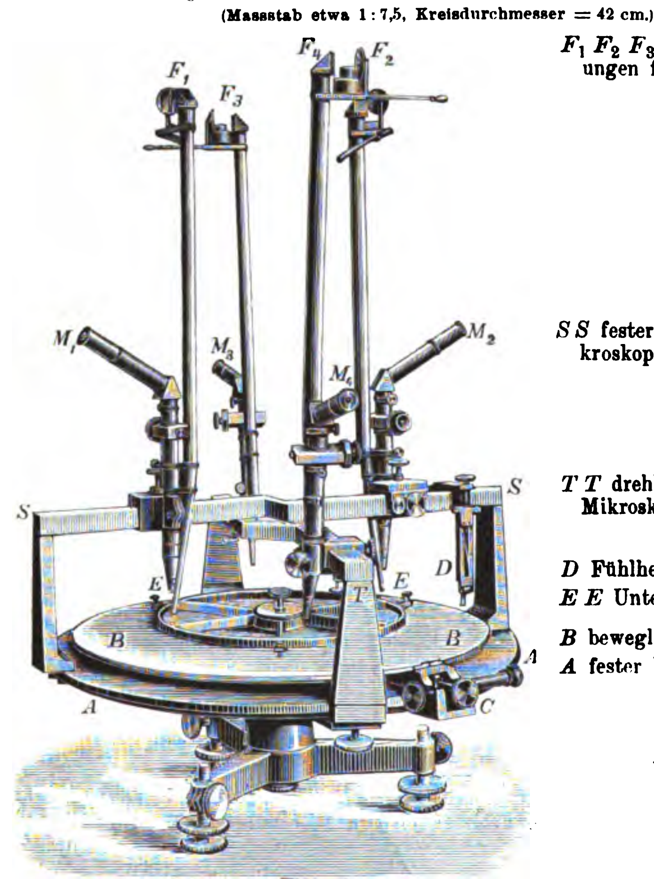
Auf den beweglichen Kreis B kann ein zu untersuchender Teilkreis mit den Unterlagsschrauben FF aufgeschraubt werden, und ob der Kreis sich dann beim Umdrehen von B richtig in einer *Ebene* dreht, kann mit dem Fühlhebel D untersucht werden.

Die 4 Mikroskope $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$ werden nicht mit Tageslicht, sondern mit künstlicher Lampenbeleuchtung $F_1\,F_2\,F_3\,F_4$ abgelesen.

Noch eine Eigentümlichkeit ist zu erwähnen: Man kann zwar die zwei Schienen SS und TT, und damit auch die Mikroskop-Ebenen $M_1\,M_2$ und $M_3\,M_4$ beliebig gegen einander drehen, doch wäre es nicht möglich, den Winkel zwischen $M_1\,M_2$ und $M_3\,M_4$ auch $=$ *Null* zu machen, wegen der Dicke der Mikroskope, wenn nicht besondere Vorsorge getroffen wäre, darin bestehend, dass zwar die Mikroskope M_1 und M_2 rechtwinklig zur Kreisebene B gerichtet sind, die beiden anderen Mikroskope M_3

und M_4 aber ein wenig *schief* gestellt werden können, so dass man z. B. mit M_1 und M_3 *denselben* Strich einer Kreisteilung einstellen kann.

Fig. 2.
Kreisteilungs-Untersucher
nach Angabe von General *Schreiber* konstruiert von Mechaniker *Wanschaff*.
(Massstab etwa 1 : 7,5, Kreisdurchmesser = 42 cm.)



F_1 F_2 F_3 F_4 Lampenbeleuchtungen für die Mikroskope.

S S fester Rahmen mit den Mikroskopen M_1 und M_2.

T T drehbarer Rahmen mit den Mikroskopen M_3 und M_4.

D Fühlhebel
E E Unterlagsschrauben.
B beweglicher Kreis,
A fester Kreis.

Eine ähnliche Anordnung mit Messungsreihen seit 1872, hat vor kurzem *Nagel* veröffentlicht in der Zeitschrift „Civilingenieur", 33. Band, 1887, 8. Heft. Es ist an einem *Repsold*schen Theodolit mit gewöhnlichen Mikroskopen, noch ein beweglicher *Hilfs-Arm* mit zwei diametralen Mikroskopen angebracht, der in den Stellungen $E = 90°$, $E = 150°$, $E = 135°$, $E = 140°$ gegen den Haupt-Arm zur Teilungs-Untersuchung benützt wurde. Es fand sich z. B.:

Ablesung	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
Teilungsfehler	0,00″	— 1,41″	— 0,29″	+ 0,08″	+ 0,95″	+ 1,00″	0,00″

Der mittlere Fehler eines bestimmten Teilungs-Fehlers ist nur = ± 0,07″.

Änderung von Teilstrichen. Bei dieser Gelegenheit mag auch erwähnt werden, dass man bei den feinsten metronomischen Untersuchungen an Strichmassen Andeutungen gefunden hat, dass die Teilstriche sich mit der Zeit *ändern.* Diese zunächst unglaublich klingende Behauptung kann aber wohl begründet sein, denn die Striche, welche in poliertes Metall gerissen werden, erzeugen in der gleichförmigen molekularen Struktur des Metalls gewissermassen Wunden, welche kleine molekulare Änderungen als Nachwirkung hervorbringen können. Es kommt dabei auch darauf an, ob und wie weit die Risse geglättet („ebarbiert") werden. Die optische Strichmitte, auf welche man die Fäden einstellt, ist nun jedenfalls abhängig von der Beschaffenheit der Strichränder, und wenn hier kleine Änderungen durch allmähliche Ausgleichung molekularer Spannungen eintreten, so kann die Strichmitte für mikroskopisches Ablesen sich ändern.

§ 7. Normal-Masse.

Ein *Massstab* ist ein Werkzeug zur Ausführung von Längenmessungen. Ein Massstab, welcher diesem Zwecke nicht unmittelbar dient, sondern mittelbar dadurch, dass andere Massstäbe nach ihm reguliert werden, heisst ein *Normal*-Massstab.

Ein Massstab an und für sich genügt noch nicht zur Festsetzung eines Masses, weil der Stab bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Länge hat, es muss deswegen noch angegeben werden, bei welcher Temperatur der Massstab die normale Länge hat, und damit der Massstab auch bei anderen Temperaturen brauchbar ist, muss die Ausdehnung bekannt sein.

Die Normal-Temperatur ist bei verschiedenen Massen verschieden; insbesondere haben wir:

beim Metermass	Normal-Temperatur		$= 0° C = 0° R$,
beim alten Pariser Mass	„		$= 13° R = 16{,}25° C$,
beim englischen Mass	„	$= 62° F$	$16{,}67° C = 13{,}33° R$.

Der Ausdehnungs-Coëfficient.

Wenn ein metrischer Stab bei der Temperatur 0° die Länge L_0 hat und bei der Temperatur $t°$ die Länge L_t, so setzt man eine Gleichung fest von der Form:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t) \tag{1}$$

und man nennt α den Ausdehnungs-Coëfficienten des Stabes.

Dieses ist die gewöhnliche Annahme, und wenn für alle Gebrauchs-Temperaturen t, der Coëfficient α denselben Wert hat, so ist hiezu nichts weiteres zu bemerken. Für die feineren Untersuchungen ist aber die Annahme eines *konstanten* α nicht mehr genügend, und man nimmt dann statt (1) eine quadratische Funktion:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t + 2 \beta t^2) \text{ oder } L_t = L_0 (1 + (\alpha + 2 \beta t) t) \tag{2}$$

Um in solchen Fällen eine unzweideutige Definition zu haben, zitieren wir nach dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures", Tome II, Seite C. 30 und Tome III, Seite C. 19 folgendes:

Man nennt in Bezug auf die vorstehende Gleichung (2):

$\alpha + 2 \beta t$ wahrer Ausdehnungs-Coëfficient bei $t°$

$\alpha + \beta t$ mittlerer Ausdehnungs-Coëfficient von 0° bis $t°$.

Als Beispiel nehmen wir aus: „travaux et mémoires" III, Seite C. 19 für einen Platin-Iridium-Stab, der an und für sich mit I_2 bezeichnet wurde:

$$\alpha = 0{,}000\,008\,594\,6 \qquad \beta = 0{,}000\,000\,001\,26$$
$$\pm \qquad 13\,5 \qquad \pm \qquad 56$$

es ist also der mittlere Ausdehnungs-Coëfficient von 0° bis $t°$:

Stab I_2: $$\alpha_{(t)} = 10^{-9}(8\,594{,}6 + 1{,}26\,t) \tag{3}$$

und der wahre Ausdehnungs-Coëfficient bei $t°$:

Stab I_2: $$\alpha_t = 10^{-9}(8\,594{,}6 + 2{,}52\,t) \tag{4}$$

Bei weniger scharfen Messungen lässt man das zweite Glied (mit β) fort, und redet dann von dem Ausdehnungs-Coëfficienten α schlechthin, doch muss man denselben für jeden Stab besonders bestimmen, weil verschiedene Stäbe aus demselben Metall oder derselben Legierung doch nicht genau gleiche Ausdehnungen haben, z. B. hat ein anderer in „travaux et mémoires" III. Seite C. 43 erwähnter Platin-Iridium-Stab, der mit I bezeichnet ist, statt des obigen (3) den Wert:

$$\alpha_{(t)} = 10^{-9}(8\,602{,}9 + 2{,}09\,t).$$

Da man aber durchaus nicht immer in der Lage ist, Ausdehnungs-Coëfficienten zu bestimmen, nimmt man für viele Zwecke die *Mittelwerte*, welche bereits bestimmt worden sind. Namentlich ist es wichtig, Ausdehnungs-Coëfficienten, die einmal angenommen sind, in demselben Falle unverändert beizubehalten, damit wenigstens die *Differenzen* von Ausdehnungen in der Rechnung richtig bleiben.

Die Kaiserl. Normal-Aichungs-Kommission hat in den metronomischen Beiträgen Nr. 1, herausgegeben von *Förster*, Berlin 1870, Seite 17, folgende Werte angenommen:

Kupfer	Ausdehnungs-Coëfficient	α = 0,000 017 17	(5)
Messing	„ „	0,000 018 86	
Zinn	„ „	0,000 024 83	
Eisen	„ „	0,000 011 26	

Aus den „travaux et mémoires", III. Seite C. 43—C. 44 entnehmen wir folgende Mittelwerte:

Platin-Iridium	Ausdehnungs-Coëfficient	α = 0,000 008 573	(6)
Platin	„ „	0,000 008 898	
Silber	„ „	0,000 018 340	
Eisen	„ „	0,000 011 063	
Stahl	„ „	0,000 010 420	
Glas	„ „	0,000 008 392	

Einige andere zuweilen in Frage kommende Mittelwerte sind:

Blei	Ausdehnungs-Coëfficient	α = 0,000 028	(7)
Bronce	„ „	0,000 018	
Gold	„ „	0,000 014	
Guss-Eisen	„ „	0,000 011	
Zink	„ „	0,000 033	
Tannenholz	„ „	0,000 004	

Über die „Ausdehnungs-Coëfficienten verschiedener Eisen- und Stahlsorten" giebt Prof. *Abt* in Klausenburg eine Mitteilung in der „Centralzeitung für Mechanik und Optik", 1880, S. 141—142, 22 Angaben für sehniges Puddeleisen, Puddelstahl und

Bessemerstahl, geschmiedet, gewalzt, gehärtet und ungehärtet; die Ausdehnungs-Coëfficienten schwanken zwischen 0,000 010 03 und 0,000 011 29.

Endmasse und Strichmasse.

Die Längenmasse werden in zwei wesentlich verschiedene Gattungen eingeteilt, die man *Endmasse* und *Strichmasse* nennt.

Ein Endmass bestimmt eine Länge als äussersten Abstand seiner Teile in der Axrichtung.

Ein Strichmass bestimmt eine Länge als Querabstand zweier auf seiner Oberfläche eingerissener Parallelstriche.

Verschiedene Mass-Systeme.

Jedes Einheitsmass ist ursprünglich willkürlich, und deshalb ist die grosse Mannigfaltigkeit der Masse erklärlich. Die älteren Masse sind meist vom menschlichen Körper hergenommen, z. B. der Fuss, die Elle u. s. w. und insofern willkürlich.

Auch das Meter, welches die früheren Masse jetzt fast verdrängt hat, ist ursprünglich willkürlich, und der Umstand, dass 1 Meter nahezu der zehnmillionste Teil des Erdquadranten ist, ist metronomisch gleichgültig.

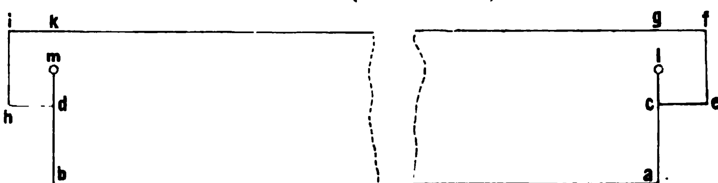
Wir geben in Folgendem einen Abriss der Geschichte der französischen Masse, aus welchen das heutige internationale Metersystem hervorgegangen ist. (zunächst nach Nr. 5. der metronomischen Beiträge, zur Geschichte und Kritik der Toisenmassstäbe, von *C. F. W. Peters*, herausgegeben von der K. Normal-Aichungs-Kommission, Berlin 1885.)

Am Anfang des 18. Jahrhunderts befand sich in Paris am Fuss der Treppe des *Grand Chatelet* als Normalmass für öffentlichen Gebrauch eine eiserne Schiene mit zwei Vorsprüngen, zwischen welche ein Massstab von der Länge einer Toise hindurch geschoben werden konnte.

Etwa um 1735, vor dem Abgang der Gradmessungs-Expedition nach Peru, wurden nach dem rohen Chatelet-Normal zwei feinere Toisen angefertigt in der Form der nachstehenden Fig. 1.

Fig. 1.

Die Peru-Toise (Toise du Pérou).



Die beiden Toisen bestanden aus eisernen Stangen, an den Enden $b\,d$ und $a\,e$ hälftig eingeschnitten, so dass $a\,b = c\,d$ die Toisenlänge vorstellt. Die eine dieser Stangen, später unter dem Namen „*Toise du Pérou*“ bekannt, hatte auch noch zwei Punkte m und l, deren Abstand als Toise in Wirklichkeit in Peru gedient hat. Die andere Toise, später „*Toise du Nord*“ genannt, sollte ursprünglich als Kontroll-Normal in Paris zurückbleiben, während die erste nach Peru abging, indessen nach dem Ab-

gang der Peru-Expedition entschloss man sich rasch auch zu der Polar-Expedition, welcher man 1736 die zweite Toise mitgab.

Diese kam schon 1737 wieder nach Paris zurück, während die Peru-Toise erst 1748 wieder ankam.

Die Vergleichung gab im Jahr 1752, dass die Peru-Toise um 0,04 Linien länger war, als die nordische; man erklärte das durch Rosten der letzteren bei einer Havarie im bottnischen Meerbusen.

Im Jahre 1766 erschien eine Verfügung des Königs *Ludwig XV*, nach welcher die *Toise du Pérou* an Stelle der *Toise du Chatelet* als Normalmass in Frankreich eingeführt wurde. (1 Toise = 6 Pariser Fuss = 72 Pariser Zoll = 864 Pariser Linien.) Von 1813—1831 wurden verschiedene Kopieen der Toise genommen.

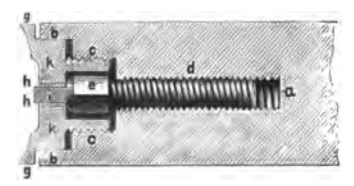
Die Toise kam später in Vergessenheit, und ob die im Jahre 1854 neu gereinigte, jetzt als „Toise du Pérou" betrachtete Stange wirklich die Stange von 1735 oder nur eine Kopie derselben ist, blieb eine zeitlang zweifelhaft, ist aber jetzt durch die Ermittlungen von *Wolf* in Paris als erwiesen anzusehen. Jedenfalls sind die vorhandenen Kopieen der ursprünglichen Peru-Toise von Wichtigkeit. *C. F. W. Peters* hat 14 solcher Kopieen in Betracht gezogen und durch Zusammenstellung dessen, was über die Vergleichung dieser Stäbe mit der alten Peru-Toise oder der Kopieen unter sich bekannt ist, Endergebnisse gefunden, z. B. diese:

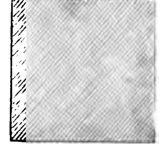
Ursprüngliche Peru-Toise	= 864,00000	Pariser	Linien
Dänische Toise, Fortin = D	= 864,00238	„	„
*Bessel*sche Toise = B	= 863,99920	„	„
Dänische Toise *Gambey* = G	= 863,99493	„	„
Englische Ordnance-Toise = T^2	= 864,06228	„	„

Die Normal-Temperatur des Toisen-Masses ist 13° R = 16,25° C; dieses stammt von der Gradmessung in Peru 1735 her, wo die *Mittel*-Temperatur = 13° R angenommen wurde.

Die *Bessel*sche Toise, welche hier mit genannt ist, wurde von *Bessel* dazu benützt, um ein preussisches Normalmass in einem Stabe von 3 preussischen Fuss herzustellen. Unsere Fig. 2. zeigt die Einzelheiten desselben nach Tafel II des Werkes: „Darstellung der Untersuchungen und Massregeln, welche in den Jahren 1835—1838 durch die Einheit des preussischen Längenmasses veranlasst worden sind, von *F. W. Bessel*, Berlin 1839".

Fig. 2.
*Bessel*sche Normal-Stange (natürl. Grösse).
Längenschnitt. Querschnitt.





Erklärungen zu Fig. 2.:
Hauptkörper *b*, *c*, *a* von Gussstahl,
e d eingedrehte Eisenschraube,
i Sapphir-Kegel,
h Goldbettung,
g k Pressschraube.

Bessel hielt ein Endmass für sicherer als ein Strichmass, indem er die massgebenden Enden möglichst hart machte, nämlich von Sapphir (*i* Fig. 2.), und die Verbindung durch Gold vor Rost schützte.

Der Stahlstab hat die Aufschrift:

„Urmass der preussischen Längeneinheit 1837. Dieser Stab, in der Wärme von 16,25° des hundertteiligen Thermometers, in seiner Axe gemessen, ist 0,00063 Linien kürzer als drei Fusse.“

Dieser Stab wurde durch das Gesetz vom 10. März 1839 als preussisches Urmass bestimmt.

Die Temperatur-Ausdehnung des Normalmasses fand *Bessel* = 0,004375 preuss. Linien für 1° C., oder da der Stab 432 preuss. Linien lang ist, Ausdehnung = 0,000010127 der Länge für 1° C.

Der preussische Fuss selbst ist dadurch = 139,13 Pariser Linien bestimmt.

Ausser der schon oben genannten „Darstellung“ u. s. w. sind hier noch weitere *Bessel*sche Schriften zu zitieren:

„Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels“, Berlin 1828, S. 126. „Gradmessung in Ostpreussen“, S. 22. „Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände“, Hamburg 1848, S. 307—325.

Nach dieser Abschweifung, betreffend das preussische Normalmass von 1837, kehren wir zur Geschichte des Toisen- und Metermasses zurück:

Das neue französische Masssystem vom Jahr 1791 bestimmte als Einheit das Meter, welches möglichst genau der zehnmillionste Teil des Erdmeridian-Quadranten sein sollte.

Das Dekret, welches den von der Akademie vorgeschlagenen Plan annahm, ist vom 26. März 1791 und die Genehmigung erfolgte 4 Tage nachher („*Delambre*, Base du système métrique“ I. S. 19).

Nach vorübergehender Anwendung eines provisorischen Meters von 443,44 Par. Linien wurde auf Grund der *Delambre*schen Gradmessung das „wahre und definitive“ Meter (mètre vrai et définitiv) = 443,296 Pariser Linien festgesetzt. Die Normaltemperatur für das Metermass wurde anders gewählt, als bei dem alten Pariser Mass. Während nämlich letzteres die Normaltemperatur 13° R. = 16,25° C. hat, ist die Normaltemperatur des Metermasses = 0° R. = 0° C., d. h. gleich der Temperatur des schmelzenden Eises.

Demzufolge wurde ein Platinstab hergestellt, dessen Länge bei 0° ist $= \frac{443,296}{864}$ derjenigen Länge, welche die Peru-Toise bei 13° R. hat. (Base du système métrique Band III. S. 622.) Der genannte Platinstab, dessen Querschnitt (Fig. 3.) ein Rechteck von 25mm Breite und 4mm Höhe ist, befindet sich noch in Paris, er heisst gewöhnlich „mètre des archives“.

Fig. 3.
Querschnitt des „mètre des archives“ in natürlicher Grösse.

Obgleich hiernach das Metermass längst sicher gestellt zu sein scheint, so sind doch erst in neuerer Zeit die nötigen Vorkehrungen zu einer befriedigenden Sicherstellung desselben in Angriff genommen worden. Das französische Urplatinmeter (mètre des archives) entspricht nämlich in mehrfacher Beziehung nicht den heutigen wissenschaftlichen Anforderungen.

Um die damit verbundenen Übelstände zu heben, versammelte sich im Sommer 1870 eine internationale Kommission, welche jedoch wegen des Krieges zu keinen Resultaten kam. Die Kommission ist zum zweitenmale im Herbst 1872 in Paris zu-

sammengetreten, jedoch erst im Jahr 1875 kamen die Verhandlungen zum Abschluss. Dieselben haben eine internationale Meter-Konvention ergeben, woran sich allmählich fast alle Kulturstaaten der Erde angeschlossen haben.

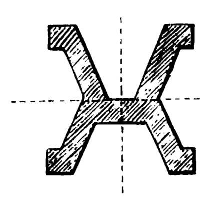
Der Wortlaut der Konvention ist mitgeteilt in dem Deutschen Reichsgesetzblatt Nr. 19 vom 5. Sept. 1876, S. 191—212, derselbe ist abgedruckt in der „Zeitschr. f. Vermessungswesen“ 1877, S. 280—290. Die neuesten Bestimmungen für das metrische Masssystem in Deutschland sind enthalten in dem Gesetze vom 11. Juli 1884 (Reichsgesetzblatt 1884, Nr. 20).

Die Verhandlungen der internationalen Kommission, welche vom 24. Sept. bis 12. Okt. 1872 in Paris stattfanden, sind mitgeteilt in den „Annales du conservatoire des arts et métiers“, Nr. 37, Tome X, 1er fascicule. Paris 1873. Wir entnehmen hieraus folgendes:

Es sollen 30 Meterstäbe hergestellt werden, welche möglichst gleich dem Pariser Archiv-Meter zu machen und unter sich zu vergleichen sind, worauf sie unter die beteiligten Staaten verteilt werden, und künftig die Grundlage aller Massvergleichungen bilden werden.

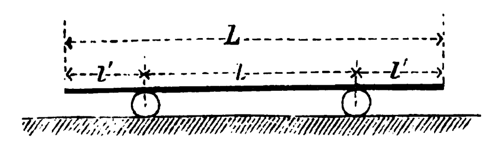
Als Material für diese Normalmeter ist eine *Legierung* von 90% Platin mit 10% Iridium gewählt. Das aus reinem Platin bestehende mètre des archives hat eine sehr poröse Struktur, dagegen hat die erwähnte Legierung von Platin und Iridium folgende Vorzüge: 1) Diese beiden Metalle krystallisieren in demselben System, nämlich dem regulären, und haben die gleiche Dichte 21,15. 2) Die Legierung hat noch nahezu dieselbe Dichte wie die einzelnen Metalle, wodurch eine innige Verbindung gesichert ist. 3) Von allen Metallen (mit Ausnahme des hier nicht in Betracht kommenden Arsen und Osmium) haben Platin und Iridium die geringste Ausdehnung durch die Wärme, nämlich etwa 0,000009 für 1° C.

Fig. 4.
Querschnitt der internationalen Platin-Iridium-Meterstäbe, natürliche Grösse.



Die Stäbe werden prismatisch hergestellt mit einem in Fig. 4. in natürlicher Grösse gezeichneten Querschnittsprofil. Die Wahl dieses Profils ist das Ergebnis vieler Erwägungen, es fand sich nämlich für dasselbe das günstigste Verhältnis des Trägheitsmomentes zur Profilfläche, oder es hat der so konstruierte Stab die grösste Tragfähigkeit bei kleinstem Volumen. (Das fragliche Verhältnis ist 26mal günstiger als bei dem mètre des archives, Fig. 3.). Das gewählte Profil (Fig. 4.) hat noch einen Vorzug, es liegt nämlich die obere Fläche der Querverbindung (in Fig. 4. durch eine punktierte horizontale Linie hervorgehoben) in der neutralen Axe des Körpers, so dass bei eintretender Biegung keine Verlängerung oder Verkürzung in dieser Fläche stattfindet, insoweit es sich dabei um die mit den Biegungen verbundenen Drehungen des Querschnitts handelt. Die genannte Oberfläche ist zur Aufnahme der Striche bestimmt, welche zur Massbezeichnung dienen sollen.

Fig. 5.
Rollen-Unterlage der internationalen Massstäbe.



Die Unterlage der neuen Normalmeter soll nicht eine kontinuierliche sein, sondern aus zwei Rollen bestehen, damit der Temperatur-Ausdehnung keinerlei Hindernis bereitet wird. Allerdings findet bei dem Auflager auf zwei Rollen ein Einschlagen

durch das Eigengewicht des Stabes statt, doch ist dasselbe sehr klein. Die Verteilung der Stützen ist am günstigsten, wenn (entsprechend Fig. 5. S. 58) die Beziehung stattfindet:

$$l' = 0{,}394\, l \text{ oder } l = 0{,}559\, L$$

Wenn diese Verhältnisse eingehalten werden, so beträgt für das in Fig. 4. bezeichnete Profil die Einschlagtiefe nur 0,008 63^{mm} und die entsprechende Verkürzung des Stabes nur 0,000 000 4^{mm}.

Über die Frage, wie weit diese Einrichtungen fortgeschritten sind, kann man eine Antwort entnehmen aus Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, tome III. Paris 1884, Seite C. 13: D'après le résultat de ces comparaisons (1881—1882) et sur le Rapport de sa Commission, le Comité international décida, dans sa séance du 4 octobre 1882 (Procès-verbaux, 1882, p. 72), que „j'usqu'à l'époque du sanctionnement des nouveaux prototypes métriques, on adopterait pour les travaux du Bureau international des Poids et Mesures, comme unité de longueur, la distance comprise, à 0°, entre les traits déliminatifs de l'étalon I_2, diminuée de six microns". Nous admettrons donc

$$I_{2_{(0)}} = 1^{m} + 6{,}00^{\mu}$$

et cette équation servira de point de départ pour la détermination de toutes nos longueurs.

Dieses ist derselbe Platin-Iridium-Stab I_2 mit dem Profil Fig. 4., den wir schon oben (3) und (4) S. 54 beispielshalber angeführt haben.

Nach dem neuesten Stande der Arbeiten (Anfang 1889) ist die definitive Sanktionierung der Prototype, sowohl des internationalen Meters, welcher die letzte gemeinsame Instanz bilden wird, als seiner Kopieen, in kurzer Frist zu erwarten.

§ 8. Komparatoren.

Ein Komparator ist ein Apparat zur Vergleichung zweier Längenmasse. Entsprechend der Einteilung der Längenmasse in Endmasse und Strichmasse hat man verschiedene Komparatoren.

Ein Komparator für Strichmasse, welcher aber zugleich auch zur Vergleichung von Endmassen eingerichtet werden kann, ist in Fig. 1. und Fig. 2. S. 61, gezeichnet. Derselbe ist von Mechaniker *Reichel* in Berlin konstruiert, und gehört dem Gr. bad. Oberaichungsamt Karlsruhe. (Mit ähnlichen Komparatoren sind alle deutschen Oberaichungsämter ausgerüstet.)

Fig. 1. zeigt den eigentlichen Komparator in Längs- und Queransicht.

Auf der hölzernen Unterlage AA BB erheben sich zwei eiserne Säulen CC, welche eine gut gehobelte eiserne Schiene von ⊥förmigem Querschnitt tragen. Auf dieser Schiene gleiten vermittelst zweier Schlitten die zwei Mikroskope EE. Das Fadennetz des einen (rechtseitigen) Mikroskops ist nicht fest, sondern vermittelst einer Mikrometerschraube F beweglich. Dieses Mikroskop hat im wesentlichen dieselbe Einrichtung wie die bekannten Theodolit-Mikroskope.

Auf dem hölzernen Untergestell sind ferner zwei tischartige eiserne Platten GG aufgesetzt, und zwar mit Zwischenlage je zweier horizontaler Cylinder KK, welche um *excentrische* Axen drehbar sind, und dadurch die Tischplatten GG innerhalb eines Spielraums von 1—2^{cm} zu heben oder senken gestatten. Dieses Heben oder Senken

ist notwendig, damit die Oberflächen der Massstäbe JJ', welche verglichen werden sollen, immer in die deutliche Sehweite der Mikroskope gebracht werden können. Zwischen JJ' und GG sind noch Unterlagsplatten HH angebracht.

Vergleichung zweier Strich-Masse.

Wenn es sich um Vergleichung zweier *Strich*-Masse JJ' handelt, so werden dieselben in der beschriebenen Weise neben einander aufgelegt, so dass ihre Oberflächen in eine Ebene zusammenfallen, und zusammen mittelst der Mikroskope beobachtet werden können. Da die Unterlagsplatten HH mittelst besonderer Schrauben der Länge nach etwas Spielraum haben, kann man es dahin bringen, dass man mit dem einen (etwa dem linkseitigen) Mikroskop die zusammenfallenden Nullstriche beider Strichmasse zwischen den Mikroskopfäden sieht. Dann hat man zum Zweck der Vergleichung nur noch das andere (rechtseitige) Mikroskop auf die Endstriche der beiden Strichmasse einzustellen, und dabei den Abstand dieser beiden Endstriche mit der Mikrometerschraube zu messen.

Hiebei ist also vorausgesetzt, dass die einander entsprechenden Striche der zu vergleichenden Massstäbe *gleichseitig* in das Gesichtsfeld der Mikroskope gebracht werden können, und dieses ist deswegen gewöhnlich thunlich, weil die Striche auf die eine Kante ausmündend gezogen sind.

Vergleichung eines Strich-Masses mit einem End-Mass.

Mit Hilfe der besonderen Einrichtung, welche in Fig. 2. in 4 mal grösserem Massstab als Fig. 1. gezeichnet ist, kann man auch Strichmasse und Endmasse vergleichen.

Das zu vergleichende Endmass wird hiebei ganz in der vorher beschriebenen Weise behandelt, es ist J oder J', und liegt auf einer der beiden Platten H. Die andere Platte H wird weggenommen, und statt derselben werden nun die in Fig. 2. links und rechts gezeichneten Anschlag-Cylinder aufgeschraubt.

Diese Cylinder a' und a'' stecken in Hülsen a und haben infolge von eingelegten Federn das Bestreben, in der Richtung gegen einander aus den Hülsen herauszutreten, d. h. sie drücken beiderseits gegen das Endmass bb, welches in Fig. 2. dazwischen gelegt ist.

Wenn b in horizontale Schneiden endigt, so wird man a'' in eine vertikale Schneide oder a' in eine Rundung endigen lassen u. s. w.; für die Betrachtung der Wirkungsweise des Apparates ist diese Unterscheidung unwesentlich.

Auf den Cylindern a' und a'' sind Platten c aufgesetzt, welche nach vorn vorgebogen und mit feinen Strichen d und d' versehen sind. (Die auf der anderen Seite befindlichen Schrauben e dienen zur Höhenregulierung für die Striche d.)

Man denke sich nun die Cylinder a' und a'' auf der einen Tischplatte G befestigt, und ein *End*mass bb zwischen die Cylinder-Enden a' und a'' eingelegt. Auf der anderen Tischplatte G (bzw. auf der Zwischenplatte H) liegt ein *Strich*-Massstab J, und man bringt es nun dahin, dass die Indexstriche d und d' der Cylinder an der Kante des Strichmasses anliegen und gleichzeitig mit den benachbarten Strichen des Strichmasses in den Mikroskopen erscheinen. Man behandelt dann die Striche d und d' wie die Anfangs- und Endstriche eines Strichmasses und macht die Strichmass-Vergleichung in der früher angegebenen Weise.

Es handelt sich noch darum, die Länge dd' auf die Länge aa' zwischen den

Fig. 1.

Komparator des Gr. Ober-Aichungs-Amtes Karlsruhe (von Mechaniker *Reichel* in Berlin).

(Massstab 1 : 8, Länge $EE = 1$ Meter.)

Queransicht.

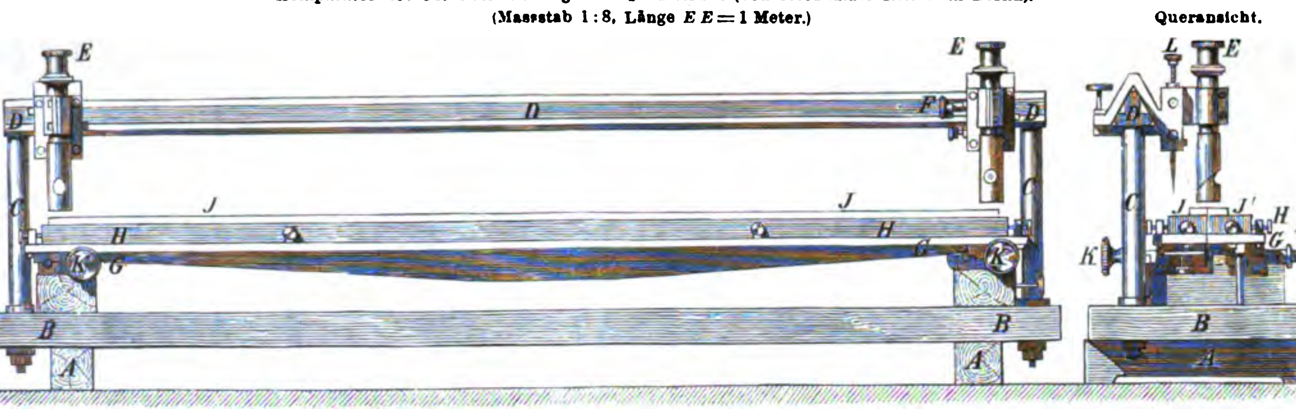
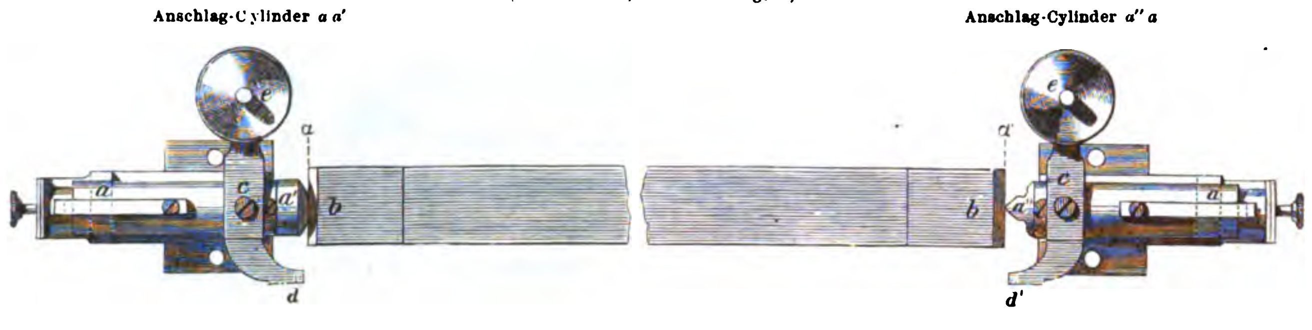


Fig. 2.

Besondere Einrichtung zum gegenseitigen Vergleichen von *Strich* massen und *End* massen.

(Massstab 1 : 2, 4 fach von Fig. 1.)

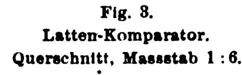
Anschlag-Cylinder *a a'* **Anschlag-Cylinder *a'' a***

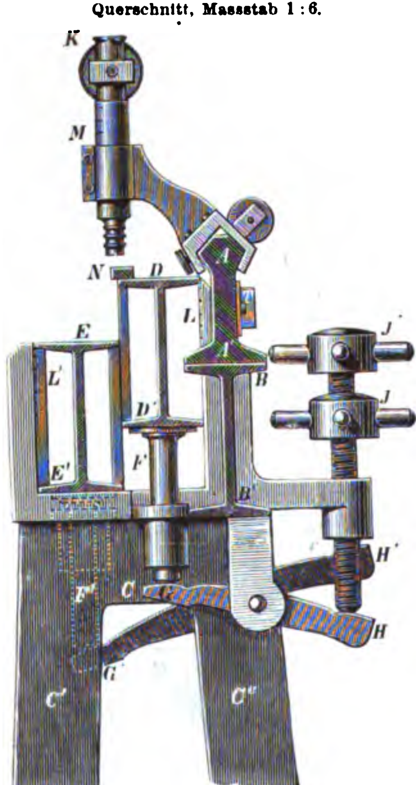


Enden der Anschlag-Cylinder zu reduzieren, und dieses geschieht dadurch, dass man nach Entfernung des Massstabes *b b* den einen Cylinder abnimmt und ihn unmittelbar an den anderen Cylinder anstossend wieder befestigt. Es stossen dann die Cylinder-Enden α und α' zusammen, während die Indexstriche *d* und *d'* einen kleinen Zwischenraum zwischen sich lassen, den man misst und an der vorhergehenden Vergleichung in Rechnung bringt.

Einige andere, zum Teil sehr sinnreiche und doch einfache Verfahren zur gegenseitigen Vergleichung von Endmassen und Strichmassen berichtet „*Zachariae*, Die geodätischen Hauptpunkte“, deutsch von *Lamp*, Berlin 1878, S. 96—98.

Komparator für hölzerne Latten.


Fig. 3.
Latten-Komparator.
Querschnitt, Massstab 1 : 6.



(Karlsr. u. Hannov. Sammlung, Mechaniker *Sickler*.)

Im wesentlichen nach demselben Grundgedanken wie der vorher beschriebene aichamtliche Meter-Komparator, jedoch länger und stärker, ist der Komparator für Nivellierlatten und ähnliche Massstäbe, dessen Querschnitt in Fig. 3. gezeichnet ist.

Der Hauptteil ist eine Eisenschiene *A A'* (aus einer Eisenbahnschiene hergestellt), $3{,}5^m$ lang und mit einer durchlaufenden Millimeterteilung versehen. *DD'* und *EE'* sind zwei Träger, welche durch die auf der anderen Seite angebrachten Schrauben *J* und *J'* durch Hebel *HG* und *H' G'* der Höhe nach gestellt werden können.

N ist ein aufgelegter Massstab, der durch das Mikroskop *M* verglichen wird.

Weiteres hierüber haben wir früher in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde“, 1881, S. 41—47 mitgeteilt.

Normalstellung der Mikroskop-Axen.

Wenn man bei einem Längen-Komparator der bisher beschriebenen Art die Laufschiene der Mikroskope und die Unterlagsplatten mit Libellen gut horizontal stellt, so ist nur noch die Frage zu beantworten, ob die Mikroskop-Axen vertikal sind. Wenn letzteres nur wenigstens genähert der Fall ist, so kann man bereits Vergleichungen machen, weil kleine Neigungen der Mikroskop-Axen bei den immer nahezu gleichen Höhen-Einstellungen wenig ausmachen.

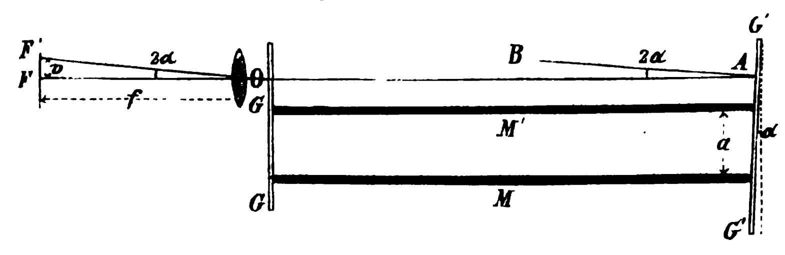
Um jedoch die Mikroskop-Axen genau vertikal zu stellen, hat man das Mittel des Quecksilber-Horizontes; man stellt nämlich unter ein Mikroskop ein Gefäss mit Quecksilber und beobachtet darin das Spiegelbild der Fäden, welches sich mit den Fäden selbst decken soll. Jedoch muss man dazu die Fäden *beleuchten*; das geschieht durch einen kleinen seitwärts angebrachten Spiegel, den wir aus anderer Veranlassung beschrieben haben in „Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung", Berlin 1885, S. 225.

Eine andere Untersuchung über Mikroskop-Axen-Neigung u. s. w. giebt unser nachfolgender § 9. Auch ist hier zu zitieren: „*Weinstein*, Handbuch der physikalischen Massbestimmung" II. Band, Berlin 1888, S. 72—89.

Fühlspiegel-Komparator von Steinheil.

Ein anderes Prinzip der Massvergleichung, für *End*masse geeignet, ist das des Fühlspiegels, von dem wir in Fig. 4. wenigstens den Grundgedanken darstellen (nach einem Berichte von *Steinheil* in dem „Gen.-Ber. d. Europ. Gradm. für 1869", S. 76 bis 80 und „*Tinter*, Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins", 1871, S. 40, und „Publ. des geod. Instituts. Massvergleichungen", II. 1876).

Fig. 4.
Fühlspiegel-Komparator von *Steinheil*.



In Fig. 4. sind M und M' zwei Endmasse, welche verglichen werden sollen. Dieselben befinden sich in paralleler Lage im Abstand a, und stossen links mit ihren Enden gegen eine ebene Glasplatte $G\,G$ an. Wenn diese Masse M und M' *gleich* lang sind, so wird eine zweite Glasplatte $G'\,G'$, welche gegen die anderen Enden (rechts) gedrückt wird, mit der ersten Platte $G\,G$ *parallel* sein; andernfalls machen die Platten $G\,G$ und $G'\,G'$ einen kleinen Winkel α, entsprechen der Gleichung:

$$\sin \alpha = \frac{M' - M}{a}$$

Nun hat man ein Fernrohr $F\,O$, rechtwinklig zur Glasplatte $G\,G$ gerichtet; und wenn $G'\,G'$ parallel $G\,G$ ist, so wird $F\,O\,A$ mit $F\,O$ gemeinsam nach F reflektiert. Wenn dagegen der erwähnte kleine Winkel α vorhanden ist, so bekommt man *zwei* Reflexionspunkte F und F', deren Abstand $v = 2 f \sin \alpha$ ist, also in Verbindung mit der ersten Gleichung:

$$M' - M = \frac{a\,v}{2\,f}$$

Insofern a erheblich kleiner ist als f, giebt ein Fehler an v einen entsprechend kleinen Einfluss auf die Massvergleichung $M' - M$.

Man hat die Fühlspiegel-Vergleichung von Endmassen früher namentlich deswegen gewählt, weil man dabei die Stäbe in einer *Flüssigkeit* vergleichen kann, was

das beste Mittel zur sicheren und gleichmässigen Temperatur-Bestimmung ist; indessen in neuer Zeit macht man auch mikroskopische Strich-Vergleichungen in der Flüssigkeit, wie aus dem Nachfolgenden zu ersehen ist.

Mass-Vergleichungen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus.

Zum Abschluss unserer Betrachtungen über Massvergleichung wollen wir noch einen Auszug vorführen aus dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures", Tome II, Paris 1883, Seite C 3 — C 147, und Tome III, 1884, Seite C 3 u. ff. mesures de dilatation et comparaisons des règles métriques.

1. *Verfahren im Allgemeinen.*

Die Messungen der Ausdehnungen der metrischen Strichmasse wurden nach dem von dem schwedischen General *Wrede*, Mitglied des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus angegebenen Verfahren ausgeführt, welches im wesentlichen in der aufeinander folgenden Vergleichung zweier Stäbe besteht, welche nach einander unter die Objektive zweier vertikaler im Abstand von 1^m befestigter Mikrometer-Mikroskope gebracht werden. Die Messungen werden wie bei gewöhnlichen Vergleichungen zweier Meter gemacht, mit dem einzigen Unterschied, dass jeder der Stäbe in einen besonderen Trog mit Flüssigkeit eingeschlossen ist, und dass die Stäbe hierin im allgemeinen verschiedene Temperaturen haben, welche nach Umständen reguliert werden können. Auch kann die Temperatur des einen Stabes während der Dauer der Vergleichungen konstant erhalten werden, und man erhält dadurch die Ausdehnung des anderen Stabes unmittelbar. Der Vorteil der Methode besteht darin, dass ihre Ergebnisse unabhängig von dem absoluten Abstand der Mikroskop-Axen sind, dieser Abstand braucht nur während der kurzen Zeit des Übergangs von einem Stab zum anderen als konstant oder während abwechselnden Übergangs als gleichförmig veränderlich angenommen zu werden.

Der Vergleich-Apparat besteht hiernach im wesentlichen aus zwei fest aufgestellten Mikroskopen und einer zwischen beiden befindlichen Schienen-Wagen-Einrichtung, mittelst welcher die in Tröge eingeschlossenen Meterstäbe rasch unter die Mikroskope geschoben werden können.

2. (C. 4.) Der *Komparator* besteht aus zwei Mikroskopen, welche auf Steinpfeilern im Abstand von 1^m gut fundiert sind; dazwischen bewegt sich ein Wagen auf Schienen, welcher die Vergleichs-Stäbe mit ihren Trögen unter die Mikroskope bringt.

3. (C. 12) *Richtigstellung aller Teile.*

4. (C. 13) *Die Mikroskope.* Objektiv von 36^{mm} Brennweite, Ganghöhe der Schraube $= 0{,}75^{mm}$, 1 Umdrehung giebt $0{,}1^{mm}$, die Trommel ist in 100 Teile geteilt, giebt also sehr nahe $0{,}001^{mm} = 1^{\mu}$, Gesichtsfeld $= 1{,}1^{mm}$, Okular *Ramsden*, Vergrösserung 90 bis 95fach.

5. (C. 14) *Neben-Apparate* zur Regulierung der Temperatur in den Trögen mit Hilfe von Wasser-Zirkulation.

6. (C. 16 und Tome III C. 11.) Als *Flüssigkeit* wurde zuerst Glycerin genommen, aber wieder aufgegeben, weil die Klebrigkeit sich als Hindernis gleichförmiger Temperatur-Verteilung zeigte; ähnlich verhält es sich mit vegetabilischen Ölen. Petroleum stört durch die gesundheitschädlichen Dämpfe. Reines Wasser wurde schliesslich ausreichend gefunden für Platin, Messing und Bronce, dagegen für Eisenstäbe wurde als nicht angreifende Flüssigkeit nach verschiedenen Versuchen, gesättigte Borax-Lösung genommen.

Die Stäbe sind in der Regel 25^{mm} tief in die Flüssigkeit eingetaucht, und die mikrometrische Messung durch eine 25^{mm} tiefe Flüssigkeits-Schichte geschieht nahezu mit derselben Genauigkeit wie durch Luft.

7. (C. 20 und Tome III. C. 6) *Künstliche Beleuchtung* in der Axe der Mikroskope, durch einen Spiegel unter 45°.

8. (C. 26) *Einstellen auf deutliche Sehweite,* nach *Försters* Theorie (vgl. unseren nachfolgenden § 9. „mise au foyer" u. s. w.).

9. (C. 30) *Ausdehnungs-Coëfficienten* (vgl. unseren früheren § 7. S. 53—54).
10. u. ff. (C. 30) *Thermometer* und (C. 62) *Barometer*.
30. (C. 104 und Tome III. C. 7.) *Periodische Schraubenfehler* (vgl. unseren früheren § 6. S. 48—50).
31. (C. 118 und Tome V. Seite 47) *Fortschreitende Schraubenfehler*.

§ 9. Bestimmung der Neigung der Mikroskop-Axen.

Als Abschluss der vorstehenden Mitteilungen von § 8. über Komparatoren, bringen wir hier noch eine feinere Untersuchung, welche vom Verfasser im April 1881 nach dem Vorschlage des Herrn Geheimen Regierungsrats *Foerster* an dem grossen *Repsold*schen Komparator der Kaiserlichen Normal-Aichungs-Kommission in Berlin angestellt wurde.

Diese auf die Bestimmung der Mikroskop-Axen-Neigungen abzielende Untersuchung bietet über dieses Ziel hinaus gehendes Interesse, weil die Art der Bestimmung in Beziehung steht zu der in der Mikrometrie wichtigen Frage, ob die Mikrometer-Ebene (Fadennetz-Ebene) genau mit der Bild-Ebene des Mikroskops zusammenfällt, und welche Änderungen entstehen, wenn dieses nicht genau der Fall ist.

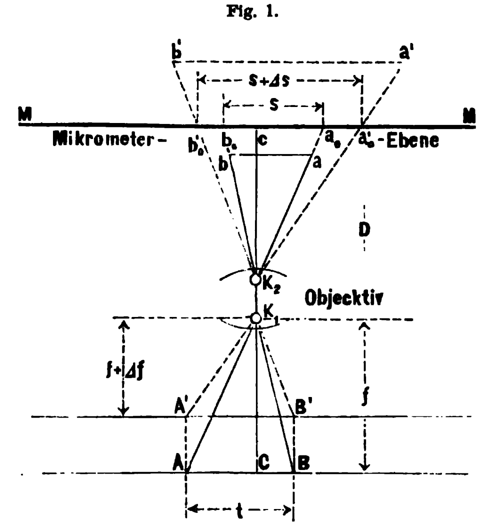
Hiemit beschäftigt sich eine Abhandlung:

„Note sur l'influence de la mise au foyer et de l'inclinaison des mikroscopes sur les mesures micrométriques; par *M. W. Foerster*, extrait des procès-verbaux du Comité international des Poids et Mesures, séances de 1877. Paris 1878."

Wir geben zunächst eine nahezu wörtliche Übersetzung des ersten Teiles dieser Abhandlung:

Das Mikroskop ist in unserer Fig. 1. vorgestellt durch die Haupt- und Knotenpunkte K_1 und K_2 seines Objektivs und durch die Mitte c seiner Mikrometer-Ebene MM. Die Punkte K_1 und K_2 sind die zwei Scheitelpunkte des dioptrischen Systems, welche in vielen Fällen ohne merklichen Fehler in *einen* gemeinschaftlichen Punkt, den „optischen Mittelpunkt" zusammenfallen, welche aber bei schärferer Behandlung auseinander zu halten sind.

Fig. 1.



Der Einfachheit wegen haben wir die Mitte c des mikrometrischen Netzes (Fadenkreuz oder Nullpunkt des Mikrometers) in die optische Axe $K_1 K_2$ des Mikroskops gebracht, und zunächst angenommen, dass die Richtung dieser optischen Axe normal zu einem linearen Intervall t ist, welches in den beiden Lagen $A\,B$ und $A'\,B'$ zur mikrometrischen Messung vorgelegt ist.

In der ersten Lage $A\,B$ habe man die dioptrischen Bilder $a\,b$ und in der zweiten Lage $A'\,B'$ habe man entsprechend $a'\,b'$; und es handelt sich darum, für jeden dieser

4 Punkte seinen mikrometrischen Ort zu bestimmen, d. h. denjenigen Punkt des mikrometrischen Netzes MM, welcher mit dem Bilde von A, B u. s. w. in Deckung gesehen wird.

Die nachfolgende Betrachtung zeigt, dass der mikrometrische Ort, z. B. für den Punkt A, der Schnittpunkt a_0 des Hauptstrahls $K_2 a$ mit der Mikrometer-Ebene MM ist, d. h.:

$$\left.\begin{array}{l} t = AB \text{ hat das mikrometrische Intervall } a_0 b_0 = s \\ t = A'B' \;\;\text{,,} \qquad\qquad \text{,,} \qquad\qquad \text{,,} \quad a_0' b_0' = s + \Delta s \end{array}\right\} \tag{1}$$

Man giebt sich hievon leicht Rechenschaft, wenn man annehmen kann, dass nur sehr dünne Lichtkegel vorhanden sind, oder wenn man zum Grenzfall übergehend, die Lichtkegel auf ihre Axen AK_1, $K_2 a$ u. s. w. reduziert, so dass dann allerdings a_0 auf der Geraden $K_2 a$ liegen muss u. s. w.

Für *breitere* Lichtkegel, entsprechend der mehr oder weniger weiten Objektiv-Öffnung des Mikroskops wird die Frage, an welcher Stelle der Mikrometer-Ebene MM z. B. der Bildpunkt a_0 des Punktes A zu suchen ist, etwas schwieriger zu beantworten sein, wegen der sogenannten Parallaxe der Bilder.

Es wird z. B. das mikroskopische Bild des Lichtpunktes A, welches auf der Netzhaut mittelst eines ziemlich weiten Lichtkegels entsteht, *nicht* gleichzeitig stigmatisch sein mit dem Bilde seines mikrometrischen Ortes, d. h. mit dem Punkte a_0.

Bei einer Okularstellung, welche ein scharfes, stigmatisches Bild von a_0 giebt, wird A nicht mehr als ein Punkt, sondern als eine kleine runde Lichtfläche erscheinen, deren Intensitäts-Centrum sich ändert, wenn das Auge sich quer zur Axe $K_2 a$ verschiebt, so dass Teile des Lichtkegels für die Netzhaut verloren gehen.

Indessen bei mässigen Verschiebungen AA' kann man hievon absehen, und, vorbehältlich der nachfolgenden Bestätigung durch Messungsversuche, nehmen wir nun an, dass die mikrometrischen Intervalle die Werte s und $s + \Delta s$ haben, welche bereits oben bei (1) angegeben und in Fig. 1. eingeschrieben sind.

Nimmt man dann noch die ebenfalls in Fig. 1. eingeschriebenen Masse D und f, nebst $f + \Delta f$ hinzu, so hat man die einfachen Gleichungen:

$$\frac{s}{t} = \frac{D}{f} \qquad \frac{s + \Delta s}{t} = \frac{D}{f + \Delta f}$$

$$\frac{s + \Delta s}{s} = \frac{f}{f + \Delta f}$$

$$1 + \frac{\Delta s}{s} = \frac{f}{1 + \frac{\Delta f}{f}} = 1 - \frac{\Delta f}{f} + \ldots$$

$$\frac{\Delta s}{s} = -\frac{\Delta f}{f} \tag{2}$$

Übergehend zur Bestätigung dieser Formel durch Messungsversuche, führen wir von den verschiedenen Zahlenreihen der *Förster*schen Abhandlung nur *eine* übersichtliche vor:

Es wurde ein Intervalle t von rund $0{,}4^{mm}$ zweimal mit verschiedenen Abständen f gemessen; die Schraubenwerte s sind sehr nahe in Einheiten von 1^{μ} angegeben, weshalb wir sie der Übersicht wegen als solche Werte hersetzen:

Die Höhen-Änderung Δf wurde durch eine Libelle bestimmt.

Erste Reihe mit $f = 51{,}500^{mm}$		Zweite Reihe mit $f = 51{,}300^{mm}$, also $\Delta f = -0{,}200^{mm}$
	$396{,}5^{\mu}$	$398{,}3^{\mu}$
	395,1	398,3
	396,3	398,1
	396,0	397,8
	396,6	397,6
Mittel	$396{,}10^{\mu}$	$398{,}02^{\mu}$
Periodische Korrektion der Schraube	+ 0,15	— 0,10
	$s = 396{,}25^{\mu}$	$s + \Delta s = 397{,}92^{\mu}$, $\Delta s = +1{,}67^{\mu}$

Die Rechnung nach der Formel (2) giebt:

$$\Delta s = -\frac{\Delta f}{f} s = +\frac{0{,}200}{51{,}4} 397^{\mu} = +1{,}54^{\mu}$$

Diese Übereinstimmung $1{,}54^{\mu}$ und $1{,}67^{\mu}$ zwischen Rechnung und Beobachtung ist befriedigend.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir über zur

Bestimmung der Neigungen der Mikroskop-Axen.

Im Anschluss an die schematische Figur 2. S. 68 und mit Rücksicht auf die frühere Komparator-Zeichnung Fig. 1. S. 61 beschreiben wir die Anordnung von Massvergleichungen mit dem Nebenzweck der Ermittlung der Axenneigungen der Mikroskope.

$B_1 B_2$ ist die horizontale Eisenschiene, auf welcher die Mikroskope während einer Vergleichung befestigt sind. Die Mikroskop-Axen, d. h. hier die durch den Nullpunkt ihrer Mikrometer und die optischen Mittelpunkte der Objektive gehenden Richtungen, seien rechts $E_1 E_1$ und links $E_2 E_2$, diese Axen sollten vertikal sein, machen aber kleine Winkel ε_1 und ε_2 mit den wahren durch die Objektivmitten gehenden Vertikalen.

Weiter unten, im lotrechten Abstand f von den Objektivmitten, befindet sich die Tischebene $G_1 G_2$, auf welcher ein zur Vergleichung bestimmter Massstab M aufgelegt ist. Die richtige Lage von $G_1 G_2$ ist die Horizontale, man kann aber die Unterstützungen bei G_1 und G_2 heben und senken, und dadurch z. B. einem zweiten zur Vergleichung bestimmten Massstabe M' eine etwas gehobene und auch geneigte Lage geben, wie durch die beiden Höhen h_1 und h_2 angedeutet ist.

Für die Endstriche der Stäbe M und M' seien die Mikroskop-Ablesungen an dem rechten Ende, nach Andeutung von Fig. 2. bzw. s und s'; wenn jedoch der Stab M' nicht gehoben wäre, würde man eine andere Ablesung $s' - \Delta s'$ machen und nach der im vorstehenden mitgeteilten *Foerster*schen Abhandlung hat man, entsprechend Gleichung (2), anzunehmen, zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen:

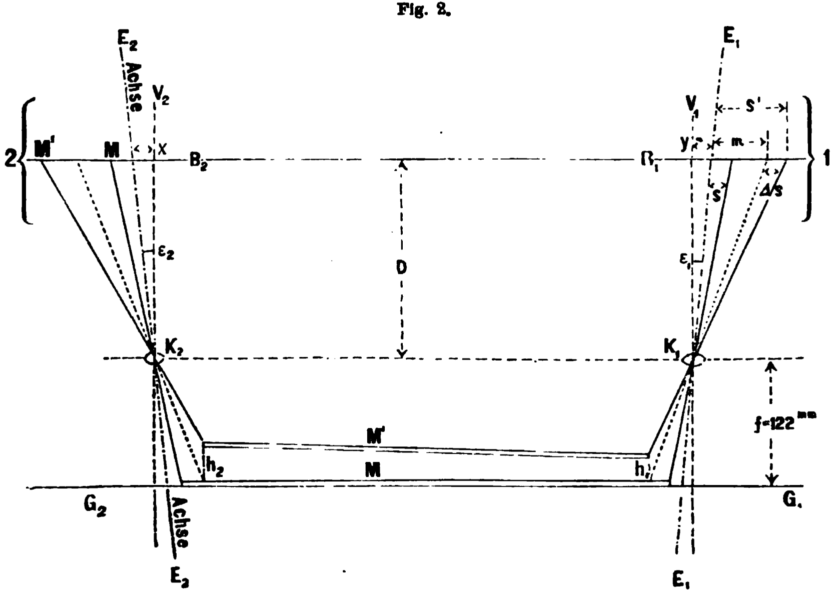
$$\Delta s' = \frac{h_1}{f}(s' + y)$$

und es ist also die Ablesung, welche das *nicht* gehobene Ende geben würde, die folgende:

$$m' = s' - \frac{h_1}{f}(s' + y) \qquad (3)$$

Eine solche Gleichung gilt an beiden Enden der Stäbe, und indem wir, wie in Fig. 2., die beiden Seiten mit $_1$ und $_2$ bzw. mit y und x unterscheiden, und alle

Fig. 2.



Mikroskop-Ablesungen nach *auswärts* zählen, können wir die Massvergleichung zwischen M und M' bilden. Dazu führen wir noch den konstanten horizontalen Abstand beider Objektivmitten $K_1 K_2 = K$ ein (K ist nicht in Fig. 2. eingeschrieben) und haben damit:

$$M = K - (y + s_2 + x + s_1) \qquad M' = K - (x + m_2' + y + m_1')$$
$$M' - M = s_2 - m_2' + s_1 - m_1'$$

oder mit Einsetzung von (3):

$$M' - M = s_2 - s_2' + \frac{h_2}{f}(s_2' + x) + s_1 - s_1' + \frac{h_1}{f}(s_1' + y) \tag{4}$$

Wenn weiter t die Temperatur des Massstabes M, und t' diejenige von M' ist, wenn ferner M_0 und M_0' die Stablängen bei der Temperatur 0° sind, und beide Stäbe von Messing sind mit der Ausdehnung $18{,}3^\mu$ für 1°, so ist:

$$M = M_0 + 18{,}3\,t \qquad M' = M_0' + 18{,}3\,t' \tag{5}$$

Ehe wir von da zur Aufstellung der Schlussgleichungen schreiten, wollen wir noch überlegen, ob nicht die Verkürzung merklich werden kann, welche durch das Schiefliegen des Stabes M' entsteht. Diese Verkürzung ist bekanntlich:

$$\frac{(h_2 - h_1)^2}{2\,M'} = \sigma \tag{6}$$

Dieses kann in unserem Falle bis zu $0{,}2^\mu$ anwachsen, und wenn man nun die Differenz der beiden Stäbe mit Rücksicht auf das Schiefliegen von M' bestimmen will, so muss man statt (5) schreiben:

$$M = M_0 + 18{,}3\,t \qquad M' = M_0' + 18{,}3\,t' - \sigma \tag{7}$$

Damit wird die Differenz beider Stäbe:

$$\xi = M_0 - M_0' = M - M' - 18{,}3\,(t - t') - \sigma \tag{8}$$

Wenn man nun die Gleichungen (4) und (8) verbindet, und zur Abkürzung schreibt:

$$a = \frac{h_2}{f}\ ,\ b = \frac{h_1}{f}\ ,\ l = s_2 - s_2' + s_1 - s_1' + a\,s_2' + b\,s_1' + 18{,}3\,(t - t') + \sigma \tag{9}$$

so erhält man:

$$0 = \xi + a\,x + b\,y + l \tag{10}$$

Jede Massstab-Vergleichung giebt eine solche Gleichung. Macht man mehr als drei Vergleichungen bei möglichst verschiedenen Höhen h_1 und h_2, so nehmen die Gleichungen (10) den Charakter von Fehlergleichungen an in der Form:

$$\begin{matrix} v_1 = \xi_1 + a_1\,x + b_1\,y + l_1 \\ v_2\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ \text{u. s. w.} \end{matrix} \tag{11}$$

und man hat dann eine Ausgleichung zu machen.

Wir haben an dem *Repsold*schen Komparator der K. Normal-Aichungs-Kommission im April 1881 eine solche Messung und Berechnung mit zwei Messingmeterstäben durchgeführt; die verschiedenen Höhenlagen des Massstabs M' wurden dabei durch eine aufgesetzte *Libelle* bestimmt, deren Ausschläge mit Rücksicht auf die Abstände von den Unterstützungspunkten die Höhenlagen berechnen liessen. Wir nahmen folgende 5 Fälle:

Fall	links h_2	rechts h_1	
1.	$0{,}0^\mu$	$0{,}0^\mu$	(Normallage mit $f = 122^{mm}$)
2.	$+ 809{,}1^\mu$	$+ 170{,}6^\mu$	
3.	$+ 9{,}2^\mu$	$+ 1{,}9^\mu$	
4.	$+ 160{,}2^\mu$	$+ 801{,}1^\mu$	
5.	$+ 5{,}8^\mu$	$- 10{,}6^\mu$	

Folgendes sind die hiezu gehörigen Mikrometer-Ablesungen, welche wir sofort in Form von Mikromillimetern angeben, indem eine Umdrehung $= 97{,}7^\mu$ war, wonach die Umrechnung der Umdrehungen in Millimeter erfolgen konnte:

Fall	Mikroskop	links	Mikroskop	rechts	Temperatur	
	s_2	s_2'	s_1	s_1'	t	t'
1	$-15{,}90^\mu$	$-25{,}22^\mu$	$+92{,}72^\mu$	$-36{,}30^\mu$	17,07°	17,005°
2	$-15{,}55$	$-10{,}52$	$+91{,}74$	$-53{,}05$	17,11	17,065
3	$-16{,}35$	$-58{,}97$	$+93{,}11$	$-1{,}12$	17,14	17,100
4	$-15{,}50$	$-149{,}60$	$+92{,}86$	$+94{,}13$	17,18	17,145
5	$-15{,}50$	$-149{,}55$	$+92{,}42$	$+90{,}13$	17,21	17,188

Damit kann man die Rechnung nach den Formeln (9) und (11) durchführen; man findet zunächst die Fehler-Gleichungen (wobei die Absolutglieder nahe auf 0,01 genau sind):

$$\begin{aligned} v_1 &= \xi + \quad .\ . \qquad\qquad\quad .\ . \qquad + 139{,}54 \\ v_2 &= \xi + 0{,}00664\,x + 0{,}00140\,y + 140{,}64 \\ v_3 &= \xi + 0{,}00008\,x + 0{,}00002\,y + 137{,}57 \\ v_4 &= \xi + 0{,}00131\,x + 0{,}00656\,y + 134{,}10 \\ v_5 &= \xi + 0{,}00005\,x - 0{,}00013\,y + 136{,}75 \end{aligned}$$

Wenn man als neue Unbekannte einführt:

$$\xi' = \xi + 133^\mu \qquad x' = 0{,}001\,x \qquad y' = 0{,}001\,y \tag{12}$$

(d. h. x' und y' werden nun in Millimetern gezählt), so erhält man die Normalgleichungen (in abgekürzter Schreibweise):

$$\begin{array}{l} \underline{5{,}00\,\xi'} + 8{,}08\,x' + 7{,}85\,y' + 23{,}60 = 0 \\ \qquad\quad \underline{+45{,}81\,x'} + 17{,}88\,y' + 52{,}72 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{+45{,}01\,y'} + 17{,}52 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+137{,}30} \end{array}$$

Die Auflösung giebt:

$$\begin{array}{lll} \xi' = -4{,}95^{\mu} & x' = -0{,}56^{mm} & y' = +0{,}69^{mm} \\ \quad \pm 0{,}86^{\mu} & \quad \pm 0{,}26 & \quad \pm 0{,}26 \end{array} \qquad (13)$$

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler:

$$m = \sqrt{\frac{4{,}4}{5-3}} = \pm 1{,}48^{\mu} \qquad (14)$$

Nach (12) hat man auch wieder $\xi = \xi' - 133 = -137{,}95^{\mu}$.

Dieses ist die Differenz der beiden Massstäbe M_0 und M_0' und zwar ist nach (8):

$$M_0 - M_0' = -137{,}95^{\mu} \pm 0{,}86^{\mu} \qquad (15)$$

Der Stab M_0 ist also um ungefähr $0{,}1^{mm}$ kürzer als der Stab M_0'.

Wichtiger als diese Stabvergleichung (15) sind uns hier die Masse $x' = -0{,}56^{mm}$ und $y' = +0{,}69^{mm}$, welche die Neigungen der Mikroskop-Axen bestimmen, es sind das Masse, welche aus Schrauben-Umdrehungen abgeleitet, sich auf die *unten* liegenden Stäbe beziehen; wenn man also daraus die Mikroskop-Neigungen als Winkel ausdrücken will, so braucht man den Objektiv-Abstand $f = 122^{mm}$, und die Axen-Neigungswinkel werden:

$$\varepsilon_2 = \frac{x}{f}\,\varrho = -16' \pm 7' \qquad \varepsilon_1 = \frac{y}{f}\,\varrho = +19' \pm 7'$$

Hiernach kann man die Mikroskop-Axen neu richten, oder die Fehler ε_2 und ε_1 in Rechnung bringen.

Andererseits enthält der mittlere Gewichtseinheits-Fehler $m = \pm 1{,}48^{\mu}$ nach (14), mit Rücksicht auf die ziemlich bedeutenden Hebungen $\Delta f = h$, welche bis zu $0{,}8^{mm}$ betrugen, eine Bestätigung der *Foerster*schen Formel (2).

Es ist klar, dass aber bei so grossen Hebungen die feinsten Vergleichungen nicht erzielt werden konnten. Aus der Messungsweise konnte indessen jedenfalls die Beruhigung entnommen werden, dass die Neigungen der Mikroskope klein genug waren, um für alle sonstigen Messungen, bei denen in der Regel Abstands-Unterschiede Δf kaum im Betrage des zwanzigsten Teils der obigen Maximalwerte der Δf vorkommen, vernachlässigt werden zu können.

§ 10. Ältere Basis-Messungen.

Die ersten Basis-Messungen waren nichts anderes als Linien-Messungen, im wesentlichen von ähnlicher Art, wie sie der Landmesser mit Messlatten heute noch macht, jedoch mit besonderer Sorgfalt ausgeführt.

So begann *Snellius* 1615 (vgl. unsere Einleitung S. 4); und auch die Franzosen massen im 17. und auch noch im 18. Jahrhundert mit hölzernen Latten.

Ähnliche Messungen kamen in Deutschland auch noch in diesem Jahrhundert vor; so berichtet z. B. *Benzenberg* aus dem Jahre 1805, in dem Buche „Über das Cataster", Bonn 1818, S. 20 - 21, „die Standlinien wurden mit hölzernen Messstangen

gemessen, die 12 Fuss lang waren, mit Ölfarbe angestrichen und an beiden Seiten mit Kupfer beschlagen. Diese wurden über kleine Brücken gelegt, die in eine Länge von 1000 Fuss durchs Feld gebaut wurden, und auf denen sich eine viermalige Messung fortsetzte, während dass hinten die Brücken abgebrochen und vorne wieder angebaut wurden. 22 Feldmesser wurden bei der Messung der Standlinien gebraucht."

Folgendes sind *Benzenbergs* Angaben für die 4malige Messung bei Mündelheim, wobei wir sogleich die Reduktion in Metermass und eine Genauigkeits-Berechnung zufügen:

	Fuss	Zoll	Linien	Meter	v	v^2
1.	24062	1	8,1	= 7551,9867	$+14{,}9^{mm}$	222
2.	24062	1	5,0	= 7551,9799	$+21{,}7$	471
3.	24062	3	3,6	= 7552,0292	$-27{,}6$	762
4.	24062	2	7,1	= 7552,0107	$-9{,}1$	83
Mittel	24062	2	3	= 7552,0016		1538

Man berechnet hieraus:

Mittlerer Fehler einer Messung:

$$m = \sqrt{\frac{1538}{3}} = \pm 22{,}6^{mm}$$

Mittlerer Fehler des Mittels aus allen 4 Messungen:

$$M = \frac{m}{\sqrt{4}} = \pm 11{,}3^{mm}$$

Mittlerer Fehler einer Messung von 1^{km} Länge:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{7{,}552}} = \pm 8{,}2^{mm} \qquad (1)$$

Diese Genauigkeits-Angaben beziehen sich *nur* auf die *unregelmässigen*, durch die Handhabung der Stangen und etwaige Änderungen derselben während der Messungen erzeugten Fehler; einseitig wirkende Fehler und namentlich die Unsicherheiten der Latten selbst sind hier *nicht* mitgerechnet.

Trotzdem schien es nicht unzweckmässig, an diesem, wie es scheint, zuverlässigen Beispiele zu zeigen, wie genau man mit den einfachsten Mitteln im Felde messen kann, wenn man gute Messungs-Unterlagen hat.

Bei dieser Gelegenheit mag auch erwähnt werden, dass *Koppe* die Aarberger Basis von 1880 auch mit gewöhnlichen 5 Meter-Latten längs gespannter Schnüre mass, und für 1^m den mittleren unregelmässigen Fehler $\pm 0{,}28^{mm}$ fand, also für eine Messung von 1^{km} den mittleren Fehler:

$$m_1 = 0{,}28\sqrt{1000} = \pm 8{,}9^{mm} \qquad (2)$$

(vgl. *Koppe* „Der Basis-Apparat des General *Ibanez* und die Aarberger Basismessung", Zürch 1881, S. 7—8.)

Nach dieser Vorbemerkung über das Messen mit gewöhnlichen Messlatten, geben wir eine kurze Darlegung der Entwicklung der Basismessungs-Verfahren zunächst von den französischen Messungen im 17. und 18. Jahrhundert bis zum Anfang dieses Jahrhunderts.

Picard wandte 1669 4 hölzerne je 2 Toisen lange Massstäbe an, die er mit Hilfe von Schrauben zu 2 je 4 Toisen langen Messlatten verband. Diese legte er un-

mittelbar eine vor die andere auf den (horizontalen) Boden. Da sie im Querschnitt rund, und leicht von Gewicht waren, so war eine Verschiebung auf dem Boden kaum zu vermeiden. (*La Condamine*, Mesure des trois premiers degrés u. s. w. S. 249.)

Bei den Gradmessungen in Peru und Lappland (1736) wurden ebenfalls hölzerne Latten, und zwar deren *drei* zusammen angewendet. Dieselben waren 15 oder 20 Fuss lang, 2 Zoll breit, $1^1/_2$ Zoll dick und mit Eisen beschlagen; sie wurden auf je zwei Stützen, jede einzeln horizontal, gelegt. (*La Condamine* S. 250.)

Bei der im Jahre 1739 vorgenommenen Nachmessung der *Picard*schen Basis von Juvisy bediente sich *Cassini* zum erstenmal metallener Massstäbe, nämlich 4 eiserner Stäbe, deren Temperatur-Ausdehnung er aus Quecksilber-Thermometerangaben ermittelte. (*La Condamine* S. 251.)

Der englische General *Roy* mass im Jahre 1784 eine Grundlinie bei *Hounslow-Heath*, zwischen London und Greenwich, 7 530^{m} lang, mehrmals mit verschiedenen Hilfsmitteln:

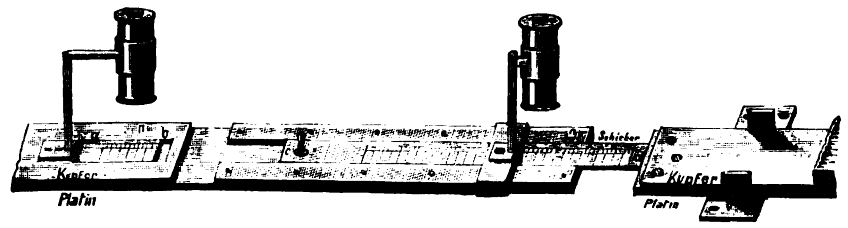
erste Messung	mit einer Kette . . .	27 408,22 Fuss
zweite „	„ Holz-Massstäben . .	27 406,60 „
dritte „	„ Glasröhren . . .	27 404,72 „

Ferner im Jahre 1787 eine Basis bei Romney-Marsh wieder mit der Kette, 28 532,92 Fuss, und 1794 bei Salisbury 36 574,4 Fuss.

Doppelmetall-Stange von Borda.

Den Übergang von der unvollkommenen Temperatur-Bestimmung *Cassini*s („le thermomètre à la main") zu der heute noch in Gebrauch befindlichen Verbindung zweier *verschiedener* Metalle zu einer Messstange fand *Borda*, dessen aus Platin und Kupfer zusammengesetzte Stäbe bei der grossen französischen Gradmessung von 1792 u. ff. von *Delambre* und *Méchain* angewendet wurden.

Fig. 1.
Platin-Kupfer-Stange von *Borda*.
(Platinstab 12 Fuss lang, 6 Linien breit, 1 Linie dick.)



Wir geben in Fig. 1. die Zeichnung der *Borda*schen Stangen nach „*Puissant*, traité de géodésie", 2me édition, Paris 1819, I. S. 203—207. Die eigentliche Messstange ist von Platin, 2 Toisen = 12 Fuss = 3,898^{m} lang, 6 Linien = 13,5^{mm} breit und 1 Linie = 2,3^{mm} dick. Auf dieser Platinstange befindet sich eine Kupferstange, und zwar am linken Ende mit der Platinstange fest verbunden, während das rechte Kupfer-Ende sich frei ausdehnen kann, und etwa 0,16^{m} vom rechten Ende entfernt, mit einer Teilung *a b* und Nonius *n* in seiner Stellung gegen das Platin abgelesen

wird. Die so gemachten Ablesungen geben nun das Mass für die Ausdehnung, denn da Platin den Ausdehnungs-Coëfficient $\alpha = 0{,}000\,0089$ und Kupfer $\alpha' = 0{,}000\,0172$ (für 1° C.) hat, also α' etwa das Doppelte von α ist, lässt sich aus der Ausdehnungs-*Differenz* die Ausdehnung des Platins selbst berechnen. (Wir werden dieses bei den *Bessel*schen Stangen mit Eisen und Zink in § 11.—12. ausführlicher behandeln.)

Ausser dem Temperatur-Massstab *a b* zeigt Fig. 1. noch einen Massstab an dem Schieber *c d*, welcher dazu dient, den Zwischenraum je zweier aufeinander folgender Stangen ohne Stoss zu messen.

Solcher Stangen wie die hier beschriebene wurden je 4 zusammen auf Stativen mit Mikrometer-Schrauben eingerichtet; die Stangen-Neigungen wurden durch Libellen und Gradbogen bestimmt, und in Rechnung gebracht.

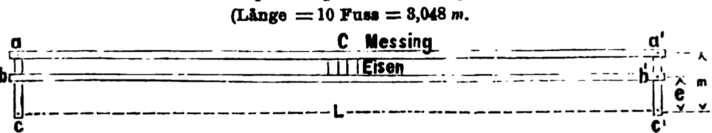
Mit diesen *Borda*schen Stangen sind (nach den Verh. d. 5. allg. Konf. d. Eur-Gr., Gen.-Ber. für 1877, S. 40) 7 Grundlinien gemessen worden, nämlich:

1798	Grundlinie	bei	Melun	11 842ᵐ
„	„	„	Perpignan	11 706
1804	„	„	Ensisheim	19 044
1818	„	„	Brest	10 527
1826	„	„	Bordeaux	14 119
1827	„	„	Gourbera	12 220
1828	„	„	Aix	8 067

*Colby*s Kompensations-Stangen.

Eine sinnreiche Anwendung des Grundgedankens der aus zwei verschiedenen Metallen zusammengesetzten Basismessstangen hat der englische General *Colby*, etwa um 1827, gemacht, indem er zwei Ausdehnungen von Eisen und Zink einander gegenseitig aufheben liess, so dass der Apparat selbstthätig kompensierend wird.

Fig. 2.
*Colby*s Kompensations-Stange.
(Länge = 10 Fuss = 3,048 *m*.



Nach Andeutung von Fig. 2. hat man eine Messing-Stange und eine Eisen-Stange in der Mitte bei *C* fest verbunden, so dass sich die Enden links *a* und *b*, rechts *a'* und *b'* frei ausdehnen können. Nun sind Hebel *a b c* und *a' b' c'* angebracht in den Verhältnissen:

$$\frac{a\,c}{b\,c} = \frac{a'\,c'}{b'\,c'} = \frac{m}{e}$$

wo *m* und *e* die Ausdehnungs-Coëfficienten für Messing und Eisen sind (etwa $m = 0{,}000\,019$ und $e = 0{,}000\,011$ für 1° C.). Nun ist leicht einzusehen, dass der zwischen *c* und *c'* gemessene Abstand *L* *unabhängig* von den Ausdehnungen ist.

Solcher Stangen in Holzkästen wurden 6 zusammen angewendet, und die Zwischenräume der Stangen wurden mikroskopisch gemessen.

Mit diesem Apparat wurden 2 Linien in England gemessen: Longh Foyle, nördl. Irland, 1827, 41 641 Fuss, und Salisbury, westl. von London, 1849, 34 841 Fuss; ferner 10 Linien in Indien.

Näheres hierüber giebt „Ordnance trig. survey“ (vgl. S. 10) S. 200 u. ff. mit Plate II, sowie im Auszug *Clarke*, Geodesy (vgl. S. 16) S. 163 u. ff.

Für die *Bayrische* Landesvermessung lieferte das mechanische Institut von *Utzschneider* und *Reichenbach* im Anfang dieses Jahrhunderts einen Apparat, welcher aus fünf in hölzernen Kästen eingelegten je 4 Meter langen in polierte Stahlkanten auslaufenden eisernen Stangen bestand. Die Zwischenräume der bei der Messung sich nicht berührenden Stäbe wurden durch stählerne Keile (12^{cm} lang, hinten $6{,}5^{mm}$, vorn $0{,}5^{mm}$ dick), die Neigungswinkel durch Libellen, und die Temperatur durch auf den Stangen ruhende Thermometer bestimmt (Generalbericht der Europ. Gradmessung 1867, S. 25). Die genaue Beschreibung und Zeichnung dieses *Reichenbach*schen Apparates findet sich in dem Werke: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage", München 1873, S. 3—65, von *v. Bauernfeind.*

Ähnlich diesem *Reichenbach*schen Apparat, in einzelnen Teilen noch sinnreicher ausgedacht, war *Schwerd*s Apparat, den er beschrieben hat in dem Werke: „Die kleine Speyerer Basis" u. s. w. Speier 1822.

Der Württembergische Basis-Apparat von Bohnenberger.

Auch dieser Apparat ist grösstenteils nach dem *Reichenbach*schen Muster unter *Bohnenberger*s Leitung im Jahr 1818 gearbeitet (s. „Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg", herausgegeben von *Kohler*. Stuttgart 1858, S. 45).

Die schon 1792 von *Borda* erfundene Verbindung zweier Metalle zur Bestimmung der Temperatur-Ausdehnung kam bei dem *Reichenbach*schen und *Bohnenberger*schen Apparat nicht zur Verwendung, sondern es wurden nur gewöhnliche Thermometer benützt.

Die Messstangen sind je 2 Toisen lang, 32 Pfund schwer und „genau nach der Peru-Toise auf 13° R reguliert" (hierüber haben sich später Bedenken erhoben).

Fig. 3.
Eiserne Messstange in einem Holzkasten.

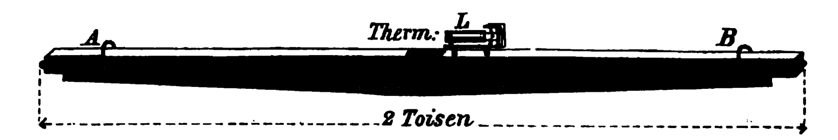
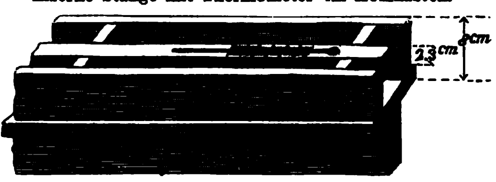


Fig. 4.
Eiserne Stange mit Thermometer im Holzkasten.



Der Querschnitt der Stangen ist ein Quadrat von $2{,}3^{cm}$ Seite. Jede Stange endigt einerseits in eine horizontale, andererseits in eine vertikale Schneide. Die Stangen sind in hölzerne Gehäuse eingeschlossen, wobei jedoch die Schneiden beiderseits hervorragen. Die Gehäuse haben unten Verstärkungsrippen *F* und oben Handhaben *A B* (Fig. 3.). In jede Stange ist ein Thermometer eingelassen (Fig. 4.), welches mittelst einer durch Glas verschlossenen und beim Nichtgebrauch bedeckten Öffnung in dem Holzgehäuse beobachtet werden kann. Bei *L* ist eine Libelle mit Gradbogen angebracht.

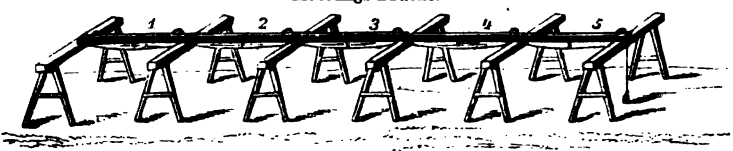
Der Messkeil ist von gehärtetem Stahl, abgesehen von der Handhabe ist er 12^{cm} lang, 5^{mm} breit, vorn $0{,}5^{mm}$ und hinten $6{,}2^{mm}$ dick.

Die Messungsbrücke bestand aus einfachen hölzernen Böcken.

Fig. 5.



Messungs-Brücke.



Die Basis Solitude-Ludwigsburg von 6687 Toisen oder rund 13 Kilometer Länge wurde in der Zeit vom 18. September bis 12. Oktober 1820 in 19 Arbeitstagen einmal gemessen.

Weiteres und Ausführlicheres über die älteren Basismess-Apparate giebt *Westphal* „Basisapparate und Basismessungen“, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1885, S. 257—274, S. 333—345, S. 373—385, S. 420—432. Ferner 1888, S. 189—203, S. 225—236, S. 337—346.

Reduktion einer Basislänge auf den Meereshorizont.

Ausser den Reduktionen für Temperatur, Stangenneigung, Zwischenräume u. s. w., welche bisher erwähnt worden sind, hat man bei Basismessungen, um sie unter sich trigonometrisch vergleichbar zu machen, auch noch die Reduktion auf den Meereshorizont (bzw. auf *N. N.*) anzubringen.

Wenn h das arithmetische Mittel der Höhen der einzelnen Stangenlagen über dem Vergleichs-Horizont ist, und r der Erdkrümmungs-Halbmesser, wenn ferner B die Summe der horizontalen Stangenlagen und B_0 deren zentrale Projektion auf den Horizont ist, so besteht die Beziehung:

$$\frac{B}{B_0} = \frac{r+h}{r} = 1 + \frac{h}{r}$$

oder auch hinreichend genähert:

$$B - B_0 = B\,\frac{h}{r}$$

Zur Übersicht geben wir hiezu einige Zahlenwerte:

h	$log\left(1+\frac{h}{r}\right)$	h	$log\left(1+\frac{h}{r}\right)$	
0^m	0,0000000·0	500^m	0,0000340·3	
100	68·1	600	408·4	Differenz
200	136·1	700	476·4	68·1
300	204·2	800	544·5	für 100^m
400	272·2	900	612·5	
500	340·3	1000	680·6	

Für die Basislänge $B = 1000^m$ und die Höhe $h = 100^m$ beträgt die Reduktion $-\,0{,}0157^m$.

Zuweilen kommt auch Reduktion auf einen anderen als den Meeres-Horizont vor, z. B. liegt der Horizont der Württembergischen Landes-Vermessung 844 Par. Fuss $= 274{,}16^m$ über dem Meer.

Um daher eine württembergische Dreiecksseite z. B. mit einer benachbarten badischen Seite zu vergleichen, deren Horizont in der Meereshöhe liegt, hat man den Logarithmus der württembergischen Seite um 0,0000186·6 zu vermindern. Zur Ver-

wandlung von württembergischen Landesvermessungs-Fussen im Vermessungs-Horizont in Meter im Meeres-Horizont hat man den Reduktions-Logarithmus 9.456 9886·5 (vgl. Band II. Anhang Seite [53]).

§ 11. Der Besselsche Basis-Mess-Apparat.

Als *Bessel* im Jahre 1834 zu seiner „Gradmessung in Ostpreussen" einen Basis-Mess-Apparat bauen liess, standen ihm die Erfahrungen von *Borda*, *Reichenbach*, *Repsold*, *Schwerd* u. A. zu Gebote (Platin und Kupfer, Messkeil u. s. w.).

Bessel hat zu diesen Erfahrungen sein eigenes Verständnis hinzugefügt, er hat alle Einrichtungen und Berechnungen so scharfsinnig erdacht und so folgerichtig durchgeführt, dass der Apparat immer als klassisches Beispiel gelten wird, obgleich er natürlich jetzt nach 50 Jahren nicht mehr der beste sein kann.

Mit dem *Bessel*schen Apparat sind bis jetzt 13 Grundlinien gemessen worden, nämlich 1) bei Königsberg 1834, 2) Kopenhagen 1838, 3) Upsala 1840, 4) Berlin 1846, 5) Bonn 1847, 6) Lommel in Belgien 1851, 7) Ostende 1853, 8) Strehlen in Schlesien 1854, 9) Braak in Holstein 1871, 10) Grossenhain in Sachsen 1872, 11) Ensisheim im Elsass 1877, 12) Göttingen 1880, 13) Meppen 1883.

Obgleich der Apparat bei allen diesen Messungen in seinen Hauptteilen derselbe geblieben ist, und obgleich damit die Art der Basismessung einen gewissen konservativen Charakter angenommen hat, ist doch auch hier die Wissenschaft nicht stehen geblieben; seit der Braaker Basis ist die Art der Massvergleichung und die Ausführung der Messung (z. B. die Ablotung) gegen früher stetig vervollkommnet worden, und vor der Göttinger Messung hat der Chef der trigonometrischen Abteilung, *Schreiber*, den (1830 mit den rohesten technischen Hilfsmitteln hergestellten) Apparat und alle Einzelheiten seiner Anwendung eingehender Kritik unterworfen, woraus die zwei letzten Messungen bei Göttingen und Meppen hervorgegangen sind, welche zur Zeit als die beste Ausnützung des *Bessel*schen Gedankens zu betrachten sind.

Wir geben im Folgenden die Beschreibung und die wichtigsten Zeichnungen des Apparates, teils nach der ersten Mitteilung von *Bessel* selbst („Gradmessung in Ostpreussen", S. 1—51 und Tafel I—V), teils nach den vor Göttingen angebrachten Verbesserungen.

Der Bessel sche Basis-Mess-Apparat.

(Darstellung in natürlicher Grösse.)

Fig. 1.
Ansicht der Stangen-Enden (Anordnung von 1834).
(E = Eisen, Z = Zink, St = Stahl, T = Tragstange, R = Rollen).

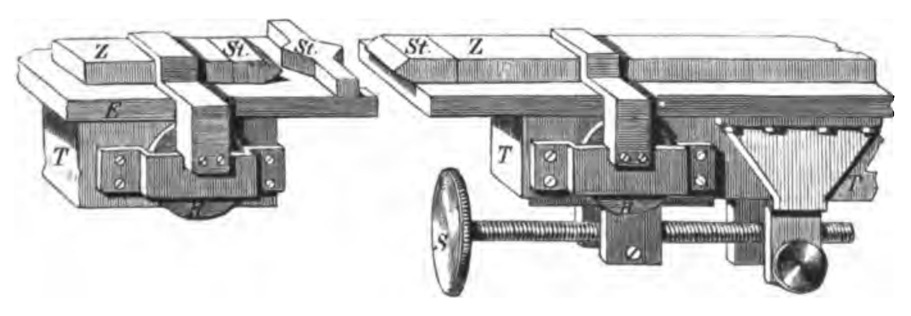


Fig. 2.
Querschnitt der Stangen mit Massen in Pariser Linien (1 Par. Linie = 2,26 *mm*). (Anordnung von 1834.)

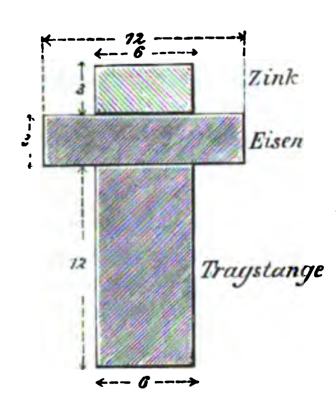


Fig. 3.
Einweis-Scheibe *E E* mittelst des Rahmens *R* auf das vordere Stangenende aufgeschraubt. (Anordnung von 1880.)

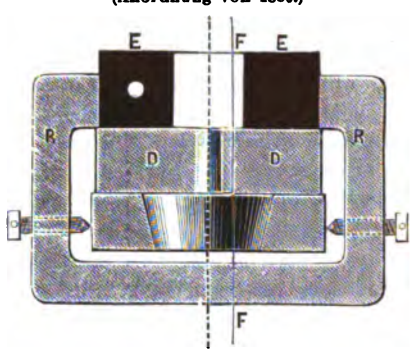


Fig. 4.
Vorderes und hinteres Stangen-Ende (Anordnung von 1880) im Längsschnitt und im Grundriss (natürl. Grösse).

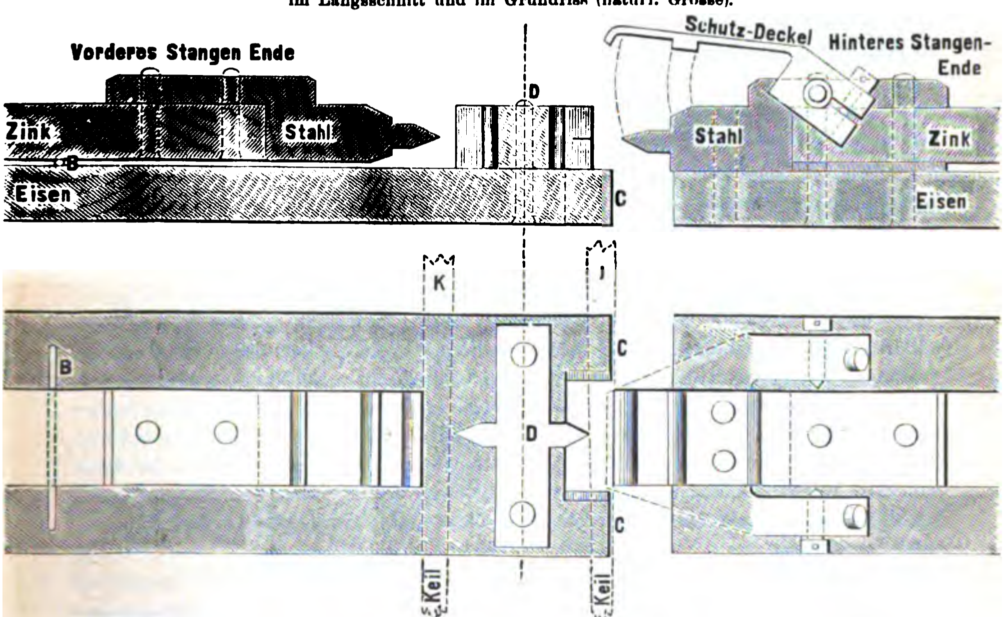


Fig. 5.
Der gläserne Messkeil (natürl. Grösse).
(20 = 2 Par. Linien = 4,5 *mm* 8 = 0,8 Par. Linien = 1,8 *mm*)

(Ordinaten-Differenz, zwischen 2 Strichen, = 0,01 Par. Linien = 0,0226 *mm*.)

I. Die Messstangen.

Es werden 4 Messstangen zusammen gebraucht, jede Messstange ist 3,898^{m} (= 2 Toisen) lang, 27^{mm} breit und 7^{mm} dick. Dieses bezieht sich auf die eigentliche *eiserne* Messstange, auf welcher aber eine zweite, halb so breite *Zink*-Stange aufliegt, wie aus dem Querschnitt Fig. 2. zu ersehen ist.

Die Zinkstange ist an dem *einen Ende* mit der Eisenstange fest verbunden, im übrigen liegt sie frei auf und kann sich gegen die Eisenstange ausdehnen. Die horizontale Fuge zwischen Eisen und Zink gab aber zu Reibungen Veranlassung, und deswegen wurde diese Fuge später auf etwa 1^{mm} erweitert, und durch kleine Rollen ausgefüllt, welche in Fig. 4. links durch *B* angedeutet sind.

Da die flachen Eisen- und Zinkstangen sich auf eine Länge von nahe 4^{m} nicht freitragen könnten, ist ihnen eine *Tragstange* hochkantig untergelegt, jedoch durch Vermittlung von mehreren Rollenpaaren, nach Andeutung von Fig. 1. Die Bewegung auf den Rollen ist aber nur eine geringe, und wird durch die Mikrometer-Schraube *S* (wie an der Alhidade eines Theodolits) geregelt.

Die *Holzkästen*, in welche die Stangen eingelegt werden, sind in unseren Figuren S. 76 und 77 nicht gezeichnet, sie sind etwa 23^{cm} breit und ebenso hoch.

Auch die Libellen, welche auf den 4 Stangen zur Neigungs-Bestimmung angebracht sind, mögen hier nur kurz erwähnt werden. Gewöhnliche Quecksilber-Thermometer wurden mit in die Kästen gelegt, obgleich sie neben der Zink- und Eisen-Verbindung nicht unbedingt nötig sind, und nur ausnahmsweise abgelesen wurden.

Aus den erwähnten Holzkästen ragen nun die Stangen nur mit ihren *Enden* hervor, worüber noch einiges zu sagen ist:

Fig. 1. zeigt zwei Stangen-Enden und man erkennt daraus die Art des Aneinanderlegens der Stangen. Es endigt nämlich die linke Stange in eine vertikale Stahlschneide, und die rechte Stange in eine horizontale Stahlschneide, und diese beiden Schneiden werden einander so nahe gebracht, dass der übrig bleibende Zwischenraum durch einen Messkeil gemessen werden kann.

Fig. 4. zeigt die neuere Anordnung der Stahlschneiden und deren Verbindung mit den Eisen- und Zinkstangen. Dabei wurden auch die horizontalen Schneiden der 4 Stangen mit gelenkartig niederzuklappenden Schutzdeckeln versehen, wodurch dem früher nicht seltenen Falle von Beschädigung dieser Schneiden vorgebeugt wird, während die vertikalen Schneiden durch die vorspringenden Enden *C* der darunter befindlichen Eisenstangen schon genügend geschützt sind. (Der Schutzdeckel ist in dem Grundriss von Fig. 4. nur teilweise gezeichnet, indem dessen linker Teil nur punktiert angedeutet ist, damit die darunter liegende horizontale Schneide nicht dem Anblick entzogen wird.)

Die auf jeder Eisenstange aufliegende *Zinkstange* ist am einen (linkseitigen) Ende durch Schrauben und Lötung mit der Eisenstange verbunden, von diesem Ende bis zum andern Ende ist sie ohne Verbindung mit der Eisenstange. Auf der entgegengesetzten (rechten) Seite endigt die Zinkstange in eine horizontale Stahlschneide, deren jeweiliger Abstand von einer vertikalen, auf der Eisenstange befestigten Stahlschneide durch einen horizontal eingeschobenen Keil gemessen wird.

Hier ist auch noch die kleine *Einweis-Scheibe* $E E$ Fig. 3. S. 77, zu erwähnen, welche mittelst eines umgreifenden Rahmens R an dem rechtseitigen Ende D jeder Stange befestigt ist. Von dieser Scheibe mit ihren drei schwarzen und weissen Feldern wird bei der Geradrichtung der Basis weiter die Rede sein.

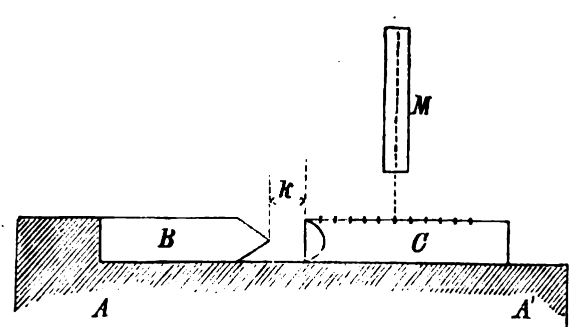
II. *Die Messkeile.*

Die bei der Göttinger Messung 1880 gebrauchten Glaskeile sind in Fig. 5. S. 77, in natürlicher Grösse gezeichnet.

Die Zunahme der Keildicke von einem Strich zum folgenden ist $= 0,01$ Pariser Linien, und da man noch 0,1 des Intervalls schätzen kann, so hat man Ablesungen von 0,001 Linien für die Keildicken (0,001 Par. Linien $= 2,256^{\mu}$).

Die Bestimmung der Keildicken geschah durch eine Einrichtung, welche durch die schematische Fig. 6. angedeutet ist.

Fig. 6.
Bestimmung der Keildicken k.



Auf einer festen Unterlage $A A'$ befindet sich ein Cylinder B mit horizontaler Schneide befestigt, und ein zweiter Cylinder C, welcher der horizontalen Schneide des Cylinders B eine vertikale Schneide gegenüberstellt, ist auf dieselbe Unterlage $A A'$ beweglich aufgelegt. Dieser bewegliche Cylinder C trägt auf seiner oberen Fläche eine Teilung, welche durch ein lotrecht darüber angebrachtes Mikroskop M abgelesen werden kann. Man schiebt den Cylinder C mit seiner Schneide gegen den Cylinder B berührend an, und liest die Teilung auf C am Faden des Mikroskopes ab; zieht man dann den Cylinder C ein wenig zurück, und füllt den Zwischenraum k zwischen den beiden Schneiden durch den zu untersuchenden Messkeil aus, wobei eine zweite Ablesung auf C gemacht wird, so ist die Differenz der Ablesungen auf C gleich der betreffenden Keildicke k.

Auf diese Weise wurde jeder Keil an mehreren Stellen in Bezug auf seine Dicke untersucht, es zeigte sich, dass die Keildicken auf 0,01 Linien genau proportional den Keillängen waren, dass also die Keilflächen bis zu dieser Genauigkeit eben geschliffen waren. Nach diesen Bestimmungen, welche in Fig. 6. angedeutet sind, wurden Tabellen angelegt, aus denen für jede Keilablesung die zugehörige Keildicke entnommen werden kann.

Die Messkeile dienen zwei verschiedenen Zwecken: erstens werden damit die Zwischenräume zwischen je zwei Stangen-Enden gemessen (Keil J Fig. 4. S. 77) und zweitens werden damit die Verschiebungen der Zinkstangen gemessen (Keil k Fig. 4. S. 77).

Die ganze Einrichtung von Zink und Eisen mit Keilmessung ihrer Differenz nennt man auch *Metall-Thermometer.*

III. Die Messungs-Brücke.

Als Auflager für die Stangenkästen benützte *Bessel* kleine hölzerne Böcke, welche jedoch nicht geradezu auf den Boden gestellt wurden, sondern es wurden zuerst je drei 20^{cm} lange eiserne Nägel in den Boden geschlagen, darauf ein Brett gelegt und darauf ein Bock gestellt, der ausserdem mit etwa 50^{kg} belastet wurde, um seine Standfestigkeit zu erhöhen.

Auf je zwei Böcke wurden dann die einzelnen Stangenkästen aufgelegt und sowohl nach der Höhe, als der Quere nach, eingerichtet. Dieses Einrichten geschah von der Königsberger Messung 1834 bis zur Braaker Messung 1871 von freier Hand, und war daher sehr mühsam. Nach den Erfahrungen von Braak wurden die hölzernen Böcke mit Kurbelschrauben versehen, zum raschen mikrometrischen Regulieren der Höhen sowohl als auch der Geradrichtung. Diese verbesserten Böcke sind seitdem bei Grossenhain in Sachsen und bei Oberhergheim im Elsass mit Vorteil gebraucht, zur Basismessung bei Göttingen und Meppen aber durch neue, aus Schmiedeeisen konstruierte Böcke ersetzt worden. Die hölzernen Unterlagsbretter und die eisernen 20^{cm} tief in den Boden einzuschlagenden Nägel, auf welchen diese Bretter ruhen, blieben dieselben wie bei *Bessel.* („Gradm. i. Ostpr.“ Tafel IV.)

Wegen der Standfestigkeit ist die Auflegung der Stangen so *nieder* als möglich gehalten. Die Böcke sind nur $0{,}63^{m}$ hoch, so dass mit Zurechnung der Unterlagsbrettdicke und der halben Kastenhöhe die Stangenschneiden nur $0{,}77^{m}$ über dem Erdboden zu liegen kommen, was gerade noch Handhabung und Ablesung der Keile ohne zu unbequeme Körperlage gestattet.

§ 12. Massbestimmungen des Besselschen Apparates.

I. Das Metall-Thermometer.

Wir betrachten zunächst das Metall-Thermometer in seiner einfachsten Gestalt (Fig. 1.). Eine Eisenstange von der Länge l und eine Zinkstange von der Länge l' werden so aufeinander gelegt, dass die linkseitigen Enden zusammentreffen, dann ist der Abstand k der beiden rechten Enden die Angabe des Metall-Thermometers.

Fig. 1.
Metall-Thermometer

l' k l

Bei irgend welcher Temperatur wird $l = l'$ werden, und die gemeinsame Länge beider Stäbe sei in diesem Falle $= L$. Zählt man nun die Temperatur t' von jenem Stand rückwärts, nennt e und z die Ausdehnungs-Coëfficienten von Eisen und Zink, so ist:

$$l = L(1 - e\,t') \qquad l' = L(1 - z\,t') \tag{1}$$

Die Differenz ist:

$$l - l' = L\,(z - e)\,t' = k \tag{2}$$

Durch Elimination von t' erhält man:

$$l = L - \frac{e}{z - e}\,k \tag{3}$$

Den relativen Ausdehnungs-Coëfficienten, welcher hier Coëfficient von k ist, bezeichnen wir mit m, d. h.:

$$\frac{e}{z-e} = m \qquad (4)$$

und damit haben wir:

$$l = L - m\,k\text{*)} \qquad (5)$$

Eine Gleichung von der Form (5) gilt für jede der 4 Stangen.

Dürfte man auf die *Gleichheit* der Ausdehnungen bei allen 4 Stangen (die aus einem Stück geschnitten sind) rechnen, so wären die Ausdehnungs-Coëfficienten e und z, für Eisen und Zink als konstant zu betrachten. *Bessel* nimmt jedoch für jede Stange besondere Werte e und z, also auch einen besonderen Wert m an, und demnach bestehen entsprechend (5) für die 4 Stangen folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= L_1 - k_1\,m_1 \\ l_2 &= L_2 - k_2\,m_2 \\ l_3 &= L_3 - k_3\,m_3 \\ l_4 &= L_4 - k_4\,m_4 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wo k_1, k_2, k_3, k_4 die Keilmasse der Metall-Thermometer der 4 Stangen bedeuten.

Für die Längen L_1, L_2, L_3, L_4 werden andere Formen eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= L + x_1 \\ L_2 &= L + x_2 \\ L_3 &= L + x_3 \\ L_4 &= L + x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

dabei sind x_1 x_2 x_3 x_4 die Korrektionen, welche an einem gemeinsamen Wert L noch anzubringen sind. Dieser Wert L ist willkürlich; man kann deswegen z. B. L als arithmetisches Mittel der 4 Werte L_1, L_2, L_3, L_4 annehmen, also:

$$L = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{4} \qquad (8)$$

und damit wird für die Korrektionen x die Bedingung erhalten:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad (9)$$

damit gehen die Gleichungen (6) über in die folgenden:

$$\begin{aligned} l_1 &= L + x_1 - k_1 m_1 \\ l_2 &= L + x_2 - k_2 m_2 \\ l_3 &= L + x_3 - k_3 m_3 \\ l_4 &= L + x_4 - k_4 m_4 \\ \text{Mittel:} \quad l &= L \qquad\quad - k\,m \end{aligned} \qquad (10)$$

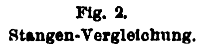
---

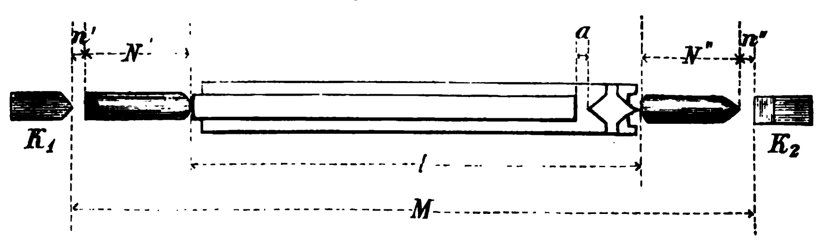
*) *Anmerkung*: Wenn man die einzelnen Verbindungsstücke zwischen Zink und Eisen, Stahlschneiden, Lötfugen u. s. w. besonders betrachtet, so findet man eine etwas andere Gleichung als (5); indessen bleibt die Gleichung immer *linear*, L und m bekommen ein wenig andere Bedeutungen als nach (1) und (4); für die weitere Theorie ist das jedoch ohne Einfluss. (Die genaueren Formeln waren in der vorigen Auflage 1878, S. 89—90, Gleichungen (1)—(6) angegeben).

Es ist hier auch zu bemerken, dass die Bezeichnungen teilweise andere sind als bei *Bessel* in § 2. der Gradmessung in Ostpreussen, wo λ', λ'', λ''', λ'''' statt unserer L_1, L_2, L_3, L_4 und a, b, c, d statt unserer k_1, k_2, k_3, k_4 stehen.

Hier hat L für das Mittel aus allen 4 Stangen dieselbe Bedeutung, wie L_1, L_2, L_3, L_4 nach (6) für die einzelnen Stangen.

II. Gegenseitige Vergleichung der 4 Stangen. Bestimmung der x und m.


Fig. 2.
Stangen-Vergleichung.



In Fig. 2. bedeuten K_1 und K_2 zwei möglichst unveränderliche, auf gemeinsamer Unterlage befestigte Stahlkeile, welche zum Zweck des scharfen Anstossens in Schneiden endigen. Der Abstand M der Schneiden ist etwas grösser als die Stangenlänge l, so dass zum Ausfüllen ausser der Stange l noch zwei Cylinder N' und N'' und die Keilmasse n' und n'' nötig sind. (Die Ausfüll-Cylinder N' und N'' sind nur aus Gründen der Bequemlichkeit angebracht und für das Prinzip des Apparates unwesentlich.) Denkt man sich nun die Stange Nr. 1 in den Vergleich-Apparat Fig. 2. eingelegt, so erhält man eine Gleichung:

$$M = l_1 + (N' + N'') + (n_1' + n_1'') \qquad (11)$$

Es ist aber nach (10):

$$l_1 = L + x_1 - k_1 m_1 \qquad (12)$$

Nun wird, um alles Gleichartige zusammenzufassen, gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} M - (N' + N'') - L &= C \\ n_1' + n_1'' &= n_1 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Damit erhält man aus den zwei vorhergehenden Gleichungen (11) und (12) die folgende:

$$n_1 = C - x_1 + k_1 m_1 \qquad (14)$$

Wenn man nach einander die 4 Stangen einlegt, so erhält man entsprechend (14) folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -n_1 + C - x_1 + k_1 m_1 \\ 0 &= -n_2 + C - x_2 + k_2 m_2 \\ 0 &= -n_3 + C - x_3 + k_3 m_3 \\ 0 &= -n_4 + C - x_4 + k_4 m_4 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Z. B. gaben die 4 ersten solchen Vergleichungen folgende erste Gruppe von Gleichungen dieser Art, mit eingesetzten Beobachtungswerten:

$$\text{Gruppe I.} \quad \left.\begin{aligned} 0 &= -3{,}9693 + C_1 - x_1 + 1{,}8960\, m_1 \\ 0 &= -3{,}3600 + C_1 - x_2 + 1{,}9957\, m_2 \\ 0 &= -3{,}4875 + C_1 - x_3 + 1{,}3387\, m_3 \\ 0 &= -3{,}4506 + C_1 - x_4 + 1{,}3377\, m_4 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Alle Keilmasse, z. B. 3,9693 und 1,8960, sind hier in Pariser Linien ($=$ 2,2558^{mm}) gezählt.

Ähnlich wie (16) wurden noch 8 andere Gruppen von Vergleichungen unter möglichst verschiedenen Umständen gewonnen, und die 36 Gleichungen nach der M. d. kl. Q. aufgelöst. Dabei sind folgende Unbekannte zu bestimmen:

1) $C_1\ C_2\ \ldots\ C_9$. für jede Gruppe ein *besonderes* C (nach 13), damit den Änderungen des Apparates von Gruppe zu Gruppe Rechnung getragen wird,

2) $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, also nur *drei* unabhängige x,

3) $m_1\ m_2\ m_3\ m_4$.

Man hat also in den 36 Gleichungen die Anzahl von $9 + 3 + 4 = 16$ Unbekannten. Die Auflösung nach der M. d. kl. Q. gab die verschiedenen C und ferner:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = -0{,}3015 \text{ Par. Linien} & & m_1 = 0{,}54033 \\ x_2 = +0{,}3986 \quad " & & m_2 = 0{,}55976 \\ x_3 = -0{,}0713 \quad " & & m_3 = 0{,}57575 \\ x_4 = -0{,}0258 \quad " & & m_4 = 0{,}58103 \\ \text{Summe} = 0{,}0000 & & \text{Mittel } m = 0{,}56422 \end{array}\right\} \tag{17}$$

und den mittleren Fehler einer Vergleichung:

$$m = \pm 0{,}00353 \text{ Par. Linien} = \pm 0{,}0080^{mm} \tag{18}$$

oder relativ:

$$\frac{m}{l} = \frac{0{,}00353}{1728} = 0{,}000\,002 = 2 \text{ Milliontel} \tag{18a)*}$$

III. Vergleichung der Stangen mit dem Normalmass.

Da durch die $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ die 4 Stangen bereits unter sich verglichen sind, genügt es, *eine* der 4 Stangen mit dem Normalmass zu vergleichen. Das Normalmass war eine von *Arago* und *Zahrtmann* in Paris mit der Peru-Toise verglichene Toise, deren Gleichung ist:

$$T = 863{,}835384\,(1 + 0{,}000\,014\,588\,R) \tag{19}$$

wo die Länge in Pariser Linien und die Temperatur R in Réaumur-Graden gemessen ist.

Hiezu nimmt man die Stange Nr. 1, welche nach (10) und (17) die Gleichung hat:

$$l_1 = L - 0{,}3015 - 0{,}54033\,k_1 \tag{20}$$

Legt man diese Stange Nr. 1. und die Toise T nach einander in den Vergleich-Apparat Fig. 2., so erhält man durch die verschiedenen Keilmasse n eine Vergleichung, und eine Beziehung zwischen den Gleichungen (19) und (20), aus welcher eine Bestimmung von L hervorgeht.

Es wurden 12 solcher Bestimmungen gemacht, und im Mittel erhalten:

$$L = 1729{,}1167 \pm 0{,}000\,984 \text{ Pariser Linien} \tag{21}$$

und der mittlere Fehler *einer* solchen Vergleichung

$$\mu_1 = \pm 0{,}003\,407 \text{ Par. Linien} = \pm 0{,}0077^{mm} \tag{22}$$

oder relativ:

$$\frac{\mu_1}{L} = 0{,}000\,0020 = 2 \text{ Milliontel} \tag{23}$$

$$\frac{0{,}000984}{L} = 0{,}000\,000\,6 = 0{,}6 \text{ Milliontel} \tag{23a)*}$$

*) Es hat sich später ergeben, dass diese sehr kleinen mittleren Fehler der wirklichen sachlichen Genauigkeit wahrscheinlich nicht entsprechen, sondern zu klein angenommen sind. vgl. den späteren § 15.

Nun kann man für jede der 4 Stangen ihre Gleichung bilden, nämlich nach (10), (17) und (21):

$$\left.\begin{array}{lrl} & l_1 = & 1728,8152 - 0,54033\,k_1 \\ & l_2 = & 1729,5153 - 0,55976\,k_2 \\ & l_3 = & 1729,0454 - 0,57575\,k_3 \\ & l_4 = & 1729,0909 - 0,58103\,k_4 \\ \text{Mittel} & l = & 1729,1167 - 0,56422\,k \\ \text{Allgemein} & l = & L \quad - \quad m\,k \end{array}\right\} \qquad (24)$$

IV. Vergleichung der Metall-Thermometer und der Quecksilber-Thermometer.

Obgleich die Kenntnis der Temperatur der Messstangen und der Einzel-Ausdehnungen des Eisens und des Zinks, aus welchen sie zusammengesetzt sind, nicht durchaus nötig ist, da ja jede Stangenlänge l nach einer Gleichung von der Form (24) sich als Funktion des inneren Keilmasses k ergiebt, war es doch erwünscht, auch eine Beziehung zwischen den Metall-Thermometer-Keilmassen k und den gewöhnlichen in die Kästen mit eingelegten Quecksilber-Thermometern zu erhalten. Es wurden hiezu bei möglichster Temperatur-Ruhe 160 Vergleichungen angestellt, welche im Mittel für die 4 Stangen gaben:

$$k = 2,1249 - 0,045489\,R \qquad (25)$$

$$\text{oder } R = 46,712^\circ - 21,983\,k \qquad (25\text{a})$$

Dabei ist k das Keilmass, welches für die 4 Stangen einzeln mit k_1, k_2, k_3, k_4 bezeichnet wurde, und R die Angabe des Quecksilber-Thermometers in Réaumur-Graden.

Diesem entspricht folgendes:

$R =$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	46,71°		(25 b)
$k =$	2,125	1,897	1,670	1,443	1,215	0,988	0,760	0,000	Par. L.	

V. Bestimmung der Einzel-Ausdehnungen von Eisen und Zink.

Wenn man eine Beziehung zwischen dem Keilmass k und der Temperatur t (z. B. in R° oder C°) gefunden hat, von der Form (25) oder allgemeiner geschrieben

$$k = k_0 - p\,t \qquad (26)$$

so kann man auch den relativen Ausdehnungs-Coëfficienten m in seine Bestandteile e und z zerlegen. Wir haben nämlich nach (4), (5) und (24):

$$m = \frac{e}{z - e} \qquad l = L - m\,k$$

also wegen (26):

$$l = L - m\,k_0 + m\,p\,t = (L - m k_0)\left(1 + \frac{m\,p}{L - m\,k_0}\,t\right) \qquad (26\text{a})$$

Daraus giebt sich zu erkennen, dass der Ausdehnungs-Coëfficient e der Eisenstange l ist:

$$e = \frac{m\,p}{L - m\,k_0} = \frac{m\,p}{l_0} \qquad (27)$$

und da $z - e = e : m$ ist, hat man nun auch:

$$z - e = \frac{p}{L - m\,k_0} = \frac{p}{l_0} \qquad (28)$$

Hiebei ist $L - m k_0 = l_0$ diejenige Stangenlänge l, welche für $t = 0$ stattfindet.

Für die Mittelwerte der *Bessel*schen Stangen haben wir $k_0 = 2{,}1249$ (für t in $R°$), $m = 0{,}56422$, womit berechnet wird $l_0 = 1727{,}9178$ und insbesondere:

$$e = 0{,}000\,014\,854 \quad \text{und} \quad z = 0{,}000\,041\,180$$

(Die letzten Stellen dieser Zahlen sind nur genähert richtig, entsprechend der Anmerkung zu der Gleichung (5) auf Seite 81.)

Nun hat man für die Messstangen *zwei* Arten von Längen-Bestimmungen, erstens mit den Metall-Thermometern nach der Gleichung (24) und zweitens mit den eingelegten Quecksilber-Thermometern nach (26a).

Bessel hat die Königsberger Basis nach *beiden* Arten berechnet, und gefunden, dass die Quecksilber-Thermometer mehr gaben, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{für die erste Messung:} & +\ 16{,}346^{l} = 20^{mm} & \text{für } 1^{km} \\ \text{für die zweite Messung:} & +\ 7{,}406^{l} = 9^{mm} & \text{für } 1^{km} \\ \text{Mittel:} & +\ 11{,}876^{l} = 15^{mm} & \text{für } 1^{km} \end{array}\right\} \quad (29)$$

Der Grund dieser erheblichen Unterschiede wurde darin gefunden, dass die eingelegten Quecksilber-Thermometer den Temperatur-*Änderungen* Morgens und Abends viel rascher folgen, als die massiven und trägen Eisen- und Zinkstangen. Insofern nun diese Stangen ihr eigenes Thermometer sind, wurde ihren Angaben der Vorzug gegeben und die Quecksilber-Thermometer nicht weiter berücksichtigt.

Die Basis wurde in zwei Abschnitten je zweifach hin und her gemessen, und die Berechnung nach den Metall-Thermometern gab folgendes:

Abschnitt	Messung I.	Messung II.	Differenz d = I—II	
s_1	$441{,}1852^{m}$	$441{,}1839^{m}$	$+\ 1{,}3^{mm}$	
s_2	$1381{,}1571^{m}$	$1381{,}1632^{m}$	$-\ 6{,}1^{mm}$	(30)
Summe	$1822{,}3423^{m}$	$1822{,}3471^{m}$	$-\ 4{,}8^{mm}$	

VI. Fortgesetzte Mass-Bestimmungen für den Besselschen Apparat.

In ähnlicher Weise, wie wir im Vorstehenden von der Königsberger Messung beschrieben haben, wurden auch später Mass-Bestimmungen zu den in § 11. S. 76 erwähnten Basis-Messungen gemacht, z. B.:

$$\left.\begin{array}{lll} 1834 & \text{Königsberg} & l = 1729{,}1167^{l} - 0{,}56422\,k \\ 1846 & \text{Berlin} & l = 1729{,}0999^{l} - 0{,}55228\,k \end{array}\right\} \quad (31)$$

Die nicht unerheblichen Änderungen in diesen Zahlen haben zu der Anschauung geführt, dass die Stangen im Laufe der Jahre ihre molekulare Struktur geändert hätten. („Publik. d. geod. Inst. Massvergleichungen" I, 1872, S. 38—46, Bericht von General *Bayer*.)

Um das Wesentliche der hierauf bezüglichen Fragen anzuführen, reduzieren wir die verschiedenen Formeln (31) auf den *Mittel*wert $k = 1{,}4$, d. h. wir formen so um:

$$\left.\begin{array}{lll} 1834 & \text{Königsberg} & l = 1728{,}3268^{l} - 0{,}56422\,(k - 1{,}4) \\ 1846 & \text{Berlin} & l = 1728{,}3267^{l} - 0{,}55228\,(k - 1{,}4) \end{array}\right\} \quad (32)$$

entsprechend der Formel $l = L' - m\,(k - 1{,}4)$

Nun sind die Absolutglieder fast gleich geworden, während sie vorher bei (31) um 0,0168 Par. Linien $= 0{,}038^{mm}$ verschieden waren.

Die Absolutglieder in (31) gelten für $k = 0$, was einer Temperatur von etwa 47° *R* entspricht, welche beim Gebrauche nie vorkommt, und deswegen ist die Form (32) mit dem Mittelwert $k = 1{,}4$, entsprechend einer Temperatur von etwa 16° *R*, zur sachlichen Vergleichung viel mehr geeignet.

Auch die Änderung der Ausdehnungs-Coëfficienten m, e, z, welche sich z. B. zwischen den Jahren 1834 und 1846 als Verkleinerung von e und z zeigt, kann ohne die Annahme molekularer Änderungen erklärt werden.

Eine Eigentümlichkeit des Apparates besteht auch darin, dass die Abnützung der äusseren Schneiden die Stangen verkürzt, wie immer bei Abnützung von Endmassen, dass aber eine Abnützung der *inneren* Schneiden, zwischen welchen der Temperaturkeil k (Fig. 4. S. 77) eingelegt wird, die Stangen scheinbar *verlängert*. Wenn nämlich dieselbe Stangenlänge l nach der Formel (32) zweifach dargestellt ist

$$l = L' - m\,(k - 1{,}4) \quad \text{oder} \quad = L'' - m\,(k' - 1{,}4)$$

und wenn, durch Abnützung der inneren Schneiden, k' grösser als k ist, so muss auch L'' grösser als L' sein. Wenn also z. B. in (32) die beiden Werte $L' = 1728{,}3268$ und $1728{,}3267$ nach Verlauf von 12 Jahren fast gleich sind, so kann doch die wirkliche Länge l bei einer bestimmten Temperatur durch Abnützung der äusseren Schneiden kürzer geworden sein, wenn gleichzeitig eine noch stärkere Abnützung oder Auseinandertreibung der inneren Schneiden stattgefunden hat.

Man vgl. hierüber „Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft" 1877, S. 150 bis 152, und eine Abhandlung von *A. Börsch*, „astr. Nachr." 99. Band (1881), Nr. 2364. Hierauf bezieht sich auch eine Publikation des königl. preuss. geodätischen Instituts, „die Ausdehnungs-Coëfficienten der Küsten-Vermessung" von Dr. *Alfred Westphal*, Berlin 1881.

§ 13. Die Göttinger Basismessung.

Wie schon früher in § 11. S. 76 berichtet wurde, zeichnet sich die Göttinger Basismessung vom Jahre 1880 vor den früheren mit dem *Bessel*schen Apparat gemachten Messungen dadurch aus, dass hier zum erstenmal die von General *Schreiber* vorgenommenen Verbesserungen des Apparates und des Messungs-Verfahrens zur Anwendung kamen.

Verfasser hat damals aktiv an der Basismessung teilgenommen (als Keilleger und Abloter) und hat dadurch umsomehr Veranlassung, diese Messung hier genau zu beschreiben, entsprechend einem bereits in der „Zeitschr. f. Verm." 1880, S. 377—403 veröffentlichten Berichte.

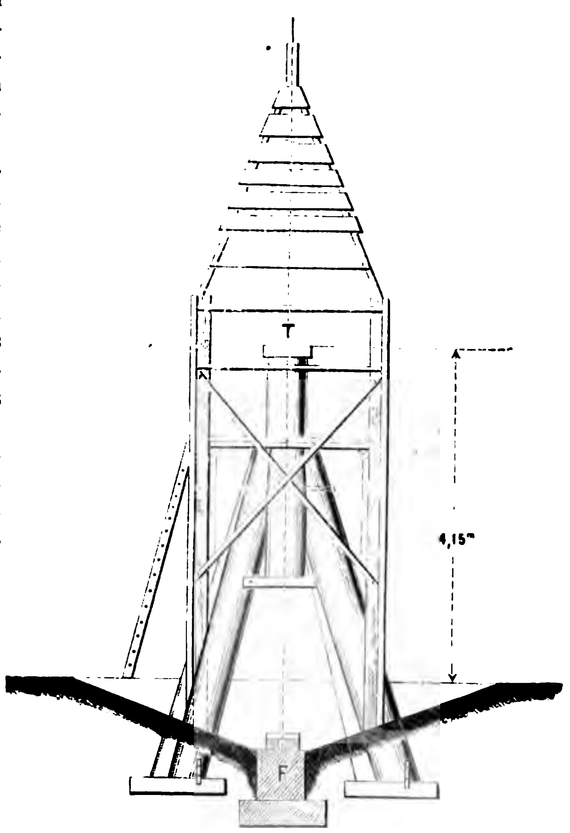
I. Gesamt-Anordnung der Basis.

Das Leinethal, in der Gegend von Göttingen, bietet südlich von dieser Stadt genügend festen und horizontalen Boden östlich der Landstrasse. Nach mehrfachen Rekognoszierungen, welche sich namentlich auf ein günstig zu gestaltendes Basisnetz bezogen, wurde diese Gegend gewählt mit einer 5^{km} langen Linie. Weitere südliche Erstreckung der Basis wäre wohl wünschenswert gewesen, wurde aber durch die Boden-Verhältnisse verhindert.

Das Längenprofil der Basis hat in den ersten zwei Dritteln ziemlich horizontale Erstreckung, während im letzten südlichen Drittel eine Ansteigung bis 31^m über dem Anfang stattfindet. Dort betrugen die Steigungen mehrfach bis zu 3°.

Der nördliche und der südliche Endpunkt werden hinsichtlich ihrer Festlegung und trigonometrischen Bezeichnung durch Fig. 1. veranschaulicht. Die Ablotungen des Instrumenten-Standpunktes T auf den Basispunkt F, beziehungsweise die betreffenden Centrierungen, wurden durch seitlich aufgestellte Theodolite bewirkt, wodurch auch 4 äussere Fundament-Versicherungen beigezogen wurden. Die Länge der Basis wurde *vorläufig* zu 5193ᵐ bestimmt und dann in 33 meist gleiche Teile geteilt durch Anlage von 32 Zwischen-Festlegungen. Hiezu dienten kupferne Bolzen, mit einzusetzenden stählernen in Nadeln endenden Pinnen mit Fundierung in Cement, wie in Fig. 1. unten bei F angedeutet ist. Hieraus ergiebt sich der mittlere Wert einer Teilstrecke = 156ᵐ = 10 Stangenlagen, während die erste und letzte Strecke etwas länger waren.

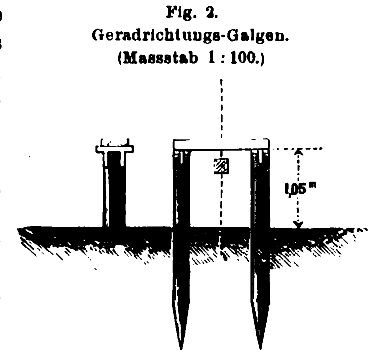
Fig. 1.
Endpunkts-Pyramide mit Hänge-Pfeiler.
(Massstab 1 : 100.)



II. *Gerad-Steckung.*

Um die 32 Zwischen-Festlegungen in die Basisrichtung zu bringen, überhaupt um die Basis für die Messung gerade zu stecken, hatte man nach erster vorläufiger Absteckung eine ebenso grosse Zahl von „Galgen“ aufgestellt, je 15,6ᵐ = 1 Lage, nach Süden von den Festlegungen entfernt. Die technische Rüstung dieser Galgen, mit 1,5ᵐ tief eingebohrten und eingerammten Pfählen von 20ᶜᵐ Dicke, zeigt Fig. 2. Die 35ᶜᵐ breiten und 9ᶜᵐ dicken Deckbohlen dieser Galgen dienten bei der durchlaufenden Geradrichtung zum Aufstellen der Theodolite, beziehungsweise der Signalscheiben, beide centrisch über einge-

Fig. 2.
Geradrichtungs-Galgen.
(Massstab 1 : 100.)



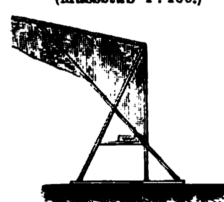
schlagenen Messingpinnen. Zur Auffindung der Lagen für diese Pinnen, d. h. für die eigentliche Geradrichtung wurde im Wesentlichen das Verfahren angewendet, Zwischenpunkte durch Messung von 180°-Winkeln einzuschalten, wie wir schon in Band II, S. 658 gezeigt haben.

Es wurde zuerst die Mitte gegen die beiden Endpunkte eingerichtet, dann der erste Viertelspunkt gegen den Anfang und die Mitte u. s. w.

Nach dieser Einrichtung aller Galgenpinnen wurde nochmals zur unabhängigen Versicherung eine durchlaufende Winkelmessung über alle Galgen hinweg, je mit Sichtung auf den vorhergehenden und den nachfolgenden Galgen, vorgenommen, woraus sich durch Rechnung ein Polygon von 32 Brechungspunkten zwischen dem 0ten und dem 33ten Punkte ergab, welches eine grösste (westliche) Abweichung von 25^{mm} ergab, was auf 5193^{m} Länge ausser Betracht bleibt.

Zwischen je 2 Galgen wurden noch 4 Pflöcke (in Abständen von $33{,}2^{m}$) geschlagen, zum Spannen einer Schnur, längs welcher die Stangen-Unterlagen vorläufig eingerichtet werden konnten, während die endgiltige Einweisung der Stangen selbst von den Galgen aus, beziehungsweise von Zwischenstationen aus, durch Theodolite besorgt wurde. Dabei dienten Zelte von der Form Fig. 3. zum Schutz gegen die Sonne.

Fig. 3.
Schutz-Zelt.
(Massstab 1 : 100.)



Zum Einweisen der einzelnen Stangen dienten die schon früher in § 11. S. 79 erwähnten, in Fig. 3. Seite 77 rechts gezeichneten Aufsatz-Scheibchen. Wir denken uns, der Einweise-Theodolit sei auf einem Galgen (Fig. 2.) oder einer Zwischenstation aufgestellt, und das vordere Ende einer Stange sei bereits durch Fahnenwinken so genau eingewiesen, dass der Faden des Fernrohrs in das mittlere weisse, 1^{cm} grosse Feld der Scheibe fällt. Genauer wird *nicht* eingewiesen, sondern der noch übrige Rest des Einweisungs-Fehlers wird geschätzt, aufgeschrieben und später in Rechnung gebracht. Wenn zwei aufeinander folgende Stangen-Enden die Ablesungen d und d' geben, so ist die zugehörige Geradstreckungs-Reduktion bekanntlich $= \frac{(d-d')^2}{2\,l}$, wenn l die Stangenlänge selbst ist ($l = 3{,}95^{m}$).

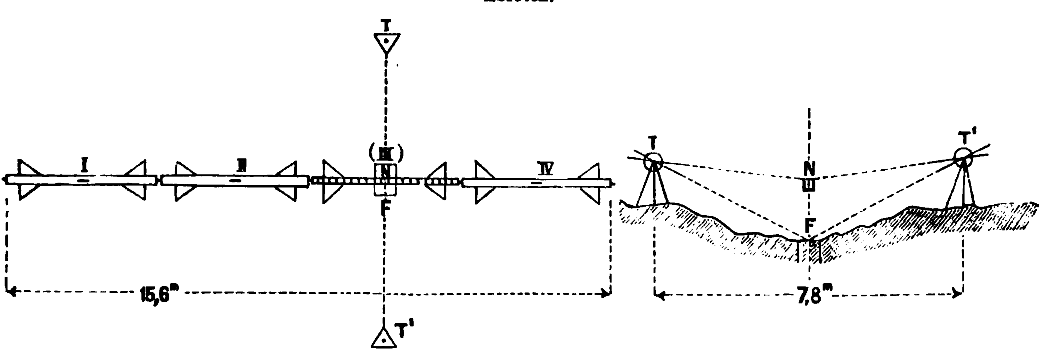
Diese Beträge sind immer sehr klein, sie dürfen aber nicht vernachlässigt werden, weil sie sich niemals gegenseitig aufheben, sondern alle in *demselben* Sinne, nämlich vergrössernd wirken. Die ganze Basis hat etwa 1315 Stangen, folglich, wenn man den Wert $\pm 2^{mm}$ als mittlere Stangen-Ausweichung und $0{,}0005^{mm}$ als mittlere Reduktion annimmt, eine Gesamtreduktion etwa $= 1315 \times 0{,}0005 = 0{,}66^{mm}$ oder etwa 0,13 Milliontel der Länge, ein Betrag, der sich aber sofort auf das Vierfache erhöht, wenn die obige kleine Annahme $\pm 2^{mm}$ für 1 Stange auf den doppelten Wert kommt.

III. *Ablotungen.*

Die Anordnung der zahlreichen Ablotungen, welche an den Endpunkten der Basis, an den Zwischen-Festlegungen und an den Unterbrechungen über Nacht und über Mittag nötig werden, ist von wesentlichem Einfluss auf den Gesamtverlauf der Messung und die Zuverlässigkeit ihrer Resultate. Das unmittelbare mechanische Abloten mittelst Fadenlotes ist wegen der Pendelschwingungen unbequem und ungenau. Viel sicherer vollzieht sich das *optische* Abloten mit Hilfe eines seitlich aufgestellten Theodolits. Dieses wurde schon bei der Braaker Basis angewendet und ist für die

Göttinger Basis in die Form gebracht worden, welche wir nun im Anschluss an Fig. 4. beschreiben.

Fig. 4.
Abloten.



Man hat zu unterscheiden, ob ein Stangen*ende* oder ein *Zwischen*punkt einer Stange auf eine Boden-Festlegung abgelotet werden soll; der letztere Fall ist durch Fig. 4. angedeutet.

Es stellt I, II, (III), IV eine Stangenlage vor, es ist aber in diesem Falle (III) keine gewöhnliche Stange, sondern die besondere, mit einer oberen Teilung versehene Festlegungs-Stange, welche hier zur Ablotung auf den Punkt F dient.

Nachdem die gewöhnliche Messung bereits über F hinweggegangen ist, während jedoch die benachbarten Stangen II und IV noch *unverrückt* liegen, wird III vorsichtig herausgenommen und durch (III) ersetzt. Durch Ausziehen von Schlitten-Schiebern hinten und vorn kann man mit dieser Stange (III) die *ganze* Länge zwischen II und IV (nämlich die Länge der Stange III samt den 2 Keilmassen) ausfüllen, und folglich den Punkt F als Projektion N auf der Teilung von (III) angeben. Das hiezu nötige Herauf-Loten von F geschieht durch 2 seitlich aufgestellte Theodolite T und T'. Es empfiehlt sich jedoch, nicht direkt den Auflote-Punkt N auf der Stange (III) zu bestimmen, sondern durch vorläufiges Herauf-Projizieren einen anderen genäherten Punkt N' zu ermitteln, und dann noch den kleinen Horizontalwinkel zwischen F und N genau zu messen und das ihm entsprechende lineare Mass in Rechnung zu bringen.

(Einige dabei zu beachtende Einzelheiten s. „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 385 bis 386.)

Da alle diese Ablotungen *doppelt*, nämlich durch *zwei* symmetrisch seitwärts gestellte Theodolite ausgeführt wurden, ergab sich eine Versicherung unmittelbar. Die 34 Ablotungen der ersten Basismessung gaben eine mittlere Differenz von nur 1,51″, also für das Mittel aus beiden Messungen nur einen mittleren Fehler von 0,76″, was auf 3,90m Theodolit-Abstand einen mittleren linearen Fehler von nur 0,014mm giebt. Die Instrumente waren 21cm-Mikroskop-Theodolite, sonst zu Triangulationen zweiten Rangs gebraucht.

Zwar sind nicht alle bei den fraglichen Ablotungen mitwirkenden Verrichtungen, Ablesungen an der Stange (III) u. s. w. ebenso genau, doch sind die Ablotungen im Ganzen auf 0,1mm sicher, wobei noch zu beachten ist, dass diese Fehler der Zwischenpunkte sich nicht fortpflanzen und in das Gesamtbasis-Resultat überhaupt nicht eingehen.

In ähnlicher Weise wie diese Ablotungen an den regelmässigen Festlegungen wurden auch die Unterbrechungs-Ablotungen Mittags und Abends gemacht.

IV. Die Keilmessung.

Das Einlegen eines gläsernen Messkeiles (vgl. Fig. 4. und Fig. 5. § 11. S. 77) zwischen die Schneiden, und das Ablesen der Teilung ist nicht so einfach, als dieses auf den ersten Blick scheinen könnte; es ist eine gewisse Übung dazu erforderlich. Vor Allem muss man sich hüten, den Keil zu stark „einzu*schieben*", er soll nur „ein*gelegt*" werden, wobei die erste Berührung mehr wie eine Art Kleben als wie ein Druck gefühlt werden soll. Wird zu stark eingedrückt, so entstehen erhebliche konstante Fehler, deren Existenz schon die Brüsseler Kommission 1854 fand.

Im preussischen Generalstab hat sich eine feine Art der Keillegung seit *Bessel* durch Tradition erhalten, und die besonderen bei Göttingen angestellten Versuche, über welche wir nachher berichten werden, haben ergeben, dass bei Befolgung dieser vorsichtigen Keillegung die konstanten Fehler äusserst kleine Beträge haben.

Was zunächst den mittleren unregelmässigen Keillege- und Ablesefehler betrifft, so fand man denselben aus Wiederholungen der Metall-Thermometer-Messungen $= \pm 1{,}8'$ und aus Wiederholungen der Intervallen-Messungen $= \pm 2{,}3'$. Hiebei soll mit t der Wert 0,001 Par. Linie bezeichnet werden; es ist nämlich $1'$ die letzte noch wahrzunehmende Grösse, welche dem geschätzten Zehntel der Keilteilung entspricht. Diese Genauigkeit von etwa $\pm 2' = \pm 0{,}005^{mm}$, mit freier Hand und mit blossem Auge erreicht, ist sehr überraschend.

Die Metall-Thermometer-Fehler gehen in die Basislänge nur etwa mit ihrem halben Betrag ein, man hat also für eine Stangenlänge nur etwa $\sqrt{0{,}9^2 + 2{,}3^2} = \pm 2{,}5' = \pm 0{,}0056^{mm}$ in Rechnung zu nehmen, oder für 1^{km} Länge mit rund 250 Stangen den mittleren Messungsfehler $= \pm 0{,}0056 \sqrt{250} = \pm 0{,}09^{mm}$. Thatsächlich ist der mittlere unregelmässige Basismessungs-Fehler, aus Doppelmessungen berechnet, etwa $= \pm 1^{mm}$ pro 1^{km}, d. h. 10 mal so gross, als der soeben a priori gefolgerte. D. h. der nackte mittlere unregelmässige Keilmessungs-Fehler bildet nur einen verschwindend kleinen Teil der wirklichen Fehler. Erheblichere Beträge werden erzeugt durch Gleiten der Stangen auf ihren Böcken, sowie durch Ungleichheit der Temperaturen in den Eisen- und Zinkstangen.

Zur Bestimmung des Keildrucks wurde die in Fig. 5. angedeutete Einrichtung getroffen, es ist nämlich auf dem rechten Ende der Stange II ein Schrauben-Mikroskop befestigt, dessen Gesichtsfeld auf das linke Ende der Stange III hinüberreicht, und eine dort angebrachte feine Teilung einzustellen gestattet. Jede relative Bewegung der zwei Stangen II und III kann mit dieser Vorrichtung leicht auf $\pm 0{,}1'$ genau gemessen werden.

Fig. 5.

I II III
K_1 K_2

Es wurde dadurch gefunden, dass *stärkere* absichtliche Keildrücke zweierlei Wirkung haben, erstens grösstenteils elastisches Zurückgehen, zweitens aber eine dauernde Verschiebung von etwa $0{,}4'$.

¶ : [redacted] Die schwachen Keildrücke, wie sie bei der eigentlichen Basismessung vorkamen, hatten eine dauernde Wirkung von nur im Mittel $0{,}29'$ oder 0,17 Milliontel der Länge.

V. *Temperatur-Verhältnisse.*

Temperatur-Bestimmung mit dem Quecksilber-Thermometer findet bei der *Bessel*schen Messmethode unmittelbar nicht statt. Indessen besteht doch ein gewisses Interesse, auch die eigentlichen Stangen-Temperaturen zu kennen, und zu diesem Zweck zuerst eine Beziehung zwischen dem Keilmass k und dem Temperaturgrad R eines Quecksilber-Thermometers herzustellen; so hat *Bessel* in der „Gradm. in Ostpreussen" S. 29 (vgl. unseren § 12. Gleichung (25) S. 84) für das Mittel der 4 Stangen die Beziehung gegeben:

$$k = 2{,}1249 - 0{,}045489\,R, \qquad \text{oder} \qquad R = 46{,}712^\circ - 21{,}983\,k$$

wo k das Keilmass in Par. Linien und R die entsprechende Quecksilber-Thermometer-Angabe in R° bedeutet.

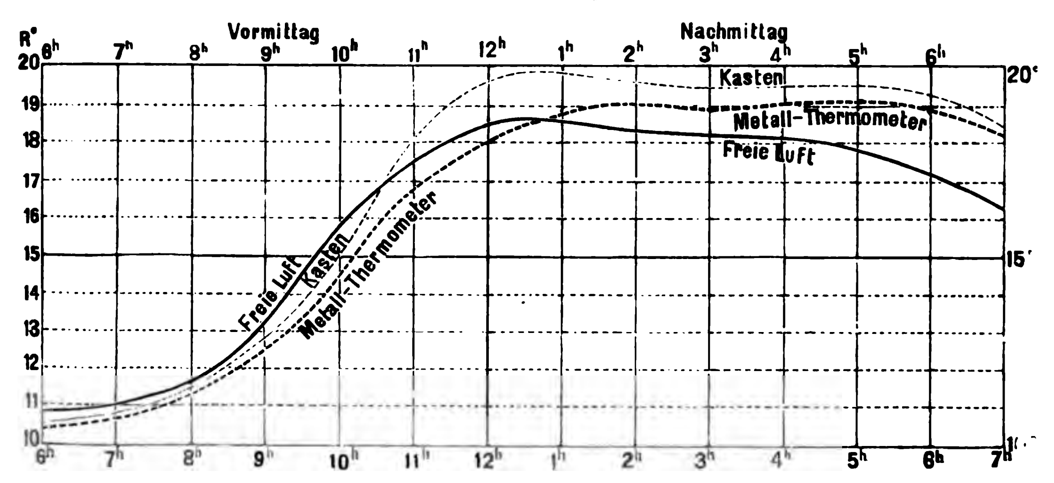
Bei Göttingen machte ich an den 2 Tagen der intensivsten Messung, 17. und 18. August, einige Versuche zur Vergleichung mit Quecksilber-Thermometern.

Es wurden etwa halbstündlich folgende 3 Aufzeichnungen gemacht:

1. Temperatur der freien Luft durch Schleuder-Thermometer.
2. Temperatur des Innenraums der Kästen, an den eingelegten Thermometern durch die Glasverschlüsse abgelesen.
3. Metall-Thermometer-Keilmasse für die 4 Stangen.

Die Verhältnisse waren auch insofern andere, als bei der ersten Königsberger Vergleichung von 1834, als damals die mit heller Ölfarbe angestrichenen hölzernen Stangenkästen unmittelbar den Sonnenstrahlen ausgesetzt wurden, während bei Göttingen die Kästen noch Überzüge von weissem Schirting hatten, welche durch die Erfahrungen bei der Braakschen Messung, 1871, als nützlich erkannt, in der That einen erheblichen Schutz gegen strahlende Wärme gewähren.

Fig. 6.
Gang der Temperaturen bei der Göttinger Basismessung:
(Mittel vom 17. und 18. August 1880.)



Die Ergebnisse dieser Vergleichungen sind in vorstehender Figur 6. dargestellt. Die Original-Beobachtungen hiezu wurden in der „Zeitschr. f. Verm." 1880, S. 394

veröffentlicht, und zwar 17. und 18. August 1880 im Allgemeinen halbstündlich. Die Beobachtungen dieser zwei Tage wurden zuerst gemittelt und wenig ausgeglichen, wodurch folgende Zusammenstellung erhalten wurde:

Göttingen 17.—18. August 1880.

	Tageszeit	Luft	Kasten	Metall-Thermometer
Morgen	6^h	10,7° C	9,9° C	10,0° C
	7	10,8	10,8	10,6
	8	11,6	11,6	11,2
	9	13,1	12,6	12,2
	10	15,8	14,8	14,2
	11	17,4	17,8	16,6
Mittag	12	18,4	19,5	17,8
	1	18,5	19,7	18,6
	2	18,3	19,5	19,0
	3	18,1	19,4	18,9
	4	18,0	19,5	19,0
	5	17,7	19,4	19,0
	6	17,1	19,2	18,8
Abend	7	16,0	18,4	18,2

Diese Werte wurden nochmals ein wenig graphisch ausgeglichen, und dann wurde Fig. 6. § 91. darnach aufgetragen.

Der Gang der Temperaturen ist im Wesentlichen dieser: Unmittelbar vor dem Erscheinen der Sonne haben die Luft, der Kasten und die Stangen infolge der nächtlichen Ausgleichung nahezu gleiche Temperatur; sobald die Sonne zu wirken beginnt, hebt sich die Lufttemperatur und *nachfolgend* auch allmälich die Temperatur des Kastens und der Metallstangen; dann beginnt der Kasten nach und nach als Wärmebehälter zu wirken und teilt auch den Stangen seinen Wärmevorrat mit, so dass Nachmittags und Abends der Kasten und die Stangen wärmer als die Luft sind. Die Unterschiede zwischen dem Quecksilber-Thermometer und dem Metall-Thermometer, welche über 1° gehen, zeigen sich hier deutlich; dagegen über den Temperatur-Unterschied der Eisenstange und der Zinkstange giebt dieser Versuch keine Auskunft.

§ 14. Neuere Basis-Apparate mit isolierten Mikroskopen.

Der Grundgedanke *eines* Massstabs zwischen festen Mikroskopen, welche von dem Massstabe isoliert, an dessen Enden aufgestellt sind, wurde wie es scheint, von verschiedenen Seiten unabhängig erfasst. Wir beschreiben hier die wichtigsten Ausführungen, welche dieser Grundgedanke durch die Mechaniker *Brunner* und *Repsold* unter Anleitung der Geodäten *Ibanez* und *Comstock* erfahren hat.

I. Der ältere spanische Basis-Apparat.

General *Ibanez* liess im Jahre 1856 für seine spanische Landes-Aufnahme einen Basis-Apparat durch Mechaniker *Brunner* in Paris konstruieren, mit dem er mehrere Grundlinien, namentlich im Jahre 1858 die 14664^m lange Grundlinie bei Madridejos mass.

Wir geben die Beschreibung des Basisstabes nach dem Werke: „Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la Commission de la carte d'Espagne, par *Laussedat,* Paris 1860".

Fig. 1.

Brunners Basis-Messstange.
Querschnitte in natürlicher Grösse.

Fig. 1a.
Feste Verbindung in der Mitte.

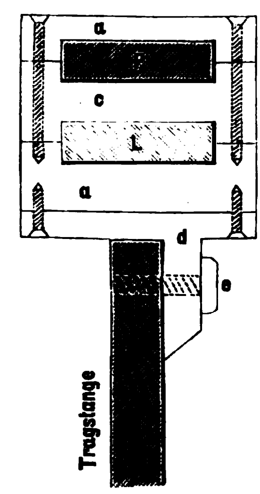


Fig. 1b.
Allgemeiner freier Querschnitt.

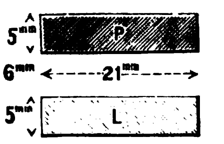
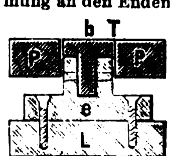


Fig. 1c.
Ausdehnungsbestimmung an den Enden.



Die beiden Stäbe von Platin und Kupfer haben gleiche Dimensionen, nämlich wie in Fig. 1b. angegeben ist, je 21mm Breite und 5mm Höhe, mit einem Zwischenraum von 6mm. Fig. 1b. zeigt den normalen Querschnitt, wie er überall der Länge nach ist, wo keine Berührung der beiden Stäbe stattfindet.

In der Mitte sind beide Stäbe fest verbunden, wie in Fig. 1a. angegeben ist; zwei Rahmen *a* mit einem Mittelstück *c* sind seitlich fest zusammengeschraubt und halten damit die Platinstange *P* und die Kupferstange *L* fest zusammen. Fig. 1a. zeigt auch eine Tragstange, welche der ganzen Länge nach durchgeht, mit einem Querschnitt von umgekehrter ┳-Form, ebenso wie in der späteren Fig. 4. S. 96.

Endlich zeigt noch Fig. 1c. den Querschnitt an dem einen Ende, wo die gegenseitige Ausdehnung zwischen Platin und Kupfer gemessen wird.

Hier ist der Platinstab in seinem mittleren Drittel durchbrochen und durch ein besonders ┳förmiges Platinstück *b* ausgefüllt, das zwischen *P* und *P* lose gleitet, dagegen nach unten fest mit *e* und *L* verbunden ist.

An der Fuge zwischen *b* und *P* befindet sich auf der horizontalen Oberfläche von *b* und von *P* eine Teilung *T*, an welcher man die relative Ausdehnung der Stäbe *L* und *P* mikroskopisch ablesen kann.

II. Basis-Apparat des geodätischen Instituts.

Etwa im Jahre 1876 hat das geodätische Institut einen Basis-Apparat von Mechaniker *Brunner* in Paris bestellt und 1878 geliefert erhalten. Dieser Apparat hat im Wesentlichen dieselbe Konstruktion, wie der soeben beschriebene spanische Apparat von General *Ibanez*. Der Apparat des geodätischen Instituts hat einen Stab, der aus Platin-Iridium und Messing zusammengesetzt ist. Die erste Mitteilung hierüber giebt der Generalbericht der Europ. Gradm. für 1878, S. 99, mit einem Anhange „Sur la construction de la règle géodésique internationale, par M. M. *H. Sainte-Claire Deville* et *E. Mascart*“ und Fortsetzung in dem Gen.-Ber. d. Europ. Gr. für 1879, Anhang.

Mit diesem Apparate wurden vom geodätischen Institute bis jetzt zwei Grundlinien-Messungen ausgeführt, nämlich 1879 Nachmessung der 2763 Meter langen Basis von Strehlen in Schlesien, welche früher 1854 mit dem *Bessel*schen Apparate gemessen worden war, ferner 1880 Nachmessung der 2336 Meter langen, früher 1846 für die

Küsten-Vermessung angelegten Grundlinie bei Berlin. Einiges Weitere hierüber werden wir später in § 25. und § 26. angeben.

III. Der neue, vereinfachte spanische Basis-Apparat.

Während die Genauigkeit der Messungen mit dem *Brunner*schen Apparat genügend war, fand man in Spanien die Geschwindigkeit, nämlich etwa 70 Meter für 1 Stunde, nicht befriedigend.

Es wurde deswegen nach Angabe von General *Ibanez* im Jahre 1864 ein neuer einfacherer Apparat, jedoch im Wesentlichen nach dem ersten Grundgedanken konstruiert, mit dem nicht nur von 1865—1879 8 weitere spanische Grundlinien, sondern dann auch von 1880—1881 drei Linien in der *Schweiz* gemessen wurden, $2{,}4^{km}$ bei Aarberg, $2{,}54^{km}$ bei Weinfelden und $3{,}2^{km}$ bei Bellinzona.

Wir beschreiben zuerst im Anschluss an Fig. 2. und Fig. 3. S. 95 die Anordnung des Apparates und den Gang der Messung im Allgemeinen, und benützen dabei zunächst die Broschüre von Dr. *Koppe*: „Der Basis-Apparat des Generals *Ibanez* und die Aarberger Basismessung, Zürich 1881", nebst einigen dankenswerten Privatmitteilungen von *Koppe*.

Es wird *ein* Massstab von 4^m Länge angewendet, welcher in Fig. 3. durch ab angedeutet ist. und auf 2 Stativen S_1 und S_2 aufliegt.

Unabhängig von dem Massstab und seinen Stativen $S_1\,S_2$ sind zwei Mikroskope M_1 und M_2 auf besonderen Stativen T_1 und T_2 an den Enden des Massstabes aufgestellt. Die Mikroskope M_1 und M_2 werden auf die Endstriche a und b (oder nahe den Endstrichen) eingestellt, dann wird der Massstab um seine eigene Länge von rechts nach links vorgerückt, so dass a nach b kommt und die Stative S_3 und S_4 in Anwendung kommen; M_2 bleibt stehen, und M_1 rückt um die zweifache Massstablänge vor, so dass es nun vorderes Mikroskop wird u. s. w.

Der Massstab ab bewegt sich hiebei nicht in der abgesteckten und festgelegten Geraden AB selbst, sondern in einer Parallelen ab zu AB; was offenbar gleichgültig ist.

Die Messstange ab besteht aus Eisen, und ist der freien Luft ausgesetzt, ohne Schutz durch einen hölzernen Kasten. Dagegen wird der Apparat im Ganzen durch *Zelte* geschützt, welche mit Leinwand bespannt gegen direkte Sonnenstrahlen und auch gegen leichten Regen Schutz gewähren. Die Zelte sind tragbar, und werden dem Fortschritte der Messung entsprechend stets hinten abgenommen und vorne wieder angesetzt.

Die Anordnung im Ganzen zeigt Fig. 2. S. 95.

Übergehend zu den Einzelheiten betrachten wir in Fig. 4. S. 96 zuerst den Querschnitt der Stange; derselbe hat umgekehrte **T**-Form, so dass ein breites Auflager entsteht. Der Stab ist 4^m lang und 50^{kg} schwer.

Zur Temperatur-Bestimmung dienen gewöhnliche Quecksilber-Thermometer, welche in Fig. 4. S. 96 rechts oben durch T veranschaulicht sind und auch in Fig. 3. S. 95 der Länge nach an 4 Stellen durch T, T, T, T angedeutet wurden.

Die mit Quecksilber gefüllten Glaskugeln dieser Thermometer sind mit dem Eisen der Stange in unmittelbarer inniger Berührung und sind ganz in Eisenfeilspähne eingebettet. Die Glasröhren der Thermometer (in Fünftelgrade geteilt) werden durch übergedeckte Glasplatten von Aussen abgelesen.

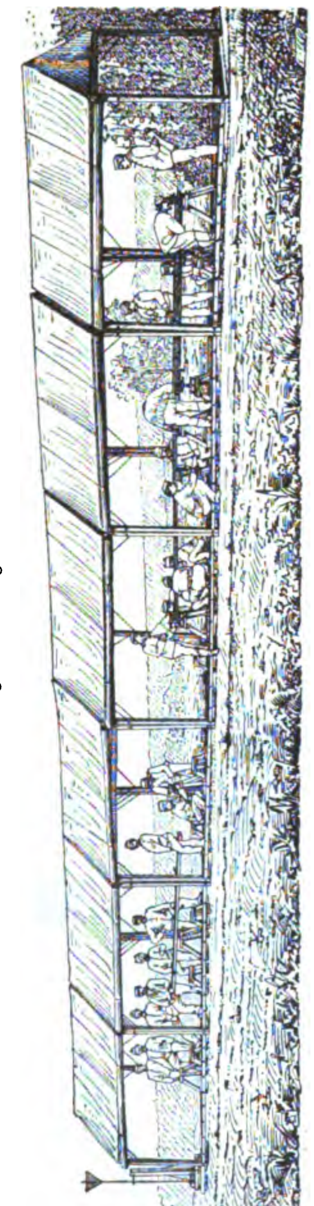
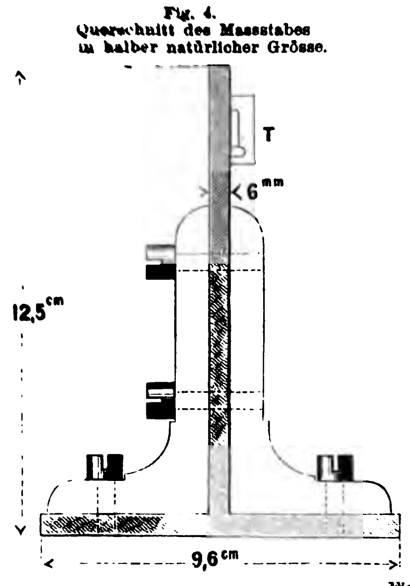


Fig. 2.
**Basismessung bei Aarberg in der Schweiz,
ausgeführt im August 1880 mit dem vereinfachten spanischen Basis-Apparat.
Darstellung des Messungs-Verfahrens.**

Fig. 3.
Darstellung des Grundgedankens der Messung (Masstab $a\,b = 4$ Meter).

Fig. 4.
Querschnitt des Massstabes in halber natürlicher Grösse.



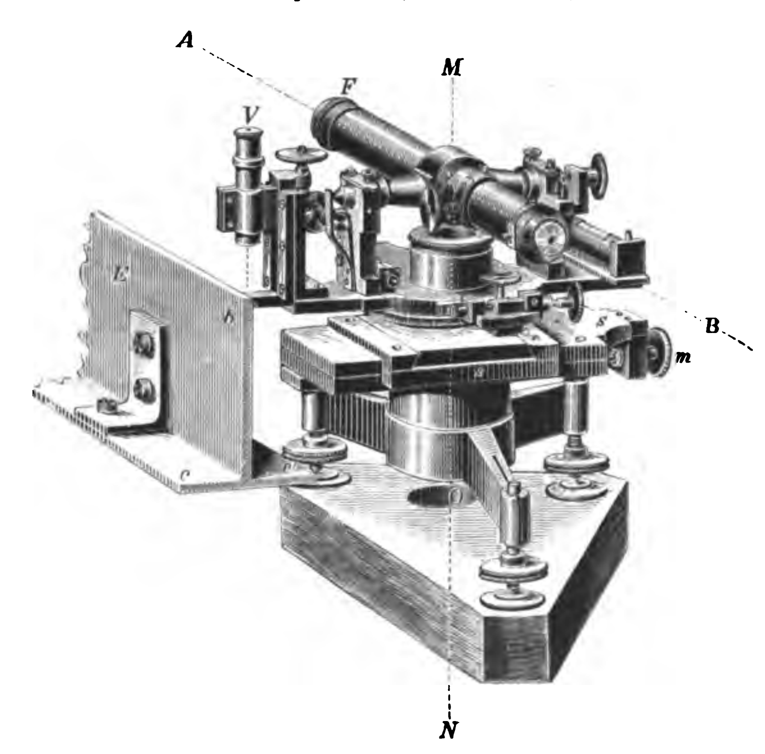
Zur Neigungs-Bestimmung der einzelnen Stangenlagen dient eine in der Mitte angebrachte Libelle L (Fig. 3. S. 95).

Die Messstange ist auf ihrer oberen schmalen Fläche mit einer *Teilung* versehen, früher der ganzen Länge nach in Centimeter, bei der neueren vereinfachten Anordnung nur noch von 0,5 zu 0,5 Meter, und zwar durch feine Striche auf eingelegten Platin-Plättchen.

Nun haben wir das in Fig. 5. abgebildete Instrument, „Mikroskop-Theodolit" genannt, zu betrachten, welches dreien Zwecken gemeinsam dient, nämlich:

1) Abloten auf die Festlegungs-Bolzen im Erdboden,
2) Einrichtung in die abgesteckte Basis-Gerade,
3) Mikroskopische Einstellung oder Ablesung auf den Stangen-Enden.

Fig. 5.
Mikroskop-Theodolit (Massstab etwa 1 : 5).



Zu diesen drei Zwecken, denen der Mikroskop-Theodolit zu dienen hat, ist im Einzelnen zu bemerken:

zu 1) Wenn der Mikroskop-Theodolit als *Abloter* dienen soll, so wird statt des horizontalen Fernrohrs F Fig. 5. ein *vertikales* Fernrohr eingelegt, welches durch das Loch O im Stative nach der Vertikalen MN eingerichtet werden kann. Dabei stellt man das Instrument zuerst genähert lotrecht über N, und hat dann Schlittenführungen s und Schraubenbewegungen m nach zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen (zweite Schraube m *jenseits* in Fig. 5 nicht sichtbar).

zu 2) Wenn es sich um Einrichtung in die Gerade in horizontalem Sinne handelt, so wird das horizontale Fernrohr F Fig. 5. vor- oder rückwärts nach A oder B eingerichtet. Soll die Mitte M selbst Zielpunkt werden, so wird das Fernrohr F ausgehoben und eine Zielmarke in die Axenlager eingelegt.

zu 3) Die mikroskopische Einstellung auf die Messstange ist in Fig. 5. bei V und b links angedeutet. V ist ein vertikales Mikroskop, welches rechtwinklig zur Fernrohraxe AB angebracht ist und auf die schmale Oberfläche b des eisernen Massstabes E eingestellt werden kann. Den Massstab E haben wir mit seinem Querschnitt $b\,c\,c'$ in Fig. 5. angedeutet; die untere Fläche $c\,c'$ hat hier keine Unterstützung, weil der Massstab seine zwei besonderen Stative hat (vergl. S_1 und S_2 in Fig. 3. S. 95; jedoch sind die Einzelnheiten der Stative u. s. w. in Fig. 5. S. 96 und Fig. 3. S. 95 nicht ganz übereinstimmend, insofern es sich nur um Veranschaulichung des Prinzipes handelt).

Der Gang der Messung lässt sich nun vollends leicht beschreiben:

Die Aarberger Basis von 2400^m Länge war durch drei grosse dreieckige Scheiben-Baken (s. Fig. 2. S. 95 links) über der Erde bezeichnet, und wurde durch Messingbolzen in Quadern unterhalb festgelegt.

Die Linie befand sich auf gerader und ebener Landstrasse, die Stative wurden ohne weiteres auf den Strassenboden gestellt. Der Strassenverkehr wurde während der Dauer der Messung gesperrt.

Zu gleichzeitiger Verwendung kamen:

4 Mikroskop-Theodolite,

4 Auflagdreifüsse für die Messstange,

6 grosse Holzstative (T Fig. 3. S. 95) für die Mikroskop-Theodolite,

10 kleine Holzstative (S Fig. 3. S. 95) für die Messstange,

2 hölzerne je 4 Meter lange Latten zum Vor-Messen.

Das Personal war:

2 Beobachter mit Gehilfen zum Vorwärtstragen und vorläufigen Stellen der Holzstative,

2 Beobachter mit Gehilfen zum endgültigen Stellen der Holzstative,

4 Beobachter an der Messstange zum Einstellen der Null- und Endstriche unter die Mikroskope, zum Ablesen der 4 Thermometer und der Libelle,

2 Gehilfen zum Vorwärtstragen der Stange (die Fig. 2. S. 95 zeigt 15 Mann).

Über die Messungs-Geschwindigkeit teilt *Koppe* folgendes mit:

Am 22. August 1880, Morgens 4 Uhr, wurde zur ersten Basismessung ausgerückt. Das Wetter war trübe und nebelig und den Beobachtungen wenig günstig. Erst nach 5 Uhr war es hinreichend Tag geworden, um die Baken und die Mikroskope einstellen zu können. Trotz des feinen niederrieselnden Regens, der sich nach und nach zu einem tüchtigen Landregen entwickelte, begann die Messung 5 Uhr 48 Minuten und wurde programmmässig bis 800^m durchgeführt. Nach drei Tagen war die erste Messung der Aarberger Basis beendigt; gleichzeitig wurden in Entfernungen von 400^m zu 400^m feste Punkte errichtet.

Am Nachmittage des 24. August wurden die Instrumente, die Zelte und sämtliche Gerätschaften nach dem Basisanfange zurücktransportiert; alle Apparate einer sorgfältigen Prüfung unterworfen und noch an demselben Abende die nötigen Vorbereitungen getroffen, um am folgenden Morgen die Kontrolmessung sofort beginnen zu können. Am 25., 26. und 27. August wurde, wie an den drei vorhergehenden Tagen, wieder um je 800^m vorgerückt, alle Fixpunkte eingemessen und so trotz der Ungunst der Witterung, die namentlich durch Nebel die Sichtbarkeit der Richte-Baken für das Einweisen sehr beeinträchtigte, auch die zweite Messung in drei Tagen beendigt. Die Zeiten, welche auf die Messung der einzelnen Sektionen verwandt wurden, sind folgende:

Sektion	I. Messung	II. Messung
1. = 400 Meter	2 Stunden 47 Min.	2 Stunden 6 Min.
2. = 400 „	2 „ 44 „	1 „ 59 „
3. = 400 „	1 „ 27 „	2 „ 24 „
4. = 400 „	2 „ 26 „	2 „ 8 „
5. = 400 „	2 „ 21 „	2 „ 31 „
6. = 400 „	2 „ 49 „	2 „ 49 „
Mittel: 400 Meter	2 Stunden 36 Min.	2 Stunden 20 Min.

Die zweite Messung geht im Allgemeinen etwas rascher vor sich als die erste, weil das Setzen der Fixpunkte bei der ersten Messung einige Zeit in Anspruch nimmt. Zwischen dem ersten und dem zweiten Teil der jedesmaligen Tagesmessung wurde eine Stunde Pause gemacht.

Die grösste Neigung der Messstange während dieser Messungen betrug 1,5°, die Korrektion für die Neigung im Mittel nahe 1^{cm} für 1 Sektion. Ausgesprochen ungünstig für die Messung war der erste Beobachtungstag, namentlich während der Messung der zweiten Sektion, indem der strömende Regen die Zelte völlig durchweichte. Die Differenz ist bei dieser Sektion die grösste.

(Über die Genauigkeit werden wir in § 25. berichten.)

Zum Schlusse giebt *Koppe* noch die Mitteilung eines Ausspruchs von General *Ibanez* selbst über seine Basis-Apparate:

„Die einfache Einrichtung meines Apparates und die Art seiner Anwendung ist das Ergebnis der Erfahrungen, welche ich bei *neun* in Spanien ausgeführten Basis-Messungen zu machen Gelegenheit hatte. Bei meinem ersten Apparate waren alle denkbaren Korrektions-Vorrichtungen angebracht. Die Messstange bestand aus zwei Metallen, deren Längen Unterschied infolge verschiedener Ausdehnung durch die Wärme mit einer Mikrometer-Schraube gemessen wurde. In gleichen Intervallen eingelassene Quecksilber-Thermometer lieferten eine zweite, von der ersten unabhängige Bestimmung

der Temperatur. *Es zeigte sich schliesslich, dass die Quecksilber-Thermometer die Temperatur der Messstange leichter und besser bestimmen lassen, als das Metall-Thermometer und desshalb habe ich erstere allein beibehalten.* Die Sucht, jedes Mass und jede Korrektion gesondert mit der Mikrometer-Schraube messen zu wollen, wie wir es erstmals thaten, führt zu grossem Zeit- und Arbeits-Aufwande ohne reellen Gewinn an Genauigkeit; und grössere erreichbare Vorteile gehen durch die komplizierte Art und längere Dauer der Messung verloren. Das beste Mittel, dem Anhäufen der Beobachtungs-Fehler in ausgedehnten Dreiecksnetzen entgegen zu arbeiten, ist die Messung einer ausreichenden Zahl von Grundlinien. Dieses Mittel kann aber um so eher in Anwendung gebracht werden, je mehr der Messapparat mit einfacher Einrichtung und Handhabung ausreichende Genauigkeit der Resultate verbindet."

IV. Der amerikanische Basis-Apparat von Repsold.

Die nord-amerikanischen Vermessungen im neueren Sinne begannen etwa 1841; von da bis 1874 wurden 9 Grundlinien gemessen und im Jahre 1876 wurde ein neuer Basis-Apparat von *Repsold* in Hamburg angeschafft, mit welchem unter Leitung von *Comstock* dann drei Grundlinien, bei Chicago 1877, Sandusky 1878, und Olney 1879 gemessen wurden.

Nachricht hierüber giebt das grosse amtliche Werk: „Professional papers of the corps of engineers, U. S. Army, Nr, 24. Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Lieut. Col. *C. B. Comstock*, Corps of Engineers, Brevet Brigadier-General, U. S. A., aidet by the Assistents on the survey. Washington: Governement printing office. 1882." (vgl. auch „Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 533 bis 547 und 1888, S. 385—395.)

Fig. 6.
*Repsold-Comstock*s Messstange, Querschnitt in natürlicher Grösse.

Der Grundgedanke des *Repsold-Comstock*schen Apparates ist derselbe wie beim *Brunner*schen (S. 93), nämlich *eine* Messstange, deren Enden zwischen festen Mikroskopen abgelesen werden.

Die Messstange besteht aus der Verbindung von Zink und Stahl, wie in Fig. 6. angegeben ist.

Die aus Zink und Stahl zusammengesetzte Messstange ist in eine Röhre von 12,5cm Durchmesser eingeschlossen und ragt an den Enden derselben hervor.

Dieses ist durch die nachfolgenden Fig. 7. bis 12. S. 99—102 dargestellt.

Die zwei Platinplättchen *e e* in Fig. 9. S. 102 sind mit feinen Teilungen versehen, welche durch die isoliert aufgestellten Mikroskope abgelesen werden.

Fig. 12. (S. 102) zeigt den Röhren-Querschnitt und zugleich die Queransicht eines mit der Röhre parallelen Richte-Fernrohrs *b*, welches in der grossen Fig. 7. (S. 100) rechts oben in Seiten-Ansicht dargestellt ist.

Dieses Richte-Fernrohr lässt sich durchschlagen, also auf eine vordere oder eine hintere Richte-Bake der Geraden einstellen.

Im Übrigen ist durch die zahlreichen Figuren alles wesentliche erklärt. Die photographische Aufnahme des Gesamt-Apparates mit den Schutz-Zelten, welche wir

Fig. 7.
Repsold-Comstock's **Basismess-Apparat,**
angewendet bei den Grundlinien von Chicago 1877, Sandusky 1878, Olney 1879.
(Masstab 1 : 16.)

Libelle *d.*

Hinter-Ende.

Richte-Fernrohr *e.*

Vorder-Ende.

Länge der Röhre = 4 *m*, Durchmesser der Röhre = 0,125 *m*.

Im Innern der Röhre befindet sich der aus Zink und Stahl bestehende Masstab, welcher an den Enden hervorragt, und durch isoliert aufgestellte Mikroskope abgelesen wird.

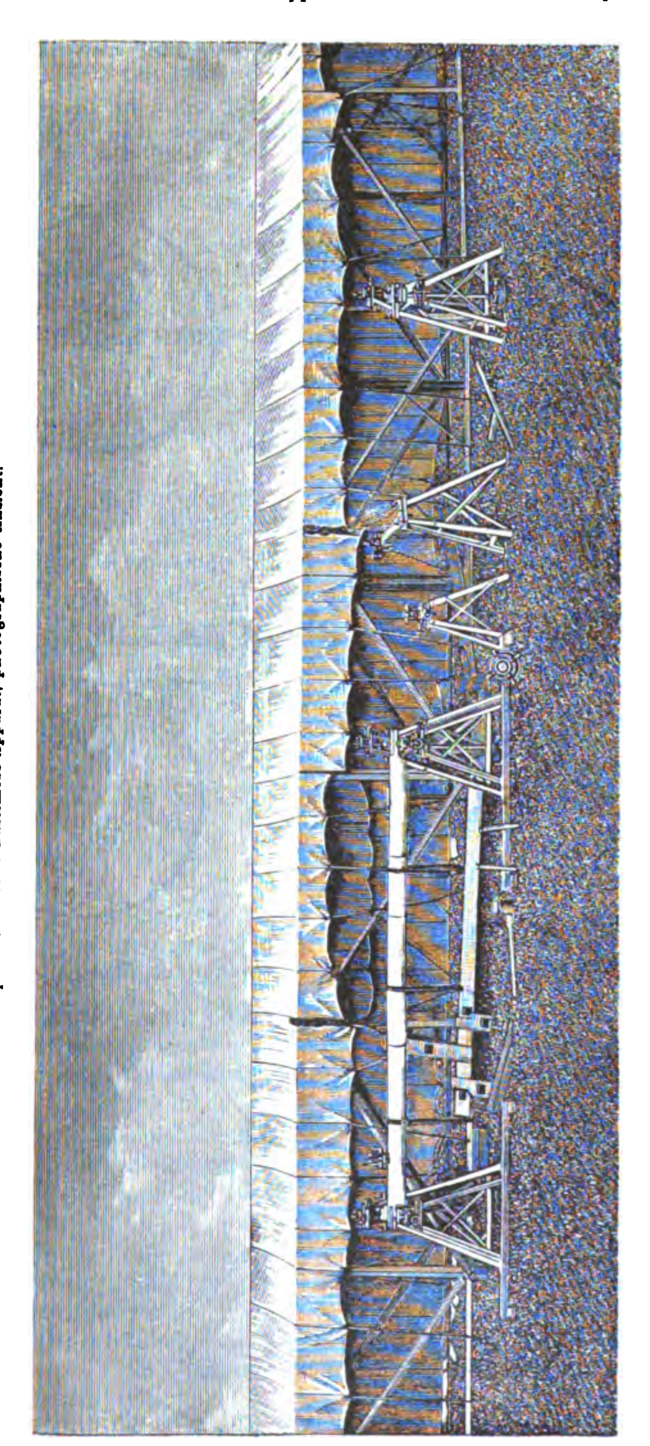


Fig. 8.
*Repsold-Comstock*s Basismess-Apparat, photographische Ansicht.

auf S. 101 nachgebildet haben, zeigt auch rechts die Mikroskope, welche von ihren Stativen übergeneigt, einen etwas unstabilen Eindruck machen.

Fig. 9. (Massstab 1 : 4.)
Hinteres Ende der Messstange aus der Röhre hervorragend. *e c* Platinplättchen.

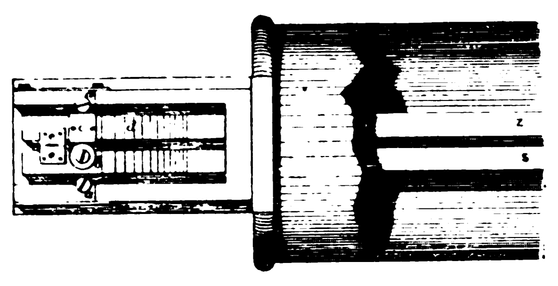


Fig. 10.
Querschnitt der Röhre mit den Stäben Z und *S*.
Röhren-Durchmesser = 12,5 *cm*.

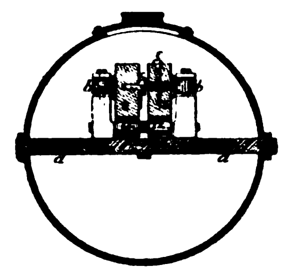


Fig. 11.
Stativ für die Röhre mit der Messstange.
(Massstab 1 : 8.)

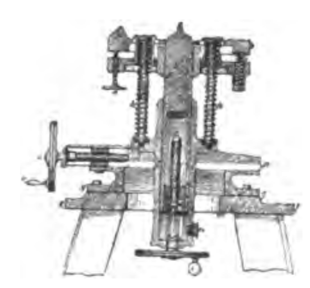
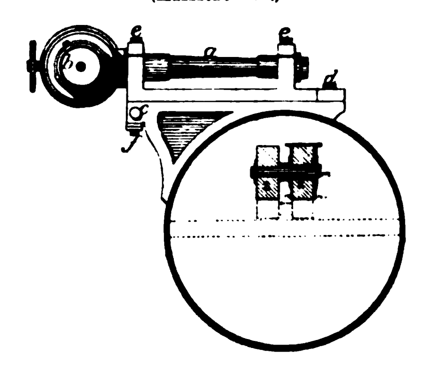


Fig. 12.
Querschnitt der Röhre und des Richte-Fernrohrs *b*.
(Massstab 1 : 4.)



V. Der niederländisch-ostindische Basis-Apparat von Repsold.

Schon vor dem soeben beschriebenen amerikanischen Apparat (welcher 1876 hergestellt wurde), haben *Repsold* und Söhne einen auf ähnlichen Prinzipien beruhenden Apparat konstruiert, welcher teilweise nach Angaben von *Oudemans* schon von 1865, zur Triangulierung von Java, 1873, gedient hat.

Eine erste Beschreibung wurde im September 1876 von *Repsold* selbst gegeben in Nr. 1661 der „Astr. Nachr.“ 70. Band, S. 65—80, die Hauptbeschreibung mit Zeichnungen ist enthalten in dem Werke: „Die Triangulation von Java, erste Abteilung, von *Oudemans,* Batavia 1875“.

Das Prinzip ist das bimetallische, ein Zinkstab und ein Stahlstab, 11,5^{mm} und 13,5^{mm} breit und beide 22^{mm} hoch, liegen neben einander und sind in eine Röhre eingeschlossen, aus welcher nur die Stab-Enden hervorragen, wie bei *Repsold-Comstock* Fig. 10. s. o. Im übrigen aber ist die Anordnung eine andere; es sind 4 Stäbe von 4^{m} und 1^{m} Länge vorhanden nach Andeutung folgenden Schemas:

4ᵐ 4ᵐ

1ᵐ 1ᵐ

Die kurzen, 1ᵐ langen Stäbe tragen an ihren Enden Mikroskope, welche auf die 4ᵐ langen Stäbe hinüberreichen und so die Messung ermöglichen.

§ 15. Neuere Massbestimmungen für bimetallische Stäbe.

Die Verbindung zweier verschiedener Metalle, z. B. Zink und Eisen, Kupfer und Platin, zu einem Massstabe, welche bei der ersten Betrachtung so grosse Vorteile zu haben scheint, leidet doch an dem Übelstande, dass die beiden Metalle sehr oft *nicht gleiche* Temperaturen haben; und damit wird der Vorteil der ganzen Einrichtung fraglich.

Allerdings wenn die Temperatur im allgemeinen längere Zeit *konstant* bleibt, so werden wohl auch beide Metalle gleiche Temperatur annehmen, wenn aber die Temperatur der umgebenden Luft sich ziemlich rasch *ändert*, oder wenn strahlende Wärme einwirkt, so werden zwei verschiedene Metallstangen, je nach ihrer Masse, ihrer spezifischen Wärme u. s. w., den äusseren Wärme-Einflüssen mehr oder weniger rasch folgen, und deswegen zu gleichen Zeiten verschiedene Temperaturen haben.

Eine hierauf bezügliche Rechnung hat *Oudemans* angestellt, in dem Werke: „Die Triangulation von Java", erste Abteilung Vergleichung der Massstäbe, Batavia 1875, S. 7—8.

Oudemans nimmt nach dem „Lehrbuch der Experimental-Physik von *Wüllner*" die nachfolgenden Zahlen für Zink und Stahl an, welchen wir zugleich die Zahlenwerte für Platin und Messing beifügen (letztere ebenfalls nach *Wüllner* angenommen von *Fischer*, „Astr. Nachr.", 103. Band (1882) Nr. 2451).

		Zink	Stahl, Eisen	Platin	Messing
Spezifische Wärme	w	0,089	0,109	0,034	0,094
Absorptions-Vermögen	α	0,19	0,175	0,17	0,07
Wärmeleitungs-Fähigkeit	λ	363	374	84	231
Dichte	$\varDelta$	6,86	7,82	21,51	8,00

Ferner sei die freie der Luft ausgesetzte Oberfläche eines Stabes $= F$

Das Volumen eines Stabes . . . . $= V$

Damit ist die Wärmemenge, welche einem Stab von seiner freien Oberfläche ins Innere zugeführt wird, proportional dem Produkt:

$$F \alpha \lambda$$

Andererseits ist die Temperatur-Zunahme des Stabes umgekehrt proportional dem Produkt:

$$V \varDelta w$$

Im Ganzen ist also die Temperatur-Zunahme eines Stabes proportional zu setzen der Grösse:

$$(\varDelta t) = \frac{F}{V} \frac{\alpha \lambda}{\varDelta w} \tag{1}$$

Der erste Quotient $F : V$ ist rein geometrischer Natur; jedenfalls wird die Länge beider in Frage kommender Stangen gleich sein, etwa $= l$; dann seien ferner die Breiten und Höhen beider Stangen $= b$ und h, bzw. $= b'$ und h'. Wenn die Stangen von allen Seiten der Luft (bzw. der Wärme-Einwirkung) ausgesetzt sind, so ist:

$$F = 2(b+h)\,l \qquad V = b\,h\,l$$

also: $$(\varDelta t) = \frac{2(b+h)}{b\,h}\,\frac{\alpha\lambda}{\varDelta w}$$

Die *Oudemans*schen Stangen lagen scharf *neben*einander, hatten gleiche Höhen $h = 22^{mm}$ und die Breiten $b = 13{,}5^{mm}$ für Stahl und $b' = 11{,}5^{mm}$ für Zink, es ist also zu setzen: $F = (2\,b + h)\,l$ oder $= (2\,b' + h)\,l$, folglich:

$$(\varDelta t)_e = \frac{27+22}{13{,}5 \times 22}\,\frac{\alpha\lambda}{\varDelta w}\;,\quad (\varDelta t)_z = \frac{23+22}{11{,}5 \times 22}\,\frac{\alpha'\lambda'}{\varDelta' w'}$$

Die Ausrechnung giebt 12,7 und 20,1 oder das Verhältnis 0,63 : 1, d. h. die Stangen entsprechen *nicht* genügend den Wärme-Verhältnissen.

Auch bei *Bessels* Stangen (vgl. Fig. 2. S. 77) sind diese Verhältnisse nicht eingehalten, die Stangen liegen *auf*einander und geben, wenn man die Tragstange als nicht vorhanden annimmt:

alles rund in Millimetern:

Eisen:	$F = 55\,l$	$V = 189\,l$	*Zink*: $F' = 27\,l$	$V' = 91\,l$
	$\alpha = 0{,}175$	$\lambda = 374$	$\alpha = 0{,}19$	$\lambda = 363$
	$\varDelta = 7{,}82$	$w = 0{,}11$	$\varDelta = 6{,}86$	$w = 0{,}089$

Die Ausrechnung giebt hiefür nach der Formel (1):

$$(\varDelta t)_e : (\varDelta t)_z = 22 : 34$$

Hier ist die Zinkstange offenbar zu schwach, und das Verhältnis ist deswegen nicht richtig.

Dagegen berichtet *Fischer* für den Platin-Messing-Basismessstab des geodätischen Instituts, wobei beide Teile je 21^{mm} breit und 5^{mm} dick, durch einen Zwischenraum von 7^{mm} von einander getrennt sind, dass das thermische Verhältnis nach der Formel (1) sich $= 1{,}00 : 1{,}08$ ergab. („Astr. Nachr.“ 103. Band, 1882, Nr. 2451, S. 43.)

Zugleich teilt *Fischer* eine Bestimmung des Temperatur-Unterschiedes beider Stäbe durch Thermo-Elemente mit, welche am 25. Mai 1882 in dem Beobachtungs-Raum zu Steglitz bei Berlin eine mittlere Differenz von nur $= 0{,}05°$ ergab, von $0{,}01°$ bis $0{,}12°$ anwachsend und bis $0{,}02°$ wieder abnehmend, mit Schlusswert $0{,}04°$.

In Bezug auf die vorerwähnte thermische Theorie der Formel (1) besteht natürlich eine grosse Unsicherheit, wie auch *Oudemans* selbst hervorhebt. Trotzdem handelt es sich hier um Überlegungen, welche nicht zu umgehen sind.

Neue Massbestimmungen für den Besselschen Apparat, von General Schreiber.

Die Massbestimmungen, welche zuerst 1834 von *Bessel* mit den Zink- und Eisenstangen vorgenommen wurden, haben wir bereits in § 12. S. 80—86 beschrieben.

Vor der Braaker Basismessung (welche 1871 stattfand) wurde jedoch der Vergleichs-Apparat neu und besser eingerichtet, statt der früheren Holzgerüste in Königsberg wurden in dem Untergeschoss des Generalstabs-Gebäudes in Berlin Zementpfeiler aufgebaut, und die Keilmessung für die Konstanten-Bestimmung durch Mikroskop-Ablesung ersetzt. Zur Temperatur-Regulierung wurden Holzkästen mit Doppelwänden zur Aufnahme von Wasser konstruiert.

Alles dieses ist mitgeteilt in dem Werke „Die königlich preussische Landes-Triangulation, Haupt-Dreiecke, II. Teil, erste Abteilung“, Berlin 1873, S. 1 - 37 mit Tafel II. und III. Auszug hieraus s. *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen“, 1882, S. 86.

Auch in anderer Hinsicht wurden die Vergleichungen gegen früher abgeändert, so dass nicht mehr bloss *eine* der 4 Stangen, nämlich die erste l_1, mit dem Normalmass verglichen wurde, sondern alle 4 Stangen l_1, l_2, l_3, l_4 jede für sich.

Dabei wurde zuerst die Formel zu Grunde gelegt nach (32) § 12. S. 85 (wobei wir jedoch wieder L statt L' schreiben):

$$l = L - (k - 1{,}4)\, m \qquad (2)$$

Dabei ist l die Stangenlänge, k das innere Keilmass, m der relative Ausdehnungs-Coëfficient und L das Absolutglied, d. h. die Länge l, welche zu $k = 1{,}4$ gehört.

Als erste Verbesserung der Formel (2) wurde von General *Schreiber* ein quadratisches Glied hinzugefügt, und gesetzt:

$$l = L - (k - 1{,}4)\, m - (k - 1{,}4)^2 \varrho \qquad (3)$$

Eine wichtigere Änderung wurde ferner gemacht durch Zufügung eines Gliedes αh, welches die Temperatur-*Änderung* berücksichtigt. Um dieses begreiflich zu machen, erinnern wir zuerst an das, was schon vorher bei (1) S. 103 über die Wärme-Verhältnisse in bimetallischen Stäben gesagt wurde. Die Eisen- und Zinkstangen folgen der allgemeinen Temperatur-Änderung nur langsam nach, und noch mehr: Die Eisenstange und die Zinkstange folgen den Temperatur-Änderungen nicht *gleich*, sondern die schwächere Zinkstange eilt bei dem *Bessel*schen Apparat der Eisenstange immer voraus. Diese Erscheinung findet ihren Ausdruck in dem Glied αh der dritten *Schreiber*schen Formel:

$$l = L - (k - 1{,}4)\, m - (k - 1{,}4)^2 \varrho + \alpha h \qquad (4)$$

Dabei bedeutet α die *ein*stündige Änderung des Temperatur-Keilmasses k, und h ist ein durch Versuche bestimmter Coëfficient, in runder Zahl $h = 0{,}05$. Um die Wirkung des letzten Gliedes (Folge-Korrektion) beurteilen zu können, berechnen wir eine kleine Übersichts-Tabelle:

Zeit	Keilmasse k	Keilmasse α	Temperaturen in R°	Temperaturen (Änderung)	Folge-Korrektion $h\alpha = 0{,}05\,\alpha$	
0^h	1,30		18,13°			
1^h		+ 0,10		— 2,19°	+ 0,005' = + 0,011^{mm}	(5)
1^h	1,40		15,94			
1^h		+ 0,10		— 2,20°	+ 0,005' = + 0,011^{mm}	
2^h	1,50		13,74			

Wenn also die Temperatur im allgemeinen um rund 2° in 1 Stunde abnimmt, so zeigt das Keilmass k die Stange um rund 0,01^{mm} zu klein, weshalb die Korrektion $\alpha h = + 0{,}01^{mm}$ zugesetzt werden muss. Nimmt die Temperatur im allgemeinen zu, so erscheint die Stange vermöge des Keilmasses k zu lang. Alles dieses lässt sich vollständig durch das schon erwähnte Voraneilen des Zinks (oder Zurückbleiben des Eisens) erklären, denn dieses giebt bei Temperatur-Zunahme eine Verkleinerung von k, also in $l = L - (k - 1{,}4)\, m$ eine Vergrösserung von l.

Endlich ist noch eine vierte Formel durch Zufügung eines quadratischen Folge-Gliedes gebildet worden:

$$l = L - (k - 1{,}4)\, m - (k - 1{,}4)^2 \varrho + \alpha h + \alpha^2 k \qquad (6)$$

Durch diese neuen Formeln, namentlich (4), sind nicht bloss die auf dem Komparator gemachten Stangen-Vergleichungen in bessere Übereinstimmung gebracht, sondern auch die bei den Basismessungen selbst auftretenden Differenzen der metronomischen Rechnung zugänglich gemacht.

Trotzdem haben die Stangen-Vergleichungen noch erhebliche Schwankungen und Unsicherheiten gezeigt, z. B. bei 4 Gruppen von Vergleichungen der Stangen I II III IV mit dem Normalmass gab sich folgendes, in Pariser Linien:

Gruppe	Stange I	II	III	IV	Mittel
1.	1728,1393	1728,1698	1728,1800	1728,1842	1728,1683
2.	1396	1700	1733	1753	1646
3.	1491	1803	1877	1835	1751
4.	1457	1772	1845	1801	1719

Während in den einzelnen Gruppen viel bessere Übereinstimmung war, zeigten die Gruppen-Mittel diese bis zu 0,01 Par. Linien = 0,026^{mm} gehenden Abweichungen.

Diese Erscheinung, welche auch in anderen Fällen beobachtet ist, giebt die Warnung, dass mittlere Fehler, welche aus einzelnen Gruppen von Messungen im wesentlichen unter gleichen Umständen erlangt wurden, nicht ohne weiteres als reelle Genauigkeits-Masse anzusehen sind, und es scheint, dass die sehr kleinen mittleren Fehler der *Bessel*schen Vergleichungen von 1834, welche wir auf S. 83 erwähnt haben, aus solchen Gründen zu klein ausgefallen sind.

General *Schreiber* hat die vorstehenden Angaben in der „Zeitschr. f. Verm." 1882, S. 1—17 veröffentlicht, und dazu noch folgendes bemerkt:

„Es ist nicht gelungen, die Ursachen der enormen Schwankungen (bei den verschiedenen Vergleichungen) dergestalt festzustellen, dass sie in Zukunft vermieden werden können. Man wird vielmehr Unsicherheiten bis zu etwa einer hundertel Linie oder 0,02 Millimeter, auch bei ferneren mit den *Bessel*schen Messstangen auszuführenden Vergleichungen und Basismessungen gewärtigen müssen."

Massvergleichungen für den Repsold schen Stahl-Zink-Apparat von Comstock.

Ähnliche Verhältnisse wie General *Schreiber* mit den *Bessel*schen Zink-Eisen-Stangen fand auch General *Comstock* in Washington mit Zink-Stahl-Stangen. Aus dem „Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey by *Comstock* etc. Washington 1882", S. 223—230, entnehmen wir hierüber folgendes:

Die Zink-Stahl-Stange, deren mechanische Einrichtung wir schon in § 14. S. 99 bis 102 beschrieben haben, wurde in gleichen Umständen wie bei der Basismessung selbst, d. h. in einer Röhre eingeschlossen, im freien Felde, unter Zelt-Schutz, in folgender Weise besonders untersucht:

Eine Messing-Stange diente in einer Verpackung von schmelzendem Eis zur Vergleichung, indem diese durch Eis auf 0° erhaltene Stange und die Zink-Stahl-Stange in ihrer jeweiligen Temperatur, abwechselnd unter dasselbe Mikroskopen-Paar zur Ablesung gebracht wurden.

Dabei wurde an der Zink-Stahl-Stange die jeweilige Differenz $Z - S$ mikroskopisch *beobachtet*, ausserdem konnte aber auch ein Wert $Z - S$ *berechnet* werden aus der gleichzeitigen Vergleichung mit der in Eis verpackten Messingstange und aus der früher vielfach und genau bestimmten Differenz $z - s$ der einzelnen Ausdehnungs-Coëfficienten für Zink und Stahl.

Die Differenzen zwischen berechneten $Z - S$ und beobachteten $Z - S$ zeigten einen regelmässigen Tagesverlauf, dessen Hauptwerte nachstehende Tabelle zeigt. Dabei ist gesetzt:

$$(Z - S)\text{ Rechnung} - (Z - S)\text{ Beobachtung} = \varDelta$$

$$\frac{e}{s - e}\varDelta = 0{,}6522\,\varDelta = \delta$$

Folgendes ist eine Reihe von Mittelwerten solcher Beobachtungen:

8 Tage zwischen 23. August und 3. September 1881 (Report S. 228—230)

Tageszeit		Temperatur	$\varDelta$	δ
Morgen	8^h	20,6° C	$-5{,}9^\mu$	$-3{,}8^\mu$
	10	22,8	$-2{,}4$	$-1{,}6$
Mittag	12	25,4	$+4{,}7$	$+3{,}1$
	2	26,6	$+14{,}5$	$+9{,}4$
	4	26,3	$+14{,}6$	$+9{,}5$
Abend	6	25,2	$+6{,}5$	$+4{,}2$
	8	23,9	$-1{,}6$	$-1{,}0$
	10	22,5	$-10{,}0$	$-6{,}5$
Nacht	12	21,4	$-16{,}7$	$-10{,}9$
	2	20,7	$-15{,}1$	$-9{,}8$
	4	20,3	$-12{,}1$	$-7{,}9$
Morgen	6	19,9	$-15{,}1$	$-9{,}8$

Die hier mit δ bezeichneten Werte entsprechen dem *Schreiber*schen Gliede $h\,\alpha$ (s. o. (4) und (6) S. 105), jedoch mit anderen Vorzeichen, was darin seinen Grund hat, dass die Massen-Verhältnisse von Zink und Eisen bei *Repsold* (Fig. 6. S. 99) ganz andere sind als bei *Bessel* (Fig. 2. S. 77).

Auf Grund von solchen Versuchen, wie die in vorstehender Tabelle dargestellten, wurden für die amerikanischen Basismessungen von Chicago kleine Korrektionen δ in in Rechnung gebracht, in ähnlicher Weise wie durch $\alpha\,h$ und $\alpha^2\,k$ in den *Schreiber*schen Formeln für die Göttinger und Meppener Messungen.

§ 16. Verschiedene Projekte zur Basismessung.

Die Konstruktion von Basismess-Apparaten bietet dem Erfindungsgeist ein weites Feld, und obgleich nicht anzunehmen ist, dass wirklich leistungsfähige Apparate anders als im engsten Anschluss an die Berufs-Praxis entstehen werden, können wir doch einige solche mehr oder weniger ernsthaft zu nehmende Projekte betrachten.

Das Messrad.

Einen kühnen Gedanken hat in der Anfangszeit der „Europäischen Gradmessung" 1868, *Steinheil* in München ausgesprochen, nämlich, mit einem *Messrad* gewöhnliche geradlinige Eisenbahn-Linien zu befahren, und dadurch Basismessungen in grosser Menge ohne viele Mühe oder Kosten zu erlangen. —

Nach *Steinheils* Vorschlägen wurden von *Voit* in München einige Versuche im kleinen angestellt, über welche *Steinheil* in den „astr. Nachr." 72. Band (1868) Nr. 1728, S. 369—378 berichtet.

In dem Münchener Glaspalast wurde ein Doppelgeleise von circa 20^m Länge von gewöhnlichen Vignole-Schienen, wie bei der bayerischen Staatsbahn (mit Laschenverbindungen und kleinen Zwischenräumen zwischen je 2 Schienen) angelegt.

Das Messrad war von Holz mit einem kupfernen Reif von $0{,}922^m$ Durchmesser,

und wurde aus freier Hand geleitet, es machte daher unvermeidliche Schwankungen, dennoch stimmten die Wiederholungen unter einander schon auf etwa 0,01 %.

Später wurde für das Rad ein Gestelle konstruiert, welches die Rad-Ebene genau in der Vertikal-Ebene der Schienen erhalten soll. Damit wurden 50 Befahrungen einer Eisenbahnstrecke von 17,383^m (6 Radumfänge) gemacht, wobei sich der mittlere Fehler der einmaligen Befahrung $= \pm 0,30^{mm}$ ergab oder $\pm 2,3^{mm}$ für 1^{km}, wenn man annimmt, dass es sich nur um unregelmässige Fehler handelt.

Der Basis-Mess-Wagen.

In dem Werke von *Zachariae* „Die geodätischen Hauptpunkte“, deutsch von *Lamp*, Berlin 1878, S. 94, wird folgendes Projekt von *Bruhns* in Leipzig berichtet:

In der Basislinie werden, mit Zwischenräumen von ungefähr 4^m, eiserne Pflöcke eingerammt, deren Oberfläche mit einem Punkt oder einem Kreuz versehen ist. Der Messapparat besteht aus einem 4^m langen Massstab und zwei an den Enden angebrachten vertikalen Mikroskopen, mit denen man die Massstablänge auf die Pfahlköpfe durch Mikrometer-Messung vergleichend übertragen kann. Dieser Apparat liegt auf einem *Wagen*, wird durch ein Dach und Seitenwände gegen Sonnenschein u. s. w. geschützt, und fährt somit in Absätzen von 4^m über die ganze Basis hin.

Röhren-Massstäbe mit Wasserfüllung.

In der „Zeitschr. f. Verm.“ 1881, S. 235, hat *Reitz* den Vorschlag gemacht, *gezogene Messingröhren* als Basismessungs-Massstäbe zu verwenden; die Länge soll 4—5 Meter, der äussere Durchmesser 2^{cm} und die Wandstärke nur 1^{mm} sein, solche Röhren sollen sehr hart und widerstandsfähig sein. Durch eine Füllung mit Wasser (oder irgend einer anderen Flüssigkeit, vgl. S. 64) hat man das Mittel, die Temperatur der Röhren durch eingetauchtes Quecksilber-Thermometer zu bestimmen, indem angenommen wird, dass das Wasser bei seiner guten Wärmeleitungs-Fähigkeit die Temperatur des sehr dünnen Rohres selbst besitzt, mit dem es sich auf seiner ganzen inneren Fläche in Berührung befindet.

Messungen mit Stahlbändern und Metalldrähten (Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1885, S. 362—365).

In Stockholm hat *Jäderin*, 1885, Längenmessungen mit Stahlbändern und mit Drähten aus Stahl und Messing gemacht, welche nach Angabe des Urhebers sehr genau und etwa zu Basisbestimmungen zweiten Ranges geeignet sein sollen. Die Drähte werden über Stative ausgestreckt, dabei durch Gewichte in konstanter Spannung gehalten, so dass die durch die Spannung erzeugte Verlängerung, und die Verkürzung durch Einschlagen, sich gerade aufheben. Die Längenbestimmung geschieht mittelbar durch Vergleichung der Drahtmessung mit einer anderweitigen Stangenmessung.

Die Geschwindigkeit ist bedeutend, die grösste Leistung war 550^m in 1 Stunde und 2368^m in einem 9stündigen Arbeitstage.

Das Schätz-Mikroskop.

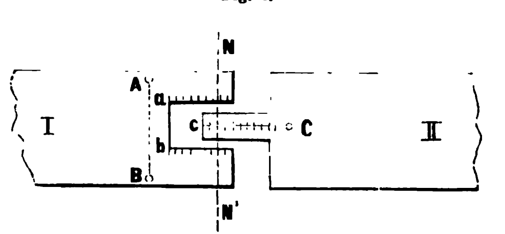
Während Nonien und Schrauben-Mikroskope längst zur Basismessung angewendet wurden, ist ein Hilfsmittel, welches in mehrfacher Hinsicht nach unserer Ansicht sich hier vortrefflich eignet, noch nicht benützt worden, nämlich das Schätz-Mikroskop, das wir früher in Band II, S. 151—152 und S. 593 beschrieben haben.

Wir machen zunächst eine allgemeine Überlegung:

Um einen mittleren unregelmässigen Messungsfehler von rund $\pm 1^{mm}$ auf 1 Kilometer, d. h. den thatsächlich bei guten Messungen vorkommenden Betrag zu erklären, braucht man keine sehr feinen optischen und mechanischen Hilfsmittel anzunehmen, denn bei der üblichen Stangenlänge von 4^m kommen 250 Lagen auf 1 Kilometer, und wenn μ der mittlere Fehler *einer* Lage ist, so hat man $\mu\sqrt{250} = 1^{mm}$, woraus folgt $\mu = 0{,}063^{mm}$; dieses ist ein Betrag, den man sogar durch Schätzung von freiem Auge an einer Millimeter-Teilung erzielen könnte, (etwa entsprechend einem Winkel von 2′ an einer Kreisteilung von 100^{mm} Halbmesser).

Da man aber natürlich die Genauigkeit im einzelnen weiter treibt, wurde man bald zu Nonien, Mikroskopen u. s. w. geführt. Als weiteres gutes Hilfsmittel zur Bestimmung des Zwischenraums oder des Übergreifens an der Grenze zweier Messstangen betrachten wir das *Schätz-Mikroskop*. Dasselbe hat unbedingt die für solche Zwecke nötige Genauigkeit, und giebt eine Ablesung auf *einen Blick*, was zur Zeitsparung bei Basismessungen sehr wichtig ist.

Fig. 1.



Die Anwendung eines Schätz-Mikroskops zur Messung des Anschlusses zwischen zwei aufeinander folgenden Stangen I und II ist in Fig. 1. angedeutet.

Die Stange I endigt gabelförmig und umfasst mit zwei Teilungen a und b die Teilung c, welche sich auf einem zungenartigen Fortsatze der Stange II befindet. Ein Schätz-Mikroskop wird mit drei Fussspitzen auf die Punkte A, B und C gestellt, von denen A und B unbedingt fest sind (etwa konische Löcher), während C dem Spielraum des Anschlusses entsprechend veränderlich ist. Man kann vielleicht auch das Schätz-Mikroskop mit einer Kipp-Axe $A\,B$ aufstellen. Das Schätz-Mikroskop, welches somit auf den drei Punkten A, B und C aufsitzt, hat eine horizontale Axe in der Richtung I II und Kippbewegung in der Querrichtung $N\,N'$, so dass die 3 Teilungen a, b und c rasch nach einander abgelesen werden können.

Trennung der Längenmessung von den Hilfs-Operationen.

Die Einrichtungen, welche zu einem Basis-Apparate gehören, und die Operationen mit denselben, sind wesentlich zweierlei Art, *erstens* solche, welche zur Temperatur-Ausdehnung und Intervall-Bestimmung, d. h. zur eigentlichen Längenmessung dienen, und *zweitens* die verschiedenen mechanischen Hilfsmittel für das Auflegen der Stangen, Geradrichtung und Neigungsmessung u. s. w.

Die eigentliche Längenmessung muss ihrer Natur nach eine *kontinuierliche* Operation sein, sogar mit einer nahezu gleichförmigen Geschwindigkeit, während das bei den Hilfs-Operationen nicht nötig ist.

Wir glauben deshalb, dass die eigentliche Längenmessung, d. h. das Legen der Messstangen und das Bestimmen der Zwischenräume, oder Übergreifungen ihrer Enden, zeitlich und räumlich *getrennt* werden sollte von den vorbereitenden Hilfs-Verrichtungen der Gerad-Richtung, Neigungs-Bestimmung u. s. w.

Dies könnte z. B. dadurch geschehen, dass man stets etwa 1 Kilometer voraus

die Basis durch eingerammte Pfähle (etwa von 4 zu 4 Meter) absteckt, geradrichtet und nivelliert. Die Pfähle wären nötigenfalls zum Einrammen unten mit eisernen Schuhen und jedenfalls oben zum Auflegen der Messstangen mit scharfgeformten Metall-Kappen zu versehen, welche zum Geradrichten (von 100 zu 100^m nach einer Schnur) Spielraum und Richte-Schrauben haben (dieses giebt für 1^{km} Länge 250 Pfähle, d. h. etwa 2,5^{cbm} Holz und etwa 100^{kg} Metall-Kappen).

Es mag hier auch nochmal daran erinnert werden, wie wir schon auf S. 71 mitgeteilt haben, dass *Benzenberg* zu seinen Basismessungen eine Messungsbrücke von 1000 Fuss = 314 Meter Länge legte, so dass die Längenmessung stets auf genügende Länge von den Hilfs-Operationen unabhängig war.

Auch *Schwerd* liess bei seiner kleinen Speyerer Basis (Sp. B. S. 23) Pfähle, welche 0,58^m lang, 0,1^m dick und oben mit einem Brettchen zur Aufnahme der Stangen versehen waren, 0,3^m tief, den ganzen Vorrat der Messung voraus, in den Boden schlagen.

§ 17. Länge und Einteilung der Grundlinien.

Die Basis eines Dreiecksnetzes ist eine genau gemessene Seite des Netzes.

Will man beim Übergang von der Basis zu andern Dreiecksseiten spitze Winkel oder ähnliche Fehlerquellen vermeiden, so bleibt nichts übrig, als der Basis nahezu die Länge einer Haupt-Dreiecksseite zu geben, und deswegen finden wir bald nach dem ersten Aufschwung der Triangulierungen, das Bestreben, die Grundlinien *so lang als möglich* zu machen.

Allerdings der Begründer *Snellius* hat nur ganz kleine Grundlinien von zuerst 328^m, 348^m, später etwa 2000^m, wie wir schon in der Einleitung, S. 4—5, angegeben haben; dagegen die französischen Messungen im 18. Jahrhundert hatten fast nie unter 10^{km} lange Grundlinien, nämlich:

1736 Gradmessung in Peru (La Condamine)	
Basis von Yarouqui	12 226^m
Basis von Tarqui	10 250^m
1736 Gradmessung in Lappland (Maupertuis)	
Basis von Tornea	14 436^m
1792 Gradmessung von *Delambre* und *Méchain* (vgl. S. 73):	
Basis von Melun	11 842^m
Basis von Perpignan	11 706^m

Auch in Deutschland mass man am Anfang dieses Jahrhunderts sehr lange Linien, z. B.:

1801 Bayerische Basis München-Aufkirchen	21 654^m
1820 Württembergische Basis Solitude-Ludwigsburg	13 032^m
1819 Rheinbayerische Basis Speyer-Oggersheim	15 460^m

Die letztgenannte Basis war mittelbare Veranlassung zum Verlassen der langen Grundlinien:

Professor *Schwerd* am Lyceum in Speyer war mit der vor seinen Augen vorgenommenen Messung von Steuerrat *Lämmle* nicht einverstanden, und behauptete, eine 20 mal kleinere Basis leiste denselben Dienst. Zum Beweis mass er mit seinen Lyceums-Schülern im Jahr 1820 eine kleine nur 860^m lange Grundlinie, und leitete die grosse Speyerer Linie mit guter Übereinstimmung daraus ab. (Fortsetzung s. S. 112.)

Übersicht der Längen und der Einteilungen für die 13 Grundlinien, welche bis jetzt mit dem Bessel schen Apparat gemessen wurden.

1. Königsberg, 1834.
Trenk A Mednicken
441ᵐ 1381ᵐ
—1822ᵐ

1. Basismessung bei *Königsberg*, 1834, von *Bessel* und *Bayer*. 2 Strecken.
2. Basismessung bei *Kopenhagen*, 1838. 2701ᵐ lang, im ganzen nur *einmal* gemessen, nur drei kleine Teilstrecken von zusammen 692ᵐ Länge sind zweifach gemessen.
3. Basismessung bei *Upsala* in Schweden.

4. Berlin, 1846.
A B C
—2336ᵐ—

4. Basismessung bei *Berlin*, 1846, von *Baeyer*. 4 ungleiche Strecken.

5. Bonn, 1847.
A D B C
—2134ᵐ—

5. Basismessung bei *Bonn*, 1847, von *Baeyer*. 6 ungleiche Strecken.
6. Basismessung bei *Lommel* in Belgien, 1852, 2301ᵐ lang, 5 Strecken je zweifach gemessen.
7. Basismessung bei *Ostende*, 1854, 2489ᵐ lang, 4 Strecken 622ᵐ, je zweifach gemessen.

8. Schlesien, 1854.
Knieschwitz 2 1 Hermsdorf
— 2763ᵐ—

8. Basismessung bei Strehlen in *Schlesien*, 1854, von *Baeyer*, 3 ungleiche Strecken.

9. Braak in Holstein, 1871.
Nordpunkt I II III IV V VI Südpunkt
—5875ᵐ—

9. Basismessung bei *Braak* in Holstein, 1871, von *v. Morozowicz*, trigonometrische Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme, 7 ungleiche Strecken.
10. Basismessung bei *Grossenhain* im Königreich Sachsen, 1872, von *Nagel* und *Bruhns*. Sächsische Triangulierung, 12 Strecken.

10. Grossenhain in Sachsen, 1872.
Baschütz Grossenhain Quersa
— 8909ᵐ

11. Basismessung bei *Oberhergheim* im Elsass, 1877, von *v. Morozowicz*, trig. Abteilung der preuss. Landes-Aufnahme; in der Gegend der früheren französischen Basis von Ensisheim, 22 Strecken: 376ᵐ + 20 mal 312ᵐ + 364ᵐ = 6980ᵐ.

11. Oberhergheim im Elsass, 1877.
Nordpunkt Südpunkt
0 5 6 11 16
—6982ᵐ—

12. Göttingen. 1880.
Nordpunkt 33 Strecken Südpunkt
0 11 22 33
—5193ᵐ—

12. Basismessung bei *Göttingen*, 1880, von *Schreiber*, trig. Abt. d. pr. Landes-Aufnahme, 33 Strecken von je 156ᵐ.

13. Meppen, 1883.
Westpunkt 45 Strecken Ostpunkt
0 15 30 45
—7033ᵐ

13. Basismessung von *Meppen*, 1883, von *Schreiber*, trig. Abt. d. pr. Landes-Aufnahme, 45 Strecken von je 156ᵐ.

Schwerd veröffentlichte seine Arbeit in dem Werk: „Die kleine Speyerer Basis, oder Beweis, dass man mit einem geringen Aufwand an Zeit, Mühe und Kosten durch eine kleine genau gemessene Linie die Grundlage einer grossen Triangulation bestimmen kann. Speyer 1822.“

Von da an kamen kurze Grundlinien ziemlich allgemein in Gebrauch, namentlich *Bessel* nahm zu seiner berühmten Gradmessung in Ostpreussen 1834 nur eine 1822^m lange Basis; doch ist das die untere Grenze, später ging man wieder weiter, und die neuesten deutschen Grundlinien sind 5—7 Kilometer lang.

Die Längen und Einteilungen der 13 Grundlinien, welche mit dem *Bessel*schen Apparate vermessen sind, sind auf S. 111 übersichtlich zusammengestellt.

Zahl der Wiederholungen.

Die Zusammenstellung auf S. 111 bezieht sich (mit unwesentlichen Ausnahmen) auf *Doppel*-Messungen, d. h. jede Strecke wurde *hin* und *her* gemessen.

Auch die älteren französischen Basismessungen des 17. und 18. Jahrhunderts sind meist doppelt gemacht, eine derselben, die Nachmessung der *Picard*schen Basis von Juvisy durch *Cassini* sogar 5mal. Dagegen die französischen Messungen mit den *Borda*schen Platin-Kupfer-Stangen von 1798—1828, welche wir schon auf S. 73 erwähnt haben, sind nur *ein*mal gemessen.

Auch die langen süddeutschen Grundlinien am Anfang dieses Jahrhunderts in Bayern und Württemberg sind unbegreiflicherweise nur *ein*mal gemessen, so dass über die unregelmässigen Messungsfehler jeder objektive Nachweis fehlt; z. B. sagt *Bohnenberger* über seine einmalige Messung der 13 Kilometer langen Solituder Linie nur, dass man „deren Länge bei aller angewendeten Kunst und Sorgfalt nicht bis auf kleine Teilchen eines Zolles verbürgen kann“.

Die *Schwerd*sche und alle nachfolgenden Grundlinien sind wieder in der Regel doppelt gemessen; als Ausnahme ist zu erwähnen, dass die badische Basis von Heitersheim, 2125^m lang, im Jahr 1846 sogar 8mal gemessen wurde.

Wie man aus Doppelmessungen oder allgemeiner aus Messungs-Wiederholungen im ganzen oder in Strecken den mittleren unregelmässigen Messungsfehler bestimmen kann, werden wir später in § 25. behandeln.

Gesamt-Übersicht der Basismessungen.

Eine Zusammenstellung aller zu der internationalen Erdmessung angemeldeten Basismessungen ist von *Perrier* gemacht worden. Dieselbe findet sich veröffentlicht in den Generalberichten der internationalen Erdmessung und zwar für 1877, S. 40 bis 55; für 1880, Annexe VI; für 1883, Annexe III; für 1887, Beilage IV.

Wir haben hieraus folgenden Auszug gebildet, wo n die Anzahl der Grundlinien, und $[B]$ deren Gesamtlänge für das einzelne Land, also $\frac{[B]}{n}$ die mittlere Länge einer Grundlinie ist.

Num.	Land	Anzahl n	Summe $[B]$	Mittel $\frac{[B]}{n}$
1.	Bayern	3	51,0^{km}	17,0^{km}
2.	Belgien	2	4,8	2,4
3.	Dänemark	1	2,7	2,7
4.	Frankreich mit Algerien	10	117,1	11,7
5.	Italien	9	42,8	4,7
6.	Holland	1	6,0	6,0
7.	Hessen-Darmstadt . .	1	7,7	7,7
7.	Schweden u. Norwegen	7	27,1	3,9
8.	Österreich-Ungarn . .	19	80,5	4,2
9.	Preussen	11	45,1	4,1
10.	Portugal	1	10,5	10,5
11.	Russland	19	113,3	6,0
12.	Spanien	9	32,8	3,6
13.	Schweiz	6	27,0	4,5
13.	Nord-Amerika . . .	5	49,0	9,8
	Summe	104	617,4	
	Gesamt-Mittel		$\frac{617,4}{104}$	$= 5,9^{km}$

Diese Tabelle ist nicht vollständig; es fehlen von den deutschen Linien die Württembergische und die Badische, namentlich aber fehlen die Britischen Messungen in England selbst und in den Kolonieen. Andererseits sind zwei preussische Linien (Strehlen und Berlin) infolge von Nachmessung doppelt aufgeführt.

In England sind nach S. 422 des Werkes: „Ordnance trigonometrical survey u. s. w.“ von 1791—1849, 7 Grundlinien von zusammen 219 579 engl. Fuss oder rund 66,9^{km} Länge gemessen worden (Mittel = 9,6^{km}); fügt man dieses zu der vorstehenden Zusammenstellung, und rechnet für die britischen Kolonieen noch einen runden Betrag, so kann man die gesamten Basislängen der Erde zu rund 700 Kilometer schätzen, oder 7% des Erdquadranten.

Ferner entnehmen wir aus dieser Statistik, dass die mittlere Länge einer Grundlinie rund = 6 Kilometer ist.

§ 18. Basisnetze.

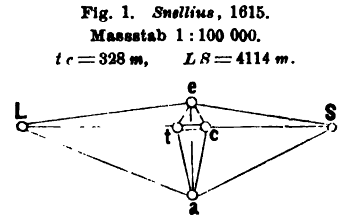
Die Basis einer Triangulierung ist meist erheblich *kleiner* als die Dreiecksseiten im allgemeinen, und es entsteht daher die Aufgabe, eine grosse Seite aus einer kleinen trigonometrisch abzuleiten. Ungünstige Dreiecks-Verbindungen sind hier nicht zu vermeiden; denn entweder macht man den Übergang von der kleinen Basis zu einer grossen Hauptdreiecksseite durch wenige Dreiecke, und man muss dabei spitze Schnitte anwenden; oder man nimmt eine grosse Zahl von Dreiecken, man hat dann aber eine grosse Zahl von Fehlerquellen.

Wir werden nun zuerst mehrere Basisnetze bekannter Triangulierungen be-

trachten, und sehen, wie zu verschiedenen Zeiten verschiedene Landmesser sich bemüht haben, teils durch zweckmässige Anordnung der Dreiecke, teils durch lange Grundlinien selbst, die in der Natur der Sache liegenden Schwierigkeiten zu überwinden.

1) *Das Basisnetz von Snellius* (Fig. 1.).

Fig. 1. *Snellius*, 1615.
Massstab 1 : 100 000.
$tc = 328$ m, $LS = 4114$ m.



Wie wir schon in der Einleitung S. 4 mitgeteilt haben, verdanken wir dem Niederländer *Willebrord Snellius* in Leiden 1715 die erste Triangulierung in dem heutigen Sinne; und in überraschender Weise hat das erste *Snellius*sche Basisnetz (Fig. 1.) diejenige Form, welche heute noch als die beste gilt. Allerdings die Genauigkeit absolut genommen war bei *Snellius* noch gering, die Basis tc wurde mit hölzernen Messlatten, und die Winkel mit einem geteilten Quadranten von 2,2 rhein. Fuss ohne Fernrohr auf etwa 1′ gemessen.

In Fig. 1. sind L und S die Türme von Leiden und dem südlich von Leiden gelegenen Dorfe Soeterwoute, die wirklich gemessene Grundlinie ist nur $tc = 87{,}05$ rheinl. Ruten $= 327{,}85^m$ lang, daran schliessen sich zwei hochgestellte Dreiecke tce und tca, und an die abgeleitete Linie $ea = 1229^m$ schliessen sich wieder zwei hochgestellte Dreiecke eaL und eaS, woraus $LS = 4114^m$ berechnet wird.

Für jedes der 4 eigentlichen Messungs-Dreiecke teilt *Snellius* nur je *zwei* Winkel als gemessen mit, und zwar jeweils die Winkel an der Basis, was nach der ganzen Art seiner Darstellung in solchen Fällen, in welchen er die Probestimmungen nicht mitteilen will, nicht ausschliesst, dass auch die dritten Winkel gemessen und ausgeglichen wurden; indessen scheint doch *Snellius* das Hauptgesetz, dass die *spitzen* Winkel (z. B. der Winkel a in dem Dreieck tac) wesentlich die Genauigkeit bestimmen, noch nicht gekannt zu haben.

2) *Basisnetze von Schwerd, 1820.*

Der Vater der neueren Basisnetz-Theorie ist Professor *Schwerd* in Speyer (vgl. S. 110 und 112). Dieser hat im Jahre 1820 das richtige getroffen; er fand nämlich durch theoretische Betrachtungen und Vergleichungen:

erstens, dass das *rhombische Netz* $ABND$ Fig. 2a. (S. 115)das günstigste ist (was schon *Snellius* hatte) und

zweitens, dass die *spitzen* Winkel bei N und D, welche der Basis gegenüber liegen, hauptsächlich bestimmend für die Genauigkeit sind, und deswegen mit besonderer Schärfe gemessen werden müssen.

Die eigentlichen kleinen Basisnetze, welche *Schwerd* gemessen und berechnet hat, sind in den nebenstehenden Figuren (S. 115) dargestellt.

Schwerd hat ausser seinem „Hauptnetz“ Fig. 2a. noch zwei „Prüfungsnetze“ Fig. 2b. und Fig. 2c. angewendet, und zwar hat das Hauptnetz mit den Prüfungsnetzen nicht einen einzigen Winkel gemein, während die beiden „Prüfungsnetze“ teilweise dieselben Winkel enthalten. Die eigentliche Basis AB selbst ist nur 860^m lang. Die Entfernung HD leitete *Schwerd* hieraus dreifach trigonometrisch ab mit folgenden Ergebnissen (die kleine Speyerer Basis, Seite 68):

1) Hauptnetz gab $HD =$ 4959,084[m]
2) Erstes Prüfungsnetz gab 4959,068[m]
3) Zweites Prüfungsnetz gab 4959,098[m]

Fig. 2.
Basisnetze von *Schwerd*, 1820.
Massstab 1 : 100 000.
$AB = 860\,m$, $HD = 4959\,m$.

Fig. 2a. Hauptnetz.

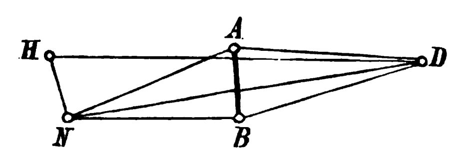
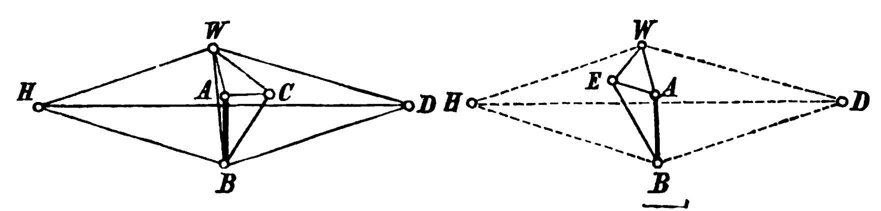


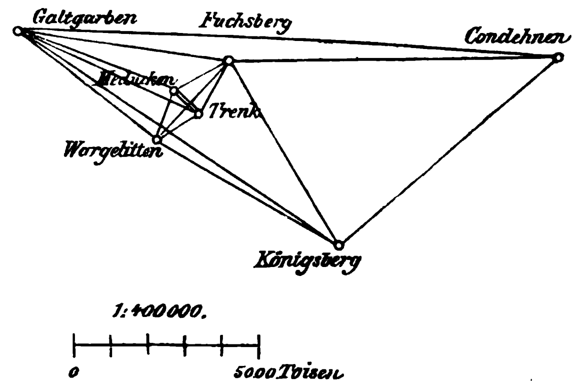
Fig. 2b. Erstes Prüfungsnetz. Fig. 2c. Zweites Prüfungsnetz.



Die weitere Verbindung der Linie HD mit der amtlichen bayerischen Basis Speyer-Oggersheim haben wir schon in unserem I. Bande, S. 207—212 behandelt, wobei mit $D\,Sp$ der Punkt *Dom in Speyer* bezeichnet ist, welcher abgesehen von einer Exzentrizität auf dem Turme, dem Punkte D in Fig. 2a., 2b. und 2c. entspricht.

3) *Basisnetz der Gradmessung in Ostpreussen.*

Fig. 3.
Gradmessung in Ostpreussen, 1834.
Massstab 1 : 400 000.
Trenk-Mednicken = 1822 m, Galtgarben-Condehnen = 29 563 m.

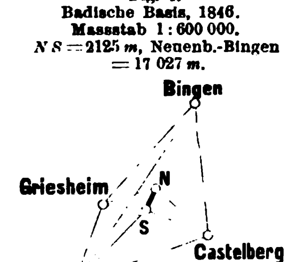


Die vorerwähnten Überlegungen von *Schwerd* haben auch auf die Anordnung der *Bessel*schen Basismessung bei Königsberg Einfluss gehabt; *Bessel* erwähnt auf S. 38 der Gradmessung in Ostpreussen das „sehr lesenswerte Buch von *Schwerd*", und machte seine Königsberger Grundlinie nur 1822^m lang, wie aus vorstehender Zeichnung (Fig. 3. S. 115) zu ersehen ist.

Die zwei Rhomben Wargelitten-Fuchsberg und Galtgarben-Königsberg entsprechen dem *Schwerd*schen Gedanken, allein die Verstärkung der Messungs-Genauigkeit in den spitzen Winkeln hat *Bessel*, wie es scheint im Vertrauen auf die Gesamt-Ausgleichung, nicht durchgeführt.

Den Anschluss an das Gesamtnetz der Gradmessung in Ostpreussen zeigt die Netzfigur, welche wir schon auf S. 14 der Einleitung gegeben haben.

Fig. 4.
Badische Basis, 1846.
Massstab 1 : 600 000.
$NS = 2125\,m$, Neuenb.-Bingen $= 17\,027\,m$.



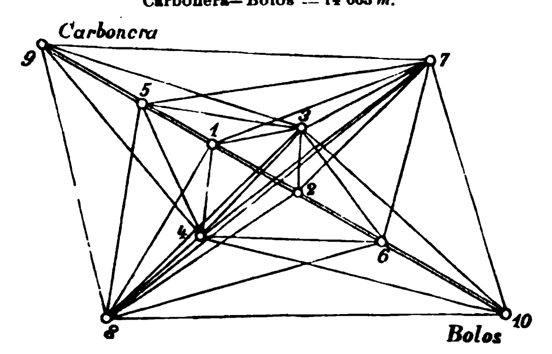
4) *Badische Basis bei Heitersheim, 1846.*

Auch bei der kurzen badischen Basis, welche 1846 bei Heitersheim (zwischen Freiburg und Basel) gegenüber der französischen Basis von Ensisheim (Oberhergheim) von *Klose* und *Rheiner* gemessen wurde, zeigt sich *Schwerd*s Grundgedanke. Die Winkelmessungen hiezu haben wir bereits in Band II, S. 183 als Repetitions-Messungsbeispiele mitgeteilt. Die spitzen Winkel sind verstärkt gemessen.

5) *Spanische Basismessung von Ibanez, 1858.*

General *Ibanez* liess 1858 für seine spanische Triangulierung eine lange Linie messen, bei Madridejos (etwa 100 Kilometer südlich von Madrid). Die Gesamtlänge von 14 663^m wurde in 5 Teile geteilt, welche alle unter sich trigonometrisch verbunden wurden.

Fig. 5.
Spanische Basis bei Madridejos, 1858.
Massstab 1 : 200 000.
Carbonera—Bolos $= 14\,663\,m$.



Die Anschauungen, von welchen General *Ibanez* hiebei geleitet wurde, sind durch folgenden Auszug einer Mitteilung in der Madrider Akademie-Sitzung vom 30. Nov. 1863 charakterisiert („Astr. Nachr." 61. Band, 1864, Nr. 1462, S. 339—346): Die zwischen einigen französischen und deutschen Geodäten streitige Frage, ob kleine

Grundlinien genügen, wurde dadurch zu beantworten gesucht, dass die lange Grundlinie in 5 Teile geteilt wurde, welche unter sich durch ein Netz von 10 Punkten mit 120 Dreiecken und 45 Verbindungs-Linien trigonometrisch verbunden wurden. Die trigonometrische Rechnung, welche sich auf das Mittelstück stützte, gab für die vier äusseren Stücke Werte, welche von den unmittelbar gemessenen Längen nur sehr wenig abwiechen, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

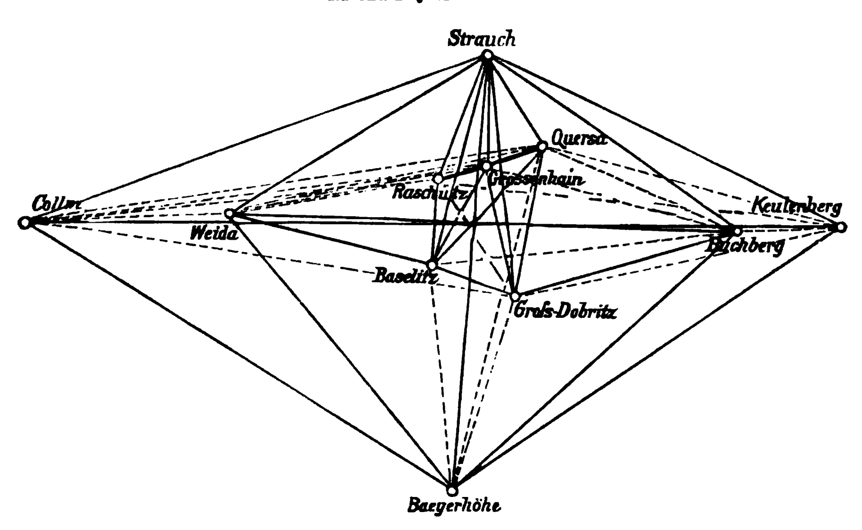
	Messung	Triangulierung	Differenzen
1te Sektion	3077,459^m	3077,462^m	$-0{,}003^m = -1^{mm}$ für 1^{km}
2te „	2216,397	2216,399	$-0{,}002 = -1$ „ „
3te „	2766,604	(2766,604)	. .
4te „	2723,425	2723,422	$+0{,}003 = +1$ „ „
5te „	3879,000	3879,002	$-0{,}002 = -0{,}5$ „ „
Basis	14662,885^m	14662,889^m	$-0{,}004^m = -0{,}3^{mm}$ für 1^{km}

Wenn, wie von den spanischen Geodäten beabsichtigt wurde, diese 4 Differenzen -3^{mm}, -2^{mm}, $+3^{mm}$, -2^{mm} zur Entscheidung der Frage langer oder kurzer Grundlinien dienen sollen, so ist damit die Frage zu Gunsten der kurzen Linien für diesen Fall entschieden.

Weiteres über diese spanische Vermessung giebt der Gen.-Ber. der „Eur. Gr. für 1869, S. 62—65 und für 1876, S. 125—128“, sowie das Werk: „Memorias del instituto geografico y estadistico“, ferner (nach einem Citat des Gen.-Ber. für 1869, S. 63:) „Base centrale de la triangulation géodésique de l'Espagne par les Colonels *Ibanez* et *Saavedra*, 1865“.

6) Sächsische Basis bei Grossenhain, 1872.

Fig. 6.
Sächsische Basis bei Grossenhain.
Massstab 1 : 600 000.
Raschütz-Quersa = 8909 m.



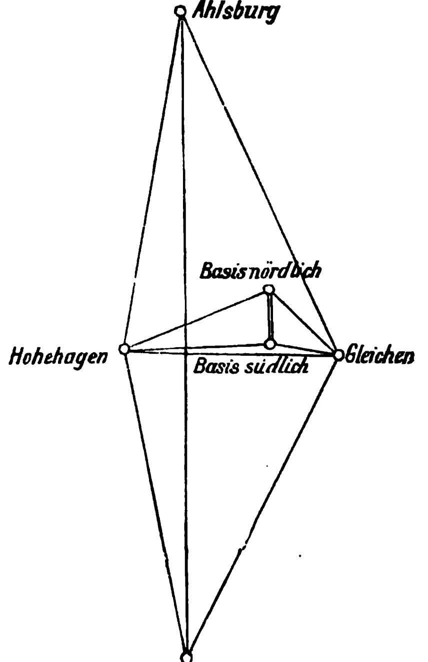
Für die Gradmessung und Landes-Triangulierung im Königreiche Sachsen wurde im Jahre 1872 eine lange Grundlinie mit dem *Bessel*schen Apparat unter Leitung von *Nagel* und *Bruhns* gemessen, deren Basisnetz in Fig. 6. (S. 117) gezeichnet ist.

Näheres hierüber giebt das amtliche Werk: „Astr. geodät. Arbeiten für die Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, I. Abteil. die Grossenhainer Grundlinie, von *Bruhns* und *Nagel*, Berlin 1882“, und Auszug hieraus im „Civilingenieur XXVIII, 1882, Heft 1“, und Bericht von *Helmert* in der „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 596—604.

Aus diesem *Helmert*schen Bericht ist auch unsere Fig. 6. (S. 117) entlehnt.

7) *Göttinger Basis, 1880.*

Fig. 7.
Göttinger Basis, 1880.
Massstab 1 : 670 000.
Basis NS = 5193 *m*, Ahlsburg-Meissner = 57 507 *m*.



Die Göttinger Basis ist die zwölfte der mit dem *Bessel*schen Apparat gemessenen Grundlinien; die Messung geschah 1880 unter Leitung von General *Schreiber*, welcher den Mess-Apparat und dessen Anwendung zu diesem Zwecke verbessert hatte, und auch in der trigonometrischen Anlage des Basisnetzes von früherem abwich.

Das Göttinger Basisnetz Figur 7. zeichnet sich durch klassische Einfachheit aus, es entspricht dem von General *Schreiber* dabei ausgesprochenen Grundsatze, „dass die Güte der Messungen nicht in einer systemlosen Häufung von Kontrolen, sondern in einer scharfen Messung solcher Elemente zu suchen ist, welche die Genauigkeit der Schluss-Ergebnisse in erster Linie bestimmen“ („Zeitschr. für Verm. 1880“, S. 397).

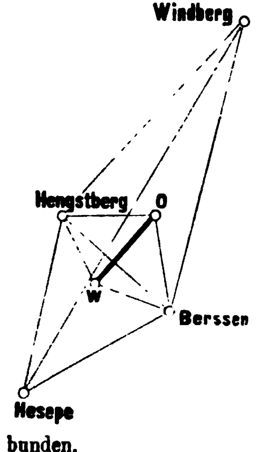
In diesem Sinne wurde das Göttinger Basisnetz Veranlassung für General *Schreiber*, die Anordnung der Winkel-Beobachtungen nach dem Grundsatze günstigster Gewichts-Verteilung allgemeiner zu untersuchen (s. *Schreiber*: Die Anordnung der Winkel-Beobachtungen im Göttinger Basisnetz, „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 129—161). Wir werden später in § 23. wieder darauf zurückkommen.

8) *Basis bei Meppen, 1883.*

Die Meppener Basis, 1883 unter Leitung von General *Schreiber* gemessen, entspricht in allen Beziehungen ihrer Vorgängerin von Göttingen.

Das Basisnetz besteht nur aus 4 eigentlichen Übertragungs-Dreiecken.

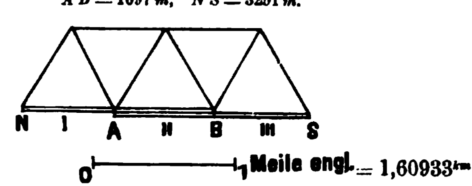
Fig. 8.
Basis bei Meppen, 1883.
Massstab 1 : 600 000.
$WO = 7039$ m, Hesepe-Windberg $= 34\,561$ m.



Amtliches ist hierüber noch nicht veröffentlicht, eine vorläufige Mitteilung giebt die „Zeitschr. für Verm. 1883", S. 577—584.

9) Basis am Kap der guten Hoffnung, 1886.

Fig. 9.
Basis am Kap der guten Hoffnung, 1886.
Massstab 1 : 86 000.
$AB = 1097$ m, $NS = 3201$ m.



Das in Fig. 9. dargestellte Basisnetz hat eine von allen unseren vorhergehenden Fig. 1—8. abweichende Form. Die 3 Abschnitte sind für sich gemessen und durch ein Gitternetz von 5 Dreiecken unter sich trigonometrisch verbunden.

Denkt man sich das Mittelstück AB *allein* gemessen, so lässt sich die Gesamtlänge NS trigonometrisch berechnen und zwar stimmte dieses im vorliegenden Falle auf $+0{,}0002 - 0{,}0027 = -0{,}0025$ engl. Fuss $= 0{,}8$ mm.

Die Frage der theoretischen Fehler-Fortpflanzung in einem solchen Netze werden wir später besonders behandeln (§ 20.); wir werden finden, dass das Gitternetz Fig. 9. theoretisch ungünstiger ist, als das Rhombennetz, allein das Gitternetz mit nur *kurzen* Seiten hat praktische Vorzüge.

(Unsere Fig. 9. ist aus einem Berichte in der „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 59 entnommen.)

§ 19. Mittlere Fehler verschiedener Dreiecksseiten.

Wenn in Fig. 1. die Grundlinie b und die drei Winkel (1), (2), (3) gemessen sind, so kann man, nach Ausgleichung der drei Winkel auf 180°, die Seite B berechnen:

$$B = b\,\frac{\sin(2)}{\sin(1)} \tag{1}$$

und wir wollen für diese Funktion den mittleren Fehler bestimmen.

Fig. 1.

Es kommen hiebei die Formeln unseres I. Bandes § 43. S. 104 bis 106 in Betracht, und wir haben auch schon den mittleren Fehler einer Dreiecksseite im I. Band § 111. S. 324 ermittelt, doch mögen die Hauptzüge der Entwicklung hier nochmals vorgenommen werden:

Die Bedingungs-Gleichung ist:

$$+(1)+(2)+(3)-180^\circ = 0$$

also die Coëfficienten der Bedingungs-Gleichung:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1 \tag{2}$$

Versteht man unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Differentialquotienten der Funktion B nach Gleichung (1), so hat man zunächst:

$$f_1 = \frac{\partial B}{\partial (1)} = -\frac{b \sin (2)}{\sin^2 (1)} \cos (1) = -\frac{b \sin (2)}{\sin (1)} \operatorname{cotg} (1) = -B \operatorname{cotg} (1)$$

Wir wollen zur Abkürzung schreiben:

$$\operatorname{cotg} (1) = c_1 \qquad \operatorname{cotg} (2) = c_2 \qquad \operatorname{cotg} (3) = c_3 \tag{3}$$

Dann wird:

$$f_1 = -B c_1 \qquad f_2 = +B c_2 \qquad f_3 = 0 \tag{4}$$

Die Gewichte der drei gemessenen Winkel seien:

$$p_1 \qquad p_2 \qquad p_3 \tag{5}$$

Dann ist das Gewicht P der Dreiecksseite B nach der Ausgleichung, indem hier die Basis b als fehlerfrei betrachtet wird, zunächst in allgemeiner Formel gegeben durch:

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{f f}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a f}{p}\right]}{\left[\frac{a a}{p}\right]} \tag{6}$$

Die Einsetzung der einzelnen Teile aus (2), (4) und (5) giebt:

$$\frac{1}{P} = B^2 \left(\frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2}\right) - \frac{B^2}{\left[\frac{1}{p}\right]} \left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2}\right)^2 \tag{7}$$

Dieses kann auch auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{P} = B^2 \frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \tag{8}$$

Setzt man den mittleren Gewichtseinheits-Fehler $= \pm \mu$, so hat man auch den mittleren Fehler der Seite B, den wir mit $m(B)$ bezeichnen wollen:

$$m(B) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{1}{P}} = \frac{\mu}{\varrho} B \sqrt{\frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \tag{9*}$$

Wir wollen auch noch den mittleren Fehler der Längen-*Einheit* von B einführen, und hiefür das Zeichen $\mu(B)$ setzen, also:

$$\frac{m(B)}{B} = \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \tag{10*}$$

Nach diesen verschiedenen Formen kann die Genauigkeit der trigonometrischen Übertragung von b auf B beurteilt werden.

Aus der Formel (7) ist zu ersehen, dass mit $c_1 = c_2$, oder mit Winkel (1) = Winkel (2), der zweite Teil ganz fortfällt, und dass dann p_3 gar nicht mehr in der Formel vorkommt; wenn also das Dreieck mit (1) = (2) gleichschenklig ist, also $B = b$, so ist der Winkel (3) bei der Messung *gleichgültig*. Dieses zuerst eigentümlich klingende

*) Es soll für diese und die folgenden Betrachtungen das Zeichen m wie ein Funktionszeichen gebraucht werden, allgemein $m(x)$ = mittlerer Fehler von x, und $\mu(x)$ soll einen mittleren sogenannten *relativen* Fehler bedeuten, nämlich $\mu(x) = \frac{m(x)}{x}$, während μ an und für sich den mittleren Gewichtseinheits-Fehler, d. h. den mittleren Winkelfehler in Sekunden bezeichnet.

Ergebnis haben wir schon früher im I. Bande, S. 324 erwähnt; und wenn man *nur* die Seite B von Fig. 1. (S. 119) bestimmen wollte und B nahezu $= b$ ist, dann brauchte man in der That den Winkel (3) gar nicht oder nur oberflächlich zu messen; da man aber gewöhnlich auch die *andere* Seite, welche (3) gegenüber liegt, haben will, so darf auch der Winkel (3) nicht vernachlässigt werden.

Wenn das Dreieck bei (3) rechtwinklig ist, so wird $c_3 = 0$, B ist dann Kathete, deren mittlerer Fehler nach (10) zu berechnen ist, wobei nun $c_2 = 1 : c_1$ ist.

Gleiche Gewichte.

Aus (8) oder (10) wollen wir auch noch den besonderen Fall herleiten, dass alle Gewichte einander *gleich*, also $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ gesetzt werden; dann ist:

$$\mu(B) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}(c_1^2 + c_2^2 + c_1 c_2)} \tag{11}$$

und für das *gleichseitige* Dreieck mit $c_1 = c_2 = c_3 = cotg\, 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ giebt dieses:

$$\mu(B) = 1{,}4142\, \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60° \quad \text{oder} \quad = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}000\,003\,96\, \mu \tag{12}$$

Nimmt man $\mu = 1''$, so hat man rund $\mu(B) = 0{,}000\,004$, oder der Übertragungs-Fehler beträgt in diesem Falle 4 Milliontel der Länge, oder 4 Millimeter auf 1 Kilometer.

Sehr ungleiche Gewichte.

Die Formel (8) enthält auch die besonderen Fälle, dass abwechselnd p_1 oder p_2 oder $p_3 =$ *Null* werden; die hiefür gültigen Beziehungen haben wir bereits in Band I, S. 325 ermittelt.

Nach diesem betrachten wir aber noch den Fall, dass man die Gewichte p_1 oder p_2 verstärkt oder vermindert, je nachdem die zugehörigen Winkel (1) und (2) mehr oder weniger *spitz* werden. Namentlich ein spitzer Winkel (1) gegenüber der Basis b in Fig. 1. (S. 119) wirkt bekanntlich sehr schädlich, und das zeigt sich in den Formeln dadurch, dass $cotg\,(1) = c_1$ sehr gross wird, wenn (1) klein ist. Nun zeigt aber die Formel (7), dass man dem grossen Werte c_1 dadurch entgegen wirken kann, dass man auch das Gewicht p_1 gross macht, d. h. den Winkel (1) verstärkt misst. Ebenso ist es mit c_2 und p_2.

Wir haben damit bereits den Hauptsatz über Gewichts-Verteilung, dass man einen spitzen Winkel, der einer Basis gegenüber liegt, besonders genau messen soll.

Kette von Dreiecken.

In der Dreieckskette Fig. 2. (S. 122) ist b die Basis, daraus wird zuerst B_1 abgeleitet, dann B_2, B_3 u. s. w. Jedenfalls entsteht jede Seite aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Sinus-Funktion, welche allgemein mit p bezeichnet sei, so dass man hat:

$$B_1 = p_1 b \qquad B_2 = p_2 B_1 \qquad B_3 = p_3 B_2 \tag{13}$$

Sind alle Dreiecke ähnlich, so sind auch alle $p_1, p_2, p_3 \ldots$ einander gleich, doch soll diese Annahme vorerst noch nicht gemacht werden.

Indem wir mit $m(B)$ den mittleren Fehler von B, mit $m(p)$ den mittleren Fehler des Multiplikators p, u. s. w. bezeichnen, haben wir aus (13):

$$m(B_1) = m(p_1)\,b \quad , \quad m(B_2) = m(p_2)\,B_1 \quad , \quad m(B_3) = m(p_3)\,B_2$$

Fig. 2.

Führt man die trigonometrische Rechnung durch alle Dreiecke hindurch, so hat man:

$$B_3 = b\,p_1\,p_2\,p_3 \ldots$$

oder logarithmisch:

$$\log B_3 = \log b + \log p_1 + \log p_2 + \log p_3 + \ldots \quad (14)$$

Die Basis b sei fehlerfrei, also beim Differentiieren konstant, man erhält also durch Differentiieren von (14):

$$\frac{dB_3}{B_3} = \frac{dp_1}{p_1} + \frac{dp_2}{p_2} + \frac{dp_3}{p_3} + \ldots$$

Geht man von den Differentialen zu mittleren Fehlern über, so erhält man

$$\left(\frac{m(B_3)}{B_3}\right)^2 = \left(\frac{m(p_1)}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{m(p_2)}{p_2}\right)^2 + \left(\frac{m(p_3)}{p_3}\right)^2 + \ldots \quad (15)$$

Wenn alle Dreiecke, um die es sich hier handelt, einander ähnlich sind, und in durchaus gleicher Gewichts-Anordnung gemessen werden, so sind die Faktoren p und die Fehlerfunktionen $m(p_1)$, $m(p_2)$ u. s. w. alle einander gleich; und wenn man weiter annimmt, es handle sich um n Dreiecke, so giebt (15):

$$\frac{m(B_n)}{B_n} = \frac{m(p)}{p}\sqrt{n} \quad (16)$$

oder

$$\mu(B_n) = \mu(p)\sqrt{n} \quad (16a)$$

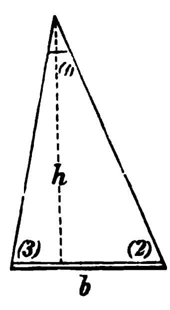
Der trigonometrische Übertragungs-Fehler $\mu(p)$ ist im einzelnen Falle nach (10) zu berechnen und in (16) einzusetzen. Nimmt man den sehr einfachen Fall *gleichseitiger* Dreiecke mit lauter gleichen Gewichten, so ist $\mu(p)$ gleich den Werten $\mu(B)$ in (12) zu nehmen, also:

$$\mu(B_n) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n} = 0{,}000\,004\,\mu\sqrt{n} \quad (17)$$

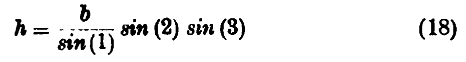
Dieses ist der relative mittlere Seitenfehler der letzten Seite einer Kette von n gleichseitigen Dreiecken.

Höhe eines Dreiecks.

Fig. 3.



Wir bestimmen den mittleren Fehler der Höhe h eines Dreiecks nach Fig. 3. mit der Funktion:



$$h = \frac{b}{\sin(1)}\sin(2)\sin(3) \quad (18)$$

Diese Funktion wird ebenso behandelt wie früher (1) S. 119. Die verschiedenen Coëfficienten sind, mit der Abkürzung $\cot g(1) = c_1$ u. s. w.:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1$$

$$f_1 = -c_1 h \qquad f_2 = +c_2 h \qquad f_3 = +c_3 h$$

Die Formel (6) S. 120 giebt damit:

$$\frac{1}{P} = h^2\left(\frac{c_1^2}{p_1}+\frac{c_2^2}{p_2}+\frac{c_3^2}{p_3}\right)-\frac{h^2}{\left[\frac{1}{p}\right]}\left(\frac{c_1}{p_1}-\frac{c_2}{p_2}-\frac{c_3}{p_3}\right)^2 \tag{19}$$

Dieses kann man auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{P} = h^2\frac{p_1(c_2-c_3)^2+p_2(c_1+c_3)^2+p_3(c_1+c_2)^2}{p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3} \tag{20}$$

Der mittlere Übertragungs-Fehler ist hiernach:

$$\frac{m(h)}{h} = \mu(h) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{p_1(c_2-c_3)^2+p_2(c_1+c_3)^2+p_3(c_1+c_2)^2}{p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3}} \tag{21}$$

Wenn man hier die Bedeutungen $c_1 = cotg\,(1)$ u. s. w. wieder einführt, so nimmt der Zähler von (20) und (21) folgende Form an:

$$p_1\frac{sin^2((2)-(3))}{sin^2(2)\,sin^2(3)}+p_2\frac{sin^2(2)}{sin^2(1)\,sin^2(3)}+p_3\frac{sin^2(3)}{sin^2(1)\,sin^2(2)} \tag{21a}$$

Wenn man hier $(2)=(3)$ setzt, also das Dreieck gleichschenklig annimmt, so fällt das erste Glied fort, die Gleichschenkligkeit wirkt also günstig. Wir wollen diese Annahme in (21) einführen, also $c_3 = c_2$ setzen, zugleich auch soll $p_3 = p_2$ gesetzt werden, dieses giebt aus (21) und (21a):

$$\mu(h) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{(2p_1+p_2)\,sin^2(1)}} \tag{22}$$

Von dieser Formel kann man auch unmittelbar auf den Rhombus Fig. 5. S. 124 übergehen, doch wollen wir vorher noch eine allgemeinere Aufgabe einschalten.

Diagonale eines Vierecks.

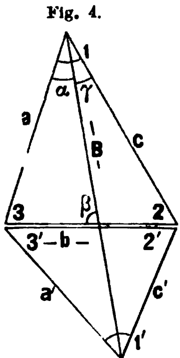


Fig. 4.

In ähnlicher Weise wie für eine Dreiecksseite kann man auch das Gewicht für eine Diagonale B in Fig. 4. bestimmen, wenn auf einer Basis b nach zwei Seiten hin Dreiecke (1) (2) (3) und (1') (2') (3') aufgebaut sind.

In jedem dieser beiden Dreiecke hat man eine Bedingungs-Gleichung, also zusammen:

a) $+(1)+(2)+(3)-180° = 0$

b) $+(1')+(2')+(3')-180° = 0$

Die Diagonale B wird als Funktion gemessener Winkel dargestellt durch die Gleichung:

$$B^2 = a^2 + a'^2 - 2\,a\,a'\cos(3+3') \tag{23}$$

wobei $a = \frac{b}{sin(1)}\,sin(2)$, $a' = \frac{b}{sin(1')}\,sin(2')$

Wenn man die Funktion B nach (1), (2) und (3) differentiirt, und wenn man die geometrischen Beziehungen beachtet:

$$a - a'\cos(3+3') = B\cos\alpha, \text{ und } a'\sin(3+3') = B\sin\alpha$$

so findet man:

$$f_1 = -a\cos\alpha\,cotg(1),\quad f_2 = +a\cos\alpha\,cotg(2),\quad f_3 = +a\sin\alpha$$
$$f_1' = -a'\cos\alpha'\,cotg(1'),\quad f_2' = +a'\cos\alpha'\,cotg(2'),\quad f_3' = +a'\sin\alpha$$

Wenn man damit ebenso verfährt, wie bei der vorigen Aufgabe (18)—(20), so findet man zuerst, dass sich die Gewichtsreciproke von P in zwei Teile zerlegt, entsprechend den zwei Dreiecken, nämlich:

$$\frac{1}{P} = \mathrm{I} + \mathrm{II} \tag{24}$$

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem ersten Teil I, die Ausrechnung ist nicht schwierig, jedoch etwas langwierig, das Ergebnis ist:

$$\mathrm{I} = a^2 \frac{p_1 (\sin\alpha - \cos\alpha \, cotg(2))^2 + p_2 (\sin\alpha + \cos\alpha \, cotg(1))^2 + p_3 \cos^2\alpha \, (cotg(1) + cotg(2))^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}$$

Den Zähler hievon kann man auf diese Form bringen:

$$p_1 \left(\frac{a \cos(\alpha + (2))}{\sin(2)}\right)^2 + p_2 \left(\frac{a \cos((1) - \alpha)}{\sin(1)}\right)^2 + p_3 \frac{(a \cos\alpha \sin((1) + (2)))^2}{\sin(1) \sin(2)}$$

oder $$p_1 \left(\frac{b}{\sin(1)} \cos((3) - (2) + \beta)\right)^2 + p_2 \left(\frac{a}{\sin(1)} \cos\gamma\right)^2 + p_3 \left(\frac{c}{\sin(1)} \cos\alpha\right)^2$$

Dieses geht in den entsprechenden Teil von (21) und (22) über, wenn man $\beta = 90°$ setzt, denn dann wird $\cos((3)-(2)+\beta) = \sin((3)-(2))$ und $h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3)$ oder $h = a \sin(3) = c \sin(2)$. Dieser Übergang, der in sich richtig sein muss, dient als Entwicklungs-Probe.

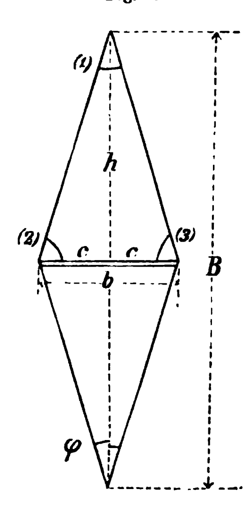
Um nun zusammen zu fassen, bilden wir das mittlere Fehlerquadrat der Diagonale B von Fig. 4. S. 124:

$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \left\{ \frac{p_1 b^2 \cos^2((3)-(2)+\beta) + p_2 a^2 \cos^2\gamma + p_3 c^2 \cos^2\alpha}{\sin^2(1) (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)} + \frac{p_1' b'^2 \ldots}{\sin^2(1')(p_1' p_2' \ldots} \right\} \tag{25}$$

Dabei soll der zweite teilweise nur angedeutete Teil in der Klammer dasselbe für das untere Dreieck von Fig. 4. bedeuten, was der erste Teil für das obere Dreieck.

Will man nicht den mittleren Fehler $m(B)$ selbst haben, sondern das Fehler-Verhältnis $m(B) : B$, welches wir sonst mit $\mu(B)$ bezeichnet haben, so braucht man nur in (25) alle Masse b, a u. s. w. in Teilen von B auszudrücken, dann liefert die Formel (25) das gewünschte $\mu(B)$.


Fig. 5.



Man kann nach der Formel (25) für jedes Basis-Rhomboid die Fehler-Übertragung von der kurzen Diagonale zur langen Diagonale beurteilen, wenn man ausser der Form des Vierecks auch den mittleren Winkelfehler μ und die sämtlichen *Gewichte* p kennt.

Man bemerkt sofort, dass diese Gewichte sehr ungleiche Einflüsse auf das Schluss-Ergebnis ausüben, am wichtigsten ist das Gewicht p_1 bzw. p_1', denn in der Formel (25) trägt eine Verstärkung des Gewichtes p_1 wesentlich zur Vergrösserung des Nenners bei, und im Zähler kommt p_1 nur in Verbindung mit $\cos((3) - (2) + \beta)$ vor, was mit $\beta = 90°$ und $(2) = (3)$, also in dem wichtigsten Falle, verschwindet.

Wir wollen diesen Fall, $\beta = 90°$ und $p_3 = p_2$, nun behandeln, und zugleich annehmen, dass das untere Dreieck in Fig. 4. S. 123 dem oberen Dreieck symmetrisch sei, dass man also den Rhombus Fig. 5. habe. Damit giebt (25):

$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \left\{2 \frac{2h^2}{sin^2(1)(2p_1+p_2)}\right\}$$

$$\frac{m(B)}{2h} = \frac{m(B)}{B} = \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{(2p_1+p_2)}} \tag{26}$$

Diese Formel kann man auch einfacher aus (22) S. 123 herleiten, denn es ist $m(B) = m(h)\sqrt{2}$ und $\mu(B) = \frac{\mu(h)}{\sqrt{2}}$.

Günstigste Gewichts-Verteilung.

Nun wollen wir die frühere Frage wieder aufnehmen, welche *Verteilung* der Gewichte p_1 und p_2 am günstigsten ist? Es handelt sich dabei darum, den Ausdruck (26) möglichst klein zu machen bei konstanter Summe $p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + 2p_2 = [p]$, (indem die Messungs-Arbeit für jeden Winkel dem Gewicht proportional gesetzt wird). Da die Gewichte in (26) nur im Nenner vorkommen, muss man darnach trachten, die Funktion $f = 2p_1 + p_2$ möglichst gross zu machen, bei konstantem $p_1 + 2p_2 = [p]$. Eliminiert man zu diesem Zwecke p_1, indem man $p_1 = [p] - 2p_2$ in f einsetzt, so wird:

$$f = 2[p] - 4p_2 + p_2 = 2[p] - 3p_2$$

und dieses wird am grössten, wenn $p_2 = 0$ gesetzt wird, dadurch muss aber $p_1 = [p]$ werden, und man hat aus (26):

$$\mu(B)\,min = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{2[p]}} \tag{27}$$

Dieses Ergebnis, dass nur der *eine* Winkel (1) an der Spitze, die beiden Basiswinkel (2) und (3) aber gar nicht zu messen sind, mag zuerst sonderbar erscheinen; man muss es aber richtig auffassen: dasselbe gilt, *wenn* das Dreieck gleichschenklig ist; man muss also doch mindestens so viel von den Basiswinkeln messen, dass man weiss, ob die Gleichschenkligkeit vorhanden ist. Man kann also sagen: Wenn man durch vorläufige Messungen gefunden hat, dass ein Dreieck von der Form Fig. 3. S. 122 sehr nahe gleichschenklig ist, dann kann man, wenn man nur auf die Höhe ausgeht, alle weitere Winkelmess-Arbeit auf den spitzen Winkel (1) konzentrieren.

Wir wollen nun in (26) statt des Winkels (1) das Vergrösserungs-Verhältnis $B : b = v$ einführen, oder auch, indem wir nach Fig. 5. die Hälften nehmen, $h : c = v$ setzen, wobei $sin(1) = 2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi$, und:

$$sin\,\varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2+h^2}} \qquad cos\,\varphi = \frac{h}{\sqrt{c^2+h^2}}$$

Wenn man damit $sin(1)$ in v ausdrückt und in (26) einsetzt, so bekommt man für den Rhombus Fig. 5.:

$$\frac{1}{sin(1)} = \frac{1+v^2}{2v} \tag{28}$$

$$\mu(B) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1+v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2p_1+p_2}} \tag{29}$$

und das Minimum, wie bei (27):

$$\mu(B)\,min = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1+v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2[p]}} \tag{30}$$

Das rhombische Multiplikations-Netz.

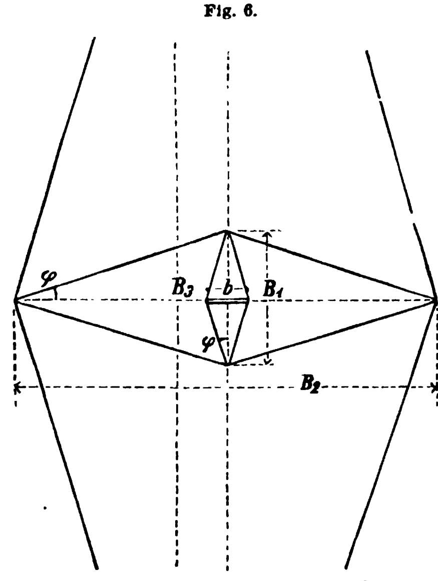


Fig. 6.

Nach Andeutung von Fig. 6. kann man die rhombische Vergrösserung wiederholt anwenden. Wenn die Rhomben alle ähnlich und ähnlich gemessen sind, so hat man nach (26):

$$\mu(B_1) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{2p_1+p_2}}$$

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{2p_1+p_2}} \quad \text{u. s. w.}$$

Dieses giebt eine ähnliche Fehler-Fortpflanzung, wie wir schon bei Fig. 2. S. 122 untersucht haben, und man hat daher für $r$malige Rhomben-Wiederholung:

$$\frac{m(B_r)}{B_r} = \mu(B_r)$$

$$= \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{2p_1+p_2}}\sqrt{r} \quad (31)$$

Bleiben wir zunächst bei *zweimaliger* Wiederholung stehen, so haben wir mit $r = 2$:

$$\mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{2}{2p_1+p_2}}$$

Wenn nun wieder $B_2 : b = v$ werden soll, so muss $B_2 : B_1 = B_1 : b = \sqrt{v}$ sein, und eine ähnliche Rechnung wie bei (28) giebt: $\frac{1}{sin(1)} = \frac{1+v}{2\sqrt{v}}$,

folglich

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1+v}{2\sqrt{v}}\sqrt{\frac{2}{2p_1+p_2}} \quad (32)$$

Dieses gilt für beliebige p_1 und $p_3 = p_2$; dagegen im günstigsten Falle mit $p_1 = p_1 + p_2 + p_3 = [p]$ hat man:

$$\mu(B_2)\,min = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1+v}{2\sqrt{v}}\sqrt{\frac{1}{[p]}} \quad (33)$$

Nun kann man die Ausdrücke (30) und (32) zweckmässig vergleichen, es sei kurz $(\mu)'$ der Fehler-Ausdruck nach (30) für *einen* Rhombus, und $(\mu)''$ für *zwei* Rhomben, und das Vergrösserungs-Verhältnis v sei in beiden Fällen dasselbe. Dann hat man das Verhältnis $(\mu'') : (\mu')$ oder $\mu(B_2) : \mu(B) = q$ wie folgt:

$$q = \frac{1+v}{\sqrt{2v}} : \frac{1+v^2}{2v} \quad , \quad q = \frac{1+v}{1+v^2}\sqrt{2v}$$

Dieses Verhältnis ist immer grösser als 1 und giebt z. B.

wenn $v = 5$, $q = 0{,}730$, wenn $v = 10$, $q = 0{,}487$.

Der Doppelrhombus ist also immer günstiger als der einfache Rhombus.

Günstigster Spitzen-Winkel (1).

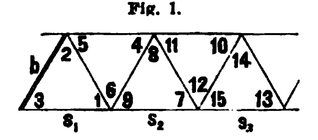
Im einzelnen Rhombus giebt es kein Mass für den Vorteil oder Nachteil eines mehr oder weniger spitzen Winkels (1), weil dem Vorteil in der Genauigkeit einerseits, der Nachteil in der geringeren Vergrösserung $B:b$ andererseits gegenübersteht, was sich hier nicht abwägen lässt; dagegen kann man bei *mehr*facher Anwendung ähnlicher Rhomben überlegen, ob es günstiger ist, den Winkel (1) *sehr* spitz zu machen und *wenige* Rhomben zu haben, oder umgekehrt.

Helmert hat diese Frage in seinen „Studien über rationelle Vermessungen", III, 45. (*Schlömilch*s „Zeitschr. f. Math. u. Ph." 1868) aufgestellt, und dahin beantwortet, dass bei konstanter Summe $[p]$ der günstigste Winkel (1) $= 2\,\varphi = 33°\,32'$ ist.

§ 20. Fehler-Fortpflanzung in Dreiecksketten.

In der gitterförmigen Kette gleichseitiger Dreiecke, welche in Fig. 1. angedeutet ist, soll es sich um die *Summe* mehrerer Dreiecksseiten, z. B. $s_1 + s_2 + s_3$ handeln, wobei die einzelnen Seiten s_1, s_2, s_3 aus derselben Basis b, teilweise durch dieselben Winkel abgeleitet sind.

Fig. 1.



In jedem einzelnen Dreiecke seien alle drei Winkel gleich genau gemessen, und ausgeglichen, also z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (1)+(2)+(3)-180°=0 \\ \text{b)} & \qquad (4)+(5)+(6)-180°=0 \\ \text{c)} & \qquad\qquad (7)+(8)+(9)-180°=0 \\ \text{d)} & \ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Alle diese Bedingungs-Gleichungen stehen ganz unabhängig von einander; wenn man sie aber trotzdem als *ein* System zur Ausgleichung der Dreieckskette als Ganzes auffassen will, so geben sie sehr einfache Normalgleichungs-Coëfficienten, nämlich: $[a\,a] = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ und im ganzen:

$$\left.\begin{array}{llll} [a\,a]=3 & [a\,b]=0 & [a\,c]=0 & [a\,d]=0 \\ & [b\,b]=3 & [b\,c]=0 & [b\,d]=0 \\ & & [c\,c]=3 & [c\,d]=0 \\ & & & \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wenn man nach der Ausgleichung den mittleren Fehler oder das Gewicht der Summe $s_1 + s_2 + s_3$ berechnen will, so hat man die Gewichtsformel für bedingte Beobachtungen anzuwenden (vgl. Band I, S. 103 (12)), nämlich:

$$\frac{1}{P} = [f\,f] - \frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,f\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,f\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \ldots \quad (3)$$

Diese Formel vereinfacht sich aber in unserem Fall sehr bedeutend; zunächst wird wegen $[a\,b] = 0$, der Wert $[b\,b\,.\,1] = [b\,b]$ und $[b\,f\,.\,1] = [b\,f]$ u. s. w., und deswegen wird (3) zuerst so:

$$\frac{1}{P} = [f\,f] - \frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,f]^2}{[b\,b]} - \frac{[c\,f]^2}{(c\,c]} - \ldots \quad (4)$$

Nun muss man die Funktion F näher betrachten:

$$F = s_1 + s_2 + s_3$$

$$F = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) + \frac{b}{\sin(1)} \frac{\sin(3)}{\sin(4)} \frac{\sin(5)}{\sin(7)} \sin(8)$$
$$+ \frac{b}{\sin(1)} \frac{\sin(3)}{\sin(4)} \frac{\sin(5)}{\sin(7)} \frac{\sin(9)}{\sin(10)} \frac{\sin(11)}{\sin(13)} \sin(14) \qquad (5)$$

Die Differential-Quotienten sind:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = \dfrac{\partial F}{\partial(1)} = -s_1 \, cotg\,(1) - s_2 \, cotg\,(1) - s_3 \, cotg\,(1) \\ f_2 = \dfrac{\partial F}{\partial(2)} = + s_1 \, cotg\,(2) \\ f_3 = \dfrac{\partial F}{\partial(3)} = \qquad + s_2 \, cotg\,(3) + s_3 \, cotg\,(3) \\ f_4 = \dfrac{\partial F}{\partial(4)} = \qquad - s_2 \, cotg\,(4) - s_3 \, cotg\,(4) \end{array}\right\} \qquad (6)$$

. . . .

In dieser Weise bekommt man 15 Werte f, welche wir nun, mit Einführung von $(1) = (2) = (3) = \ldots = 60°$ und $cotg\,60° = c$, sowie $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s$ so zusammenstellen:

$$\left.\begin{array}{lll} f_1 = -3\,s\,c & f_7 = -2\,s\,c & f_{13} = -1\,s\,c \\ f_2 = +1\,s\,c & f_8 = +1\,s\,c & f_{14} = +1\,s\,c \\ f_3 = +2\,s\,c & f_9 = +1\,s\,c & f_{15} = \quad 0 \\ & & \\ f_4 = -2\,s\,c & f_{10} = -1\,s\,c & \\ f_5 = +2\,s\,c & f_{11} = +1\,s\,c & \\ f_6 = \quad 0 & f_{12} = \quad 0 & \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Nun sieht man zuerst aus der Verbindung mit (1), dass

$$[af] = f_1 + f_2 + f_3 = 0, \qquad [bf] = f_4 + f_5 + f_6 = 0, \qquad [cf] = 0 \text{ u. s. w.}$$

Damit wird die Gewichts-Formel (3) sehr einfach, nämlich:

$$\frac{1}{P} = [ff] = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \cdots \qquad (8)$$

Setzt man hier die Werte f nach (7) ein, so findet man:

$$\frac{1}{P} = (9 + 1 + 4 + 4 + 4 + 0 \ldots)\, s^2 c^2 = 32\, s^2 c^2 = 32\, s^2 \, cotg^2\, 60° \qquad (9)$$

Indessen gilt das zunächst nur für den Fall *dreier* Seiten $s_1 + s_2 + s_3$.

Wichtiger wird es sein, das allgemeine Gesetz der Gewichts-Formel (9) für irgend welche Seitenzahl zu bestimmen, etwa für n Seiten nach der Formel:

$$F_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots s_n \qquad (10)$$

Denkt man sich hiezu die Reihe (5) fortgesetzt, so sieht man leicht, dass die Winkel (2), (8) und (14) nur in jedem Gliede *ein*mal vorkommen, der Winkel (1) kommt in allen n Gliedern vor, und ähnliche Gesetze zeigen sich auch im übrigen, so dass man folgendes findet:

Winkel (1) giebt $(-sc-sc-sc\ldots)^2 \ldots\ldots = (n\,s\,c)^2 = n^2\,(s\,c)^2$

" (2), (8), (14)... geben $(sc)^2+(sc)^2+(sc)^2+\ldots\ldots = n\,(s\,c)^2$

Die Gruppe $\dfrac{(3)\,(5)}{(4)\,(7)}$ giebt . . . . . . $+\ldots$ . . . . . . $= 4\,(n-1)^2\,(s\,c)^2$

Die Gruppe $\dfrac{(9)\,(11)}{(10)\,(13)}$ giebt . . . . . $+\ldots$ . . . . . . $= 4\,(n-2)^2\,(s\,c)^2$

Die nächste Gruppe giebt . . . . $= 4\,(n-3)^2\,(s\,c)^2$

. . . .

Die letzte derartige Gruppe giebt . . . . $4\,(1^2)\,(s\,c)^2$

Im Ganzen hat man:

$$\frac{1}{P_n} = \Big(n^2 + n + 4\,((n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots 2^2 + 1^2)\Big)\,(s\,c)^2$$

$$= -3\,n^2 + n + 4\,(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots 2^2 + 1^2))\,(s\,c)^2$$

Nun ist aber die Summe der n ersten Quadrate bekanntlich:

$$n^2 + (n-1)^2 + \ldots 2^2 + 1^2 = \frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{6}$$

und damit wird:

$$\frac{1}{P_n} = \left(-3\,n^2 + n + 4\,\frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{6}\right) s^2 c^2 = \frac{4\,n^3 - 3\,n^2 + 5\,n}{3}\,s^2\,c^2$$

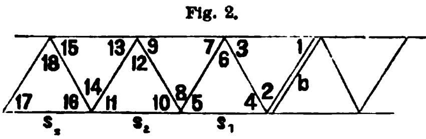
Dabei ist $c = cotg\,60° = 0{,}577$, $c^2 = \frac{1}{3}$, und wenn man nun den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels mit μ einführt, so ist der mittlere Fehler der Seitensumme $s_1 + s_2 + s_3 \ldots s_n$, mit Anwendung der Bezeichnungsart der Anmerkung S. 120:

$$m\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60°\sqrt{\frac{4\,n^3 - 3\,n^2 + 5\,n}{3}} \tag{11}$$

Meist will man nicht den Fehler selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu $s_1 + s_2 + \ldots s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler, dieser ist:

$$\frac{m\,(n\,s)}{n\,s} = \mu\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,60°\sqrt{\frac{4\,n^2 - 3\,n + 5}{3\,n}} \tag{12}$$

Fig. 2.



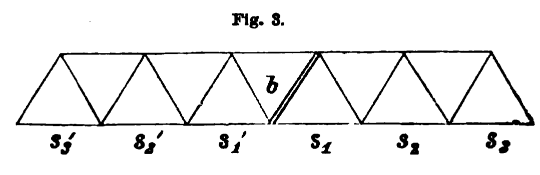
Nachdem wir so den Fall der Dreieckskette Fig. 1. S. 127 in aller Ausführlichkeit behandelt haben, wollen wir noch einige andere ähnliche Fälle betrachten, jedoch nur die Schluss-Ergebnisse hier mitteilen, da die Entwicklung nach dem vorstehenden keine Schwierigkeit bieten kann.

In Fig. 2. soll es sich um die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n$ handeln; der mittlere Fehler dieser Summe wird gefunden:

$$m\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60°\sqrt{\frac{4\,n^3 + 3\,n^2 + 5\,n}{3}} \tag{13}$$

Nun kann man die zwei Fälle von Fig. 1. S. 127 und Fig. 2. zusammen nehmen.

Fig. 3.



Wenn man hiernach in Fig. 3. die Summe der auf einerlei Seite der Kette liegenden Seiten betrachtet:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots s_n + s_1' + s_2' + s_3' + \dots s_n',$$

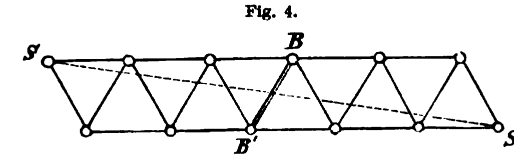
so findet man dafür den mittleren Fehler durch Zusammensetzung von (11) und (13), nämlich:

$$m\,(n\,s + n'\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60^\circ \sqrt{\frac{(4\,n^3 - 3\,n^2 + 5\,n) + (4\,n'^3 + 3\,n'^2 + 5\,n')}{3}} \qquad (14)$$

Nimmt man hier $n' = n$ und $n + n' = v$, so wird:

$$m\,(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60^\circ \sqrt{\frac{8\,n^3 + 10\,n}{3}} \text{ oder } = \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60^\circ \sqrt{\frac{v^3 + 5\,v}{3}} \qquad (15)$$

Fig. 4.



Eine andere Zusammenfassung von Fig. 1. und Fig. 2. zeigt Fig. 4., wobei es sich um die Diagonale $S\,S'$ handelt, welche näherungsweise etwa $= S\,B + B'\,S'$ gesetzt werden kann. Hiefür ist mit zweifacher Anwendung von (11), mit $2\,n = v$:

$$m\,(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60^\circ \sqrt{\frac{8\,n^3 - 6\,n^2 + 10\,n}{3}}$$

$$= \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60^\circ \sqrt{\frac{2\,v^3 - 3\,v^2 + 10\,v}{6}} \qquad (16)$$

Einen weiteren Fall nehmen wir mit Fig. 5. vor. Die Basis b liegt in der Kettenrichtung selbst. Für die Summe nach der einen Seite $s_1 + s_2 + s_3 + \dots s_n$ findet man:

Fig. 5.

$$m\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,60^\circ \sqrt{\frac{4\,n^3 + 9\,n^2 + 5\,n}{3}} \qquad (17)$$

Für die Gesamtsumme $s_1 + s_2 + s_3 + \dots \; + s_1' + s_2' + s_3' + \dots$ genügt es nicht, diese Formel (17) zweifach anzuwenden, denn der Winkel, welcher der Basis b gegenüber liegt, hat auf beide Seiten Einfluss. Die selbständige Entwicklung für die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \dots s_n + s_1' + s_2' + s_3' + \dots s_n'$ giebt:

$$m(b + n\,s + n'\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,60^\circ \sqrt{(n + n')^2 + \frac{4\,n^3 + 6\,n^2 + 5\,n}{3} + \frac{4\,n'^3 + 6\,n'^2 + 5\,n'}{3}} \qquad (18)$$

Setzt man hier $n' = n$, so wird:

$$m\,((2\,n + 1)\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60^\circ \sqrt{\frac{8\,n^3 + 24\,n^2 + 10\,n}{3}} \qquad (19)$$

Die ganze abgeleitete Länge ist hier $= (2n + 1)s$, weil das Mittelstück s als fehlerfreie Basis mitgerechnet wird; wir wollen deswegen nun setzen $2n + 1 = v$, und damit kann man das vorstehende auf folgende Form bringen:

$$m(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\, s\, cotg\, 60° \sqrt{\frac{v^3 + 3v^2 - 4v}{3}} \tag{20}$$

Vergleichen wir nun die Fehlerformeln (15), (16) und (20) für die drei Hauptfälle, so ergiebt sich, dass der dritte Fall (20) mit Fig. 5. etwas ungünstiger ist, als die beiden ersten Fälle, und daraus folgt, dass es besser ist, die Basis b *quer* zur Kette zu legen, wie in Fig. 3. und 4., als nach der Längsrichtung, Fig. 5.

Wenn aber die Kette sehr *lang* ist, d. h. n oder v sehr gross, so kann man alle Formeln näherungsweise als gleich betrachten, indem man n und n^2 gegen n^3 vernachlässigt. Man sieht dann auch, dass die Formeln mit v allgemein die Hälfte der entsprechenden Formeln für n geben, dass es also jedenfalls günstiger ist, die Basis in die Mitte als an das Ende der Kette zu legen, indem z. B. die Verdoppelung der Kettenlänge von der Mitte aus nur das $\sqrt{2}$fache des Fehlers, dagegen von einem Ende aus das $\sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$fache giebt.

Mit der angegebenen Näherung haben wir aus (11):

$$m(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\, s\, cotg\, 60° \sqrt{\frac{4n^3}{3}} \tag{21}$$

Oft will man nicht den Fehler m selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu der fraglichen Länge $s_1 + s_2 + \ldots s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler. Derselbe ist für (21):

$$\mu(n\,s) = \frac{m(n\,s)}{n\,s} = \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\, 60° \sqrt{\frac{4n}{3}} \tag{22}$$

Oder da $cotg\, 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, haben wir:

$$\mu(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{2}{3}\sqrt{n}$$

Setzt man rund $\mu = \pm 1''$, so giebt dieses:

$$\mu(n\,s) = 0{,}000\,003\,23\,\sqrt{n}$$

Dieses ist der relative Fehler für $n$fache Ketten-Ausdehnung von der Basis an einem Ende der Kette. Ist dagegen die Basis in der Mitte, und dehnt sich die Kette nach beiden Seiten je um das $\frac{v}{2}$fache der Basis, also im ganzen wieder um das $v$fache aus, so bekommt man:

$$\mu(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1}{3}\sqrt{v} \quad \text{oder} \quad = 0{,}000\,001\,62\,\sqrt{v}$$

Vergleichung der Rhomben-Diagonale mit der Gitterlinie.

Von allen Vergleichungen, welche zwischen den Formeln dieses § unter sich und mit denen des vorhergehenden § 19. angestellt werden können, wollen wir hier nur die wichtigste herausheben, entsprechend Fig. 6. (S. 132), wo eine Rhomben-Diagonale B und eine Gitterlinie B, beide $= 5b$, dargestellt sind.

Für die mittleren Fehler haben wir nach (29) § 19., S. 125, und nach (20) § 20., S. 131:

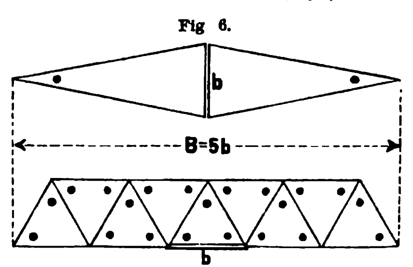
$$\text{Rhombus:} \quad \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v^2}{2v} \sqrt{\frac{1}{2p_1+p_2}}$$

$$\text{Gitter:} \quad \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \operatorname{cotg} 60° \sqrt{\frac{v^2+3v-4}{3v}}$$

Nimmt man im ersten Falle $p_1 = p_2 = 1$, also $2p_1 + p_2 = 3$ und in beiden Fällen $\mu =$ rund $\pm 1''$ und $v = 5$, so erhält man:

Rhombus $\mu(B) = 0{,}000\,007\,27$ rund $= 7$ Milliontel
Gitter $\mu(B) = 0{,}000\,004\,34$ „ $= 4$ Milliontel

Fig 6.



Die Gitterlinie hat also einen kleineren Fehler als die Rhomben-Diagonale; dieses Verhältnis gestaltet sich aber ungünstiger, wenn man die Zahl der Winkel-Messungen überlegt. Der Rhombus hat nur 6 Winkel, und von diesen brauchen sogar die 4 Basiswinkel nur genähert bekannt zu sein, man kann im Rhombus fast die ganze Arbeit auf die *zwei* spitzen Winkel konzentrieren, dagegen hat das Gitter 9 Dreiecke mit 27 Winkeln, oder wenn man die unwichtigen Winkel ausscheidet, immer noch 21 Winkel.

Trotz dieses starken theoretischen Missverhältnisses könnte doch auch das Gitternetz, wegen der *kurzen* Seiten, unter Umständen praktische Verwendung als Basisnetz finden. (vgl. S. 119.)

Azimut-Übertragung.

Die Azimut-Übertragung längs einer Dreieckskette besteht einfach in der *Summierung* aller längs eines Polygons auftretender Dreieckswinkel, z. B. in Fig. 1. (S. 127) besteht die Azimut-Übertragung längs $s_1 + s_2 + s_3$ in der Summierung $(3) + (1) + (6) + (9) + (7) + \cdots$

Wenn jedoch die Azimut-Übertragung längs der Haupterstreckung einer Dreieckskette besonders wichtig ist, so soll man schon die Anordnung der Messungen darnach einrichten, also nicht bloss die einzelnen je 60° betragenden Winkel in den Ketten von Fig. 1. bis 5. S. 127—130 messen, sondern die je nahezu 180° betragenden Winkel der in der Haupterstreckung liegenden Seiten.

Besser noch ist es, für die Zwecke der Azimut-Übertragung die Dreiecksseiten besonders anzuordnen, wie z. B. *Bessel* bei der Gradmessung in Ostpreussen gethan hat. Dieses ist aus der Fig. 5. S. 14 unserer Einleitung zu ersehen, indem auf der nordwestlichen Gesamterstreckung Tunz-Galtgarben-Nidden-Memel nur zwei Zwischenpunkte Galtgarben und Nidden sind, während auf der südöstlichen Grenze 7 Zwischenpunkte zur Azimut-Übertragung nötig wären.

§ 21. Anordnung der Triangulierungs-Ketten und der Triangulierungs-Netze.

Nachdem wir schon früher in § 2. S. 17 u. ff. die Aufsuchung und Auswahl der Triangulierungs-Punkte in dem Sinne behandelt haben, welche Punkte man vermöge der gegenseitigen Sichten u. s. w. benützen *kann*, wollen wir nun die mehr theoretische Frage aufwerfen, welche Punkte und welche Verbindungs-Sichten man nehmen *will*.

Nach der ersten Einführung der Methode der kleinsten Quadrate in die Triangulierungen ist bald die Anschauung entstanden, dass man nun darauf ausgehen müsse, äusserst *viele* Messungen und Kontrolen in *eine* Ausgleichung zusammen zu bringen, und es gab eine Zeit, in welcher es als höchste Triangulierungs-Leistung gepriessen wurde, 100 und mehr Bedingungs-Gleichungen zusammen zu fassen und ebenso viele Normalgleichungen numerisch aufzulösen. In dieser Beziehung haben sich die Anschauungen wieder teilweise geändert.

Wir beschränken uns hier auf Mitteilung der Grundsätze, welche bei den neuesten Triangulierungen der preussischen Landes-Aufnahme unter General *Schreiber* zur Anwendung kommen; und wir benützen dazu das sehr anschauliche und charakteristische Beispiel der Ketten und des Netzes in der Provinz Hannover, welche in unserer Fig. 1. S. 134 dargestellt sind.

Wir haben auf dem hier dargestellten Gebiete *drei* Grundlinien:

1) Grundlinie bei Braak in Holstein	im Jahre	1871	gemessen,	5875^{m}	lang
2) „ „ Göttingen	„ „	1880	„	5193^{m}	„
3) „ „ Meppen	„ „	1883	„	7039^{m}	„

Die geradlinigen Entfernungen dieser Grundlinien von einander sind rund im Mittel 230^{km} und zu der trigonometrischen Verbindung sind drei zusammenschliessende *Ketten* angeordnet, nämlich die „Hannoversche Kette“ im Westen, sowie Teile der „Elbkette“ und der „Hannoverisch-Sächsischen Kette“ im Osten.

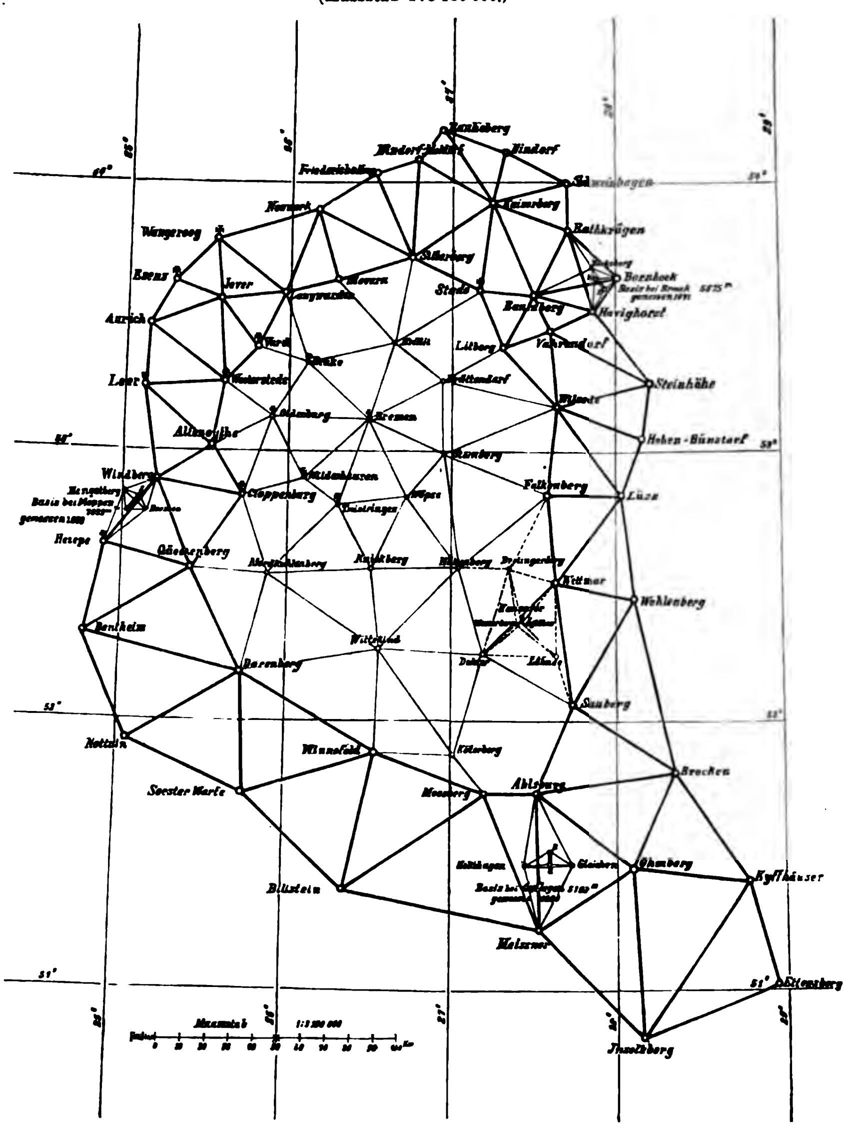
Diese *Ketten* wurden zuerst in sich ausgeglichen, und liefern dann den festen Rahmen für das dazwischenliegende „*Netz*“, welches den Namen „Weser-Netz“ führt.

Ehe wir mit der Beschreibung dieser besonderen Verhältnisse fortfahren, müssen wir hier über die Anlage der preussischen Ketten und Netze im allgemeinen das Nötige berichten.

Es geschieht dieses am besten durch Vorführung der *geschichtlichen Entwicklung*, welche diese Anlage und die zugehörigen Ausgleichungen genommen haben, nach einer Mitteilung von Major *Haupt* in den „astron. Nachrichten“ 107. Band, Nr. 2549—2550, (Sept. 1883):

Als in den 60er Jahren dieses Jahrhunderts bei der preussischen Landes-Triangulierung Ketten, welche einen von Dreiecken freien Landesteil umspannten, wieder in sich zusammen schlossen, stellte sich der Übelstand heraus, dass trotz der Aufstellung aller vorhandenen und notwendigen Winkel- und Seiten-Gleichungen, identische Punkte, von verschiedenen Seiten her berechnet, *nicht* dieselbe Länge und Breite erhielten, und dass der von Dreiecken freie innere Raum, das Polygon, *nicht* die seinem Inhalt entsprechende Winkelsumme erhielt, denn es fehlten die drei sogenannten Polygon-Gleichungen.

Fig. 1.
Triangulierung der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme,
in der Provinz Hannover.
(Massstab 1 : 3 130 000.)



Der erste, welcher eine Methode zur Aufstellung dieser Polygon-Gleichungen gab, war der Premier-Lieutenant *v. Prondzynski* („Astr. Nachr.“ Nr. 1690, 71. Band, 1868, S. 145—154 und Nr. 1782, 75. Band, 1869, S. 81—90). Er zog Richtungs-Korrektionen der jüngsten Kette durch die ganzen Längen-, Breiten- und Azimut-Rechnungen hindurch, und bildete so drei neue Gleichungen.

Demnächst gab Professor *Börsch* eine andere, aber im allgemeinen nicht einfachere Methode an („Astr. Nachr." Nr. 1697 und 1704, 71. Band (1868), S. 266—268 und S. 379—380), welche darauf gegründet ist, den inneren freien Raum zwischen den verschiedenen Ketten mit zu rechnenden Dreiecken zu überspannen und so die fehlenden Gleichungen aufzustellen.

Hier ist auch *Zachariae*: „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten" (deutsch von *Lamp*, Berlin 1878) S. 156, zu zitieren, wo für „Kranz-Systeme" die nötigen Gleichungen durch Einführung fingierter Messungen und Wiederelimination derselben gewonnen werden.

Diese Methoden wurden bei der preussischen Landes-Triangulation nicht benützt; das in Wirklichkeit von dieser Behörde angewandte Verfahren wurde von dem damaligen Hauptmann *Schreiber* (jetzigen General und Chef der Landes-Aufnahme) angegeben, dasselbe liefert zwei Gleichungen durch die Projektion der inneren Polygonkranz-Begrenzung auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges, sphäroidisches Coordinaten-System.

Diese *Schreiber*sche Methode des Polygonkranz-Anschlusses durch rechtwinklige Coordinaten ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Erster Teil, Berlin 1870, S. 421 und Hauptdreiecke II. Teil, Berlin 1874, S. 605".

Wir haben einen Bericht hierüber mit einem Beispiele gegeben in „*Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen", 1885, S. 81—85 und S. 103, und bemerken hiezu, dass die ersten *Schreiber*schen Formeln von 1870 („Hauptdreiecke I, S. 421") sich rein *sphärisch* mit einem mittleren Krümmungs-Halbmesser entwickeln lassen, und so mit den bekannten *Soldner*schen Coordinaten-Formeln zusammenfallen, während die zweiten *Schreiber*schen Formeln von 1874 („Hauptdreiecke II, S. 605") noch höhere Glieder hinzufügen, entsprechend der *Gauss*schen Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas".

Das *mathematische* Problem war damit gelöst, es blieb aber der Übelstand, dass immer die jüngste Kette alle diejenigen Missstimmigkeiten, welche sich in den vorhergehenden, zwanglos in freies Feld verlaufenden und oft von verschiedenen Grundlinien ausgehenden Ketten angehäuft hatten, einzig und allein durch *ihre* Winkel-Korrektionen ausgleichen musste, und dass der innere zunächst frei gebliebene Raum bei seiner späteren Überspannung mit sekundären Dreiecken sämtliche Fehler dieses nicht stimmenden Schlusses mit übernehmen musste.

Dieses rührt davon her, dass man wegen des nötigen Fortschrittes der Messungen niederen Ranges, zum Anschluss der Kataster-Aufnahmen und der topographischen Aufnahmen, nicht warten kann, bis das Ganze fertig ist, sondern alle 2 bis 3 Jahre das Gemessene berechnen und dem bereits fest stehenden anpassen muss.

Nach diesem drucken wir noch den Hauptinhalt eines von General *Schreiber* veröffentlichten „Berichtes der trigonometrischen Abteilung der königlich preussischen Landes-Aufnahme" ab, aus den „Verhandlungen der 1887er Konferenz d. perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888, Annex X^b, S. 6—10":

Das Wesernetz (Fig. 1. S. 134) enthält 66, in drei verschiedene Rangklassen sich scheidende Punkte, nämlich:

1) 18 Anschlusspunkte, die zugleich den das Netz rings umschliessenden Hauptdreieckketten angehören und durch deren Ausgleichung endgültig bestimmt sind;

2) 15 Netzpunkte;

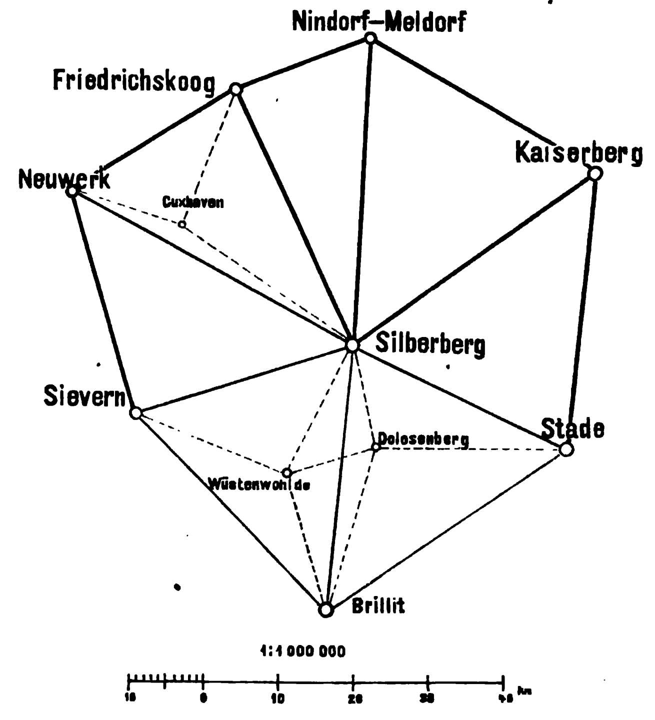
3) 33 Zwischenpunkte erster Ordnung.

Die ad 1) und 2) genannten Punkte und deren Verbindungen mit einander bilden das eigentliche Netz, welches als Ganzes für sich, jedoch unter Festhaltung der schon vorher endgültig bestimmten Punkte ad 1), ausgeglichen ist.

Erst darnach hat die Ausgleichung der ad 3) genannten Zwischenpunkte stattgefunden, und zwar unter Festhaltung aller vorher ausgeglichenen Punkte.

Wie die Punkte, zerfallen auch die Beobachtungen in 3 Rangklassen, und zwar in *Ketten-Beobachtungen*, *Netz-Beobachtungen* und *Zwischenpunkts-Beobachtungen*, je nachdem sie zur Bestimmung von *Kettenpunkten*, *Netzpunkten* oder *Zwischenpunkten* dienen. Auf jeder Station werden diese drei Rangklassen, selbst bei gleichzeitiger Ausführung, dergestalt getrennt von einander gehalten, dass jede für sich auf der Station ausgeglichen werden kann. Demgemäss sind z. B. die Beobachtungen auf der sowohl der Kette als auch dem Netz angehörigen Station Silberberg wie folgt angeordnet und ausgeführt worden (vgl. Fig. 2.).

Fig. 2.
Station Silberberg.
Von Fig. 1. S. 134 in grösserem Massstab, mit Zwischenpunkten.



a) *Ketten-Beobachtungen*: jeder der 15 Winkel zwischen den 6 Ketten-Richtungen Sievern, Neuwerk, Friedrichskoog, Niendorf—Meldorf, Kaiserberg und Stade ist 8 mal gemessen *);

b) *Netz-Beobachtungen*: zur Bestimmung der Richtung nach dem Netzpunkt Brillit sind die beiden Winkel Stade—Brillit—Sievern, und zwar jeder 12 mal, gemessen;

---

*) *Anmerkung*: Dieses entspricht der allgemeinen Vorschrift für Winkelmessung in allen Kombinationen, welche wir schon in unserem I. Bande, Seite 256 mitgeteilt haben und der Übersicht wegen hier nochmals hersetzen:

c) *Zwischenpunkts-Beobachtungen*: zur Bestimmung der Richtung nach dem Zwischenpunkt Dolosenberg sind die beiden Winkel Stade-Dolosenberg und Dolosenberg—Sievern, und zwar jeder 6mal, gemessen. In gleicher Weise ist die Richtung nach dem Zwischenpunkt Wüstenwohlde an zwei Netzrichtungen angeschlossen worden.

Jede der Rangklassen a, b, c ist für sich auf der Station ausgeglichen.

Eine derartige Anordnung gewährt gegenüber dem Streben, alle auf einer Station vorhandenen Richtungen möglichst zusammenhängend zu beobachten, den Vorteil, dass die Beobachtungen niederen Ranges in den Zwischenzeiten, wo die Luft-Beschaffenheit Beobachtungen höheren Ranges zu machen ohnehin verbietet, ausgeführt werden können, indem sie wegen der kleineren Entfernungen nicht nur leichter gelingen, sondern auch bei etwas weniger günstigen Umständen angestellt werden dürfen; denn es liegt auf der Hand, dass Netz-Beobachtungen, deren Fehler auf das Gebiet des Netzes beschränkt bleiben, nicht so genau zu sein brauchen, wie Ketten-Beobachtungen, deren Fehler sich über das ganze Dreiecks-System, soweit es noch nicht endgültig feststeht, fortpflanzen, und dass ein ähnliches Verhältnis zwischen den Netz- und Zwischen-Beobachtungen besteht.

Bei unserer Anordnung hängt daher die zur Erledigung einer Station erforderliche Zeit allein von der daselbst vorhandenen höchsten Rangklasse ab, dergestalt, dass die Beobachtungen niederen Ranges dabei überhaupt nicht mitsprechen. Wollte man dagegen alle Richtungen zusammenhängend beobachten, so würde man genötigt sein, alle Beobachtungen mit der für die höchste Rangklasse erforderlichen Genauigkeit auszuführen.

Während somit eine zweckmässige Gliederung der Beobachtungen Arbeits Ersparung bedeutet, nötigt der Mangel einer solchen zur Arbeits-Vergeudung.

Noch wichtiger für die Ökonomie der Arbeit ist die Auswahl der zu beobachtenden Richtungen in einem Netz unter allen vorhandenen. Abgesehen davon, dass diagonale und transversale Richtungen gegenüber denjenigen, welche den besten Rechnungsweg von Dreieck zu Dreieck vermitteln, einen geringen Einfluss auf die Punkt-Bestimmung, und oft sogar nur den Wert einer rohen Kontrolle haben, kommt in Betracht, dass ihre Beobachtung schwerer gelingt, weil sie die längeren sind. Der Beobachter wird also, falls sie nicht ausgeschlossen oder für sich beobachtet werden, genötigt, gerade auf diejenigen Beobachtungen, auf die es am wenigsten ankommt, die meiste Zeit — und oft eine kaum erschwingliche — zu verwenden, oder sich bei ihnen mit einer geringeren Genauigkeit zu begnügen; in letzterem Falle muss er sich aber gefallen lassen, dass sie die übrigen Beobachtungen verderben; da in der Ausgleichung die einen von den anderen sich nicht trennen lassen und die Zuteilung verschiedener Gewichte erhebliche Bedenken hat.

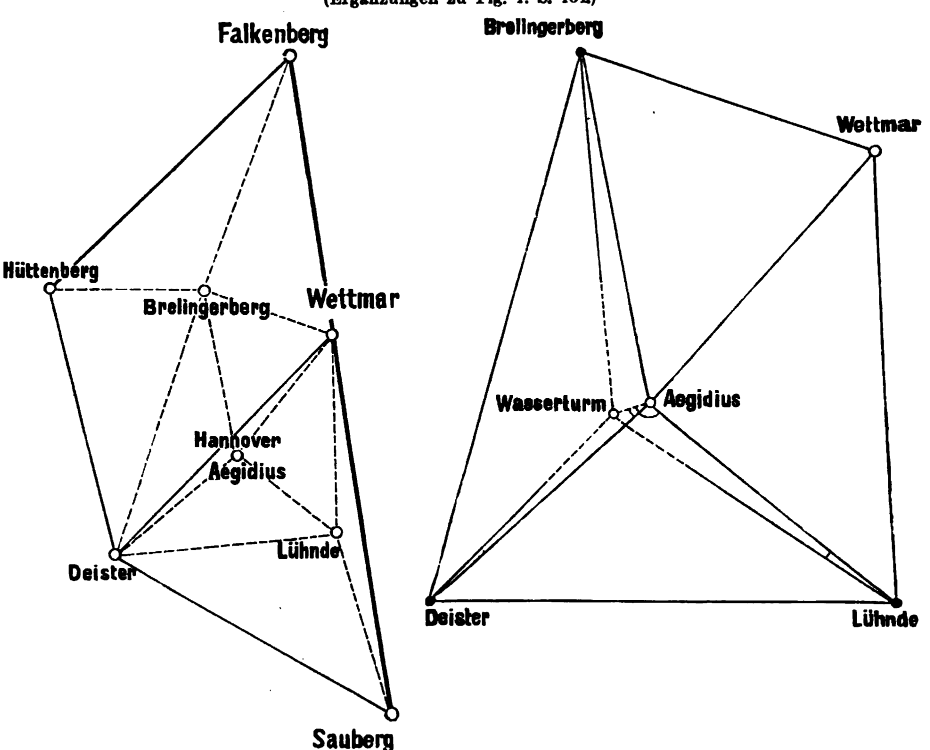
Anzahl der Strahlen einer Station s	Anzahl der Winkelmessungen $s\frac{s-1}{2}$	Winkelgewicht ohne Wiederholung $\frac{s}{2}$	Wiederholungszahl n	Winkelgewicht bei $n$facher Wiederholung $p = \frac{ns}{2}$
2	1	1,0	24	24
3	3	1,5	16	24
4	6	2,0	12	24
5	10	2,5	10	25
6	15	3,0	8	24
7	21	3,5	8	28
8	28	4,0	6	24

Die Station Silberberg hat in der Kette 6 Richtungen, also 15 Winkel, deren jeder 8mal gemessen ist, so dass 120 Winkel oder 240 Richtungen zu messen waren. Die 16 Richtungen, welche hiebei auf jeden Winkel kommen, werden dabei symmetrisch auf den ganzen Kreis verteilt, zur Erzielung von Elimination der Kreisteilungs-Fehler.

Fig. 3.
Massstab 1 : 1 000 000.

Fig. 4.
Massstab 1 : 500 000.

(Ergänzungen zu Fig. 1. S. 134.)



Indem wir hiemit den Hauptinhalt des „Berichtes der trigonometrischen Abteilung der königl. preuss. Landes-Aufnahme" von Annexe X[b] der Verhandlungen der internationalen Erdmessung 1887, abgedruckt haben, wollen wir einige weitere sehr schätzbare Mitteilungen über Zeit-Aufwand und Genauigkeit, welche ebenfalls an jener Stelle zu finden sind, auf unseren späteren § 27. verweisen.

Im Anschluss hieran geben wir mit Fig. 3. und Fig. 4. noch zwei weitere Vervollständigungen des Gesamt-Netzes von Fig. 1. S. 134 und zwar in der Gegend der Stadt Hannover.

Fig. 3. zeigt die Einschaltung des Aegidienturmes in Hannover in das Wesernetz, zusammen mit Brelingerberg und Lühnde.

Nachdem so für die Stadt-Vermessung von Hannover *ein* Punkt Aegidius festgelegt war, wurde noch ein zweiter Punkt *Wasserturm* dazu bestimmt, wie Fig. 4. in doppeltem Massstab von Fig. 3. andeutet.

Dabei ist *Wasserturm* als „Folgepunkt" im Anschluss an *Aegidius* als „Leitpunkt" gemessen und ausgeglichen, wie wir des näheren in der „Zeitschr. f. Verm." 1889, S. 1—14 mitgeteilt haben.

Dieses ist zugleich der Nachweis für die Basis der Hannoverschen Stadt-Trian-

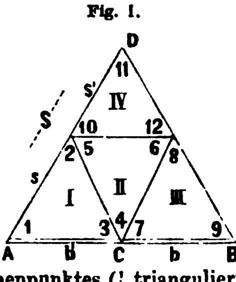
gulierung, welche wir in unserem II. Bande S. 228 und S. 698 ausführlich behandelt haben.

(Zugleich sei hier bemerkt, dass in der Figur auf S. 698, Band II, die zwei Punkte Aegidius und Wasserturm durch ein Versehen verwechselt wurden.)

§ 22. Verschiedene Fehler-Betrachtungen zur Anlage von Dreiecks-Netzen.

I. Grösse der Dreiecke.

Eine erste wichtige Frage betrifft die *Grösse* der Dreiecksseiten. Soll man, wenn man die Wahl hat, grosse oder kleine Dreiecke nehmen?



Diese Frage ist sehr unbestimmt, wir wollen ihr mit Fig. 1. folgende bestimmtere Fassung geben:

Auf einer Geraden sind drei feste Punkte A, C, B gegeben, und zwar, wie wir meist bei Grundlinien annehmen, fehlerfrei gegeben, ein Punkt D kann entweder durch 4 Dreiecke I, II, III, IV mit Benützung des Zwischenpunktes C, oder durch *ein* Dreieck ABD ohne Benützung des Zwischenpunktes C trianguliert werden; welches ist das günstigere?

Nimmt man alle 4 Dreiecke, so hat man zunächst 4 Summen-Gleichungen:

$$(1)+(2)+(3)-180^\circ=0,\quad (4)+(5)+(6)-(180)=0,\quad (7)+(8)+(9)-180^\circ=0,$$
$$(10)+(11)+(12)-180^\circ=0 \qquad (1)$$

und dazu eine Seiten-Gleichung, welche die Beziehung zwischen b' und b ausdrückt, d. h.:

$$b'\frac{\sin(1)}{\sin(2)}\frac{\sin(5)}{\sin(6)}\frac{\sin(8)}{\sin(9)}=b$$

oder mit der Abkürzung $\cot g\,(1)=c_1$ u. s. w. giebt dieses:

$$c_1-c_2+c_5-c_6+c_8-c_9+\ldots=0 \qquad (2)$$

Die Seite $AD=S$ wird in b' ausgedrückt durch die Funktion:

$$S=s+s'=b'\frac{\sin(3)}{\sin(2)}+b'\frac{\sin(1)}{\sin(2)}\frac{\sin(4)}{\sin(6)}\frac{\sin(12)}{\sin(11)}$$

Das weitere wollen wir nur noch mit der Vereinfachung machen, dass alle Dreiecke gleichseitig seien, also $b=b'=s=s'$ und $c_1=c_2\ldots=\cot g\,60^\circ=c$. Damit giebt die Weiterrechnung für das Gewicht P der Seite S:

$$\frac{1}{P}=\left(10\,c^2-\frac{0}{3}-\frac{0}{3}-\frac{0}{3}-\frac{0}{3}-\frac{16\,c^4}{6\,c^2}\right)b^2=7{,}333\,c^2\,b^2$$

also der mittlere Fehler von S:

$$m\,(S)=\frac{\mu}{\varrho}\cot g\,60^\circ\,b\,\sqrt{7{,}33\overline{3}}$$

oder, da $2\,b=S$ ist, der relative Fehler (vgl. Anmerkung S. 120):

$$\mu\,(S)=\frac{\mu}{2\,\varrho}\cot g\,60^\circ\sqrt{7{,}33\dot{3}}=1{,}354\,\frac{\mu}{\varrho}\cot g\,60^\circ=0{,}000\,003\,79\,\mu \qquad (3)$$

$$
\begin{array}{lll}
\underline{+6} & -2 & -3 \\
 & \underline{+6} & +3 \\
 & & +4 \\
\underline{+5{,}333} & & +2{,}000 \\
 & & \underline{+2{,}500} \\
 & & +1{,}750 = \frac{1}{P} \text{ für } s, \text{ mit } \textit{einer} \text{ Diagonale } d.
\end{array}
$$

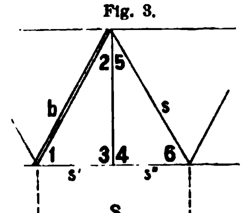
Nachdem wir diesen Fall in aller Ausführlichkeit vorgerechnet haben, mag es genügen, für die beiden anderen Fälle s' und s'' die Ergebnisse mitzuteilen, wie in folgender Zusammenstellung geschieht:

Berechnete Seite	mit *einer* Diagonale d	mit *zwei* Diagonalen d und d'	
s	$\frac{1}{P} = 1{,}75$	$\frac{1}{P} = 1{,}50$	$\sqrt{\frac{1{,}75}{1{,}50}} = 1{,}080$
s'	$\frac{1}{P'} = 4{,}00$	$\frac{1}{P'} = 3{,}75$	$\sqrt{\frac{4{,}00}{3{,}75}} = 1{,}033$
s''	$\frac{1}{P''} = 3{,}75$	$\frac{1}{P''} = 3{,}75$	

Wie man hieraus sieht, ist der Genauigkeits-Gewinn durch Hinzunehmen der zweiten Diagonale nicht bedeutend. Bei s'' ändert die zweite Diagonale d' überhaupt nichts, wie auch aus Fig. 2. S. 140 unmittelbar zu ersehen ist.

In der letzten Spalte vorstehender Zusammenstellung sind die Fehler-Verhältnisse 1,080 und 1,033 für beide Fälle angegeben, es ist also der Genauigkeits-Gewinn durch die zweite Diagonale nur bzw. 8% und 3%.

Fig. 3.



III. Ein weiterer Fragefall ist in Fig. 3. dargestellt.

Wenn die Grundlinie b fest gegeben ist, so kann man die Seiten s und $s' + s'' = S$ entweder aus *einem* Dreieck mit den Winkeln (1), (2 + 5), (6) oder aus *zwei* Dreiecken (1) (2) (3) und (4) (5) (6) bestimmen; es fragt sich, was das günstigere ist.

Da wir die Behandlung solcher Aufgaben nun genügend erläutert haben, schreiben wir sofort die Ergebnisse mit der Abkürzung $cotg\,(1) = c_1$ u. s. w. (mit den Fehler-Bezeichnungen nach der Anmerkung zu S. 120). Die Gewichte der Winkel seien alle = 1.

Für die Seite s hat man aus *einem* Dreieck nach (11) § 19. S. 121:

$$\mu\,(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}\,(c_1^2 + c_6^2 + c_1\,c_6)} \tag{12}$$

Dagegen aus *beiden* Dreiecken:

$$\mu\,(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}\,(c_1^2 + c_3^2 + c_1\,c_3 + c_4^2 + c_6^2 + c_4\,c_6)} \tag{13}$$

Für die andere Seite S hat man aus *einem* Dreieck:

$$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}(c_{25}^2 + c_6^2 + c_{25}c_6)} \tag{14}$$

und aus *beiden* Dreiecken (wobei aber die Bedingung, dass $s' + s''$ eine Gerade sei, nicht mit enthalten ist):

$$m(s' + s'') =$$

$$\frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\left(s'^2 c_2^2 + s''^2(c_1^2 + c_5^2 + c_6^2 + c_5 c_6) + S^2 c_3^2 - s's'' c_1 c_2 + s'S c_2 c_3 + s''S c_1 c_3\right)} \tag{15}$$

Macht man das grosse Dreieck gleichseitig und die Querlinie rechtwinklig, also $c_1 = c_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_2 = c_5 = \sqrt{3}$ und $c_3 = c_4 = 0$, so erhält man folgende Vergleichung:

aus *einem* Dreieck | aus *zwei* Dreiecken

$$\mu(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \mu(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\mu(s)_1 : \mu(s)_2 = 1 : 0{,}8165 \tag{16}$$

aus *einem* Dreieck | aus *zwei* Dreiecken

$$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \mu(s' + s'') = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)}$$

$$\mu(S) : \mu(s' + s'') = 1 : 1{,}291 \tag{17}$$

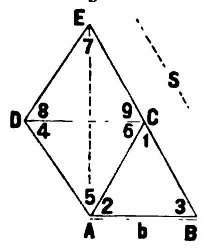
Es wird also zwar die Seite s günstiger aus zwei Dreiecken, dagegen S günstiger aus *einem* Dreieck bestimmt.

Hiernach kann man zu Fig. 3. sagen:

Die Einschaltung des Punktes bei 3. 4 in die Reihe der gleichseitigen Dreiecke wirkt ungünstig auf die Bestimmung der Längen-Erstreckung S der Kette, aber günstig auf die Basis-Übertragung von b nach s.

IV. In Fig. 4. zeigt die Fehler-Berechnung, dass aus der Basis $AB = b$ die Seite $BE = S$ günstiger aus *drei* gleichseitigen Dreiecken bestimmt wird, als aus *einem* Dreieck ABE, denn die Fehler-Berechnung giebt:

Fig. 4.



1) aus drei Dreiecken

$$S = b\frac{\sin(2)}{\sin(1)} + b\frac{\sin(3)\,\sin(5)\,\sin(8)}{\sin(1)\,\sin(4)\,\sin(7)}$$

(über den Gliedern: S bzw. $BC + CE$)

hiefür wird, wenn alle Winkel $= 60°$ sind:

$$\mu(S) = 0{,}913\,\frac{\mu}{\varrho} \tag{18}$$

2) $S = BE$ als Hypotenuse des *einen* rechtwinkligen Dreiecks BAE mit $B = 60°$, $A = 90°$ und $E = 30°$ berechnet, giebt:

$$\mu(S) = 1{,}414\,\frac{\mu}{\varrho} \tag{19}$$

Dieser Fehler ist also nahe das 1,5fache des zuerst berechneten Fehlers der Bestimmung aus drei Dreiecken.

V. Wir wollen hier noch eine andere kleine Genauigkeits-Untersuchung anschliessen, von welcher später in § 27. Gebrauch gemacht werden wird. Es soll der mittlere Fehler einer Richtung bestimmt werden, nur mit Rücksicht auf die Summen-Proben in dem Viereck, also *ohne* die Seiten-Gleichung. Man hat dann nach Fig. 2. S. 140 die schon unter (6), (8) und (9) enthaltenen Bedingungs-Gleichungen:

$$
\begin{array}{l}
-v_1 + v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -v_8 + v_9 - v_{10} \quad . \quad + v_{12} + w_1 = 0 \\
-v_1 \quad . \quad + v_3 - v_4 + v_5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - v_{11} + v_{12} + w_2 = 0 \\
. \quad - v_2 + v_3 - v_4 \quad . \quad + v_6 - v_7 + v_8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + w_3 = 0
\end{array}
$$

Hiezu gehören die Normalgleichungen (deren Coëfficienten in (10) schon mit enthalten sind):

$$
\begin{array}{l}
+6\,k_1 + 2\,k_2 - 2\,k_3 + w_1 = 0 \\
+2\,k_1 + 6\,k_2 + 2\,k_3 + w_2 = 0 \\
-2\,k_1 + 2\,k_2 + 6\,k_3 + w_3 = 0
\end{array}
$$

Die Auflösung giebt:

$$
k_1 = \frac{-2\,w_1 + w_2 - w_3}{8}\,, \quad k_2 = \frac{w_1 - 2\,w_2 + w_3}{8}\,, \quad k_3 = \frac{-w_1 + w_2 - 2\,w_3}{8}
$$

Nun ist $[v\,v] = -[w\,k]$ und die Ausrechnung hiernach giebt:

$$
-8\,[w\,k] = 2\,w_1^2 + 2\,w_2^2 + 2\,w_3^2 - 2\,w_1\,w_2 + 2\,w_1\,w_3 - 2\,w_2\,w_3 \tag{20}
$$

Das kann man aber noch übersichtlicher gestalten durch Einführung eines *vierten* Summen-Widerspruches w_4, nämlich:

$$
w_1 - w_2 + w_3 = w_4
$$

Damit kann man (20) auf die Form bringen:

$$
-8\,[w\,k] = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2
$$

und den mittleren Gewichtseinheits-Fehler m' erhält man, da 3 unabhängige Bedingungs-Gleichungen benützt wurden:

$$
m'^2 = \frac{[v\,v]}{3} = \frac{-[w\,k]}{3} = \frac{1}{3}\,\frac{[w^2]}{8} \tag{21}
$$

wo nun unter $[w^2]$ die Summe *aller vier* in dem Vierecke möglicher Dreiecks-Summenproben bedeutet. Der Wert m' nach (21) ist ein mittlerer Richtungs-Fehler, der entsprechende mittlere Winkelfehler ist:

$$
m = m'\sqrt{2} = \sqrt{\frac{[w^2]}{12}} \tag{22}
$$

§ 23. Der Schreibersche Satz über günstigste Gewichts-Verteilung.

Verschiedene Einzel-Ergebnisse unserer bisherigen Genauigkeits-Untersuchungen von § 19., § 20. und § 22. sind besondere Fälle eines allgemeineren Satzes, welchen zuerst General *Schreiber* bei Gelegenheit des Göttinger Basisnetzes ausgesprochen hat („Zeitschr. f. Verm." 1882, S. 141). Der Satz lautet im wesentlichen:

Wenn in einem Dreiecksnetz mit Bedingungs-Gleichungen *eine* Seite S mit möglichst grossem Gewicht P bei konstanter Summe $[p]$ der Winkelmessungs-Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ bestimmt werden soll, so ist unter den hierzu möglichen Verteilungen der Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte p wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung von S unumgänglich nötigen Winkel (oder Richtungen u. s. w.) beträgt, während die übrigen Gewichte p alle =

Null zu setzen sind. (Dasselbe gilt nicht bloss von einer Dreiecksseite S, sondern von irgend einer Funktion ausgeglichener Beobachtungen.)

Das Wesen dieses Satzes findet man auch in einem früheren von demselben Urheber stammenden Ausspruche: „Dass die Güte der Messungen nicht in einer systemlosen Häufung von Kontrolen, sondern in einer scharfen Messung solcher Elemente zu suchen ist, welche die Genauigkeit der Schlussergebnisse in erster Linie bedingen.“ (s. „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 397, und unseren früheren § 18., S. 118.)

Der fragliche Satz ist von einschneidender Bedeutung für die Anlage trigonometrischer und ähnlicher Messungen.

Wir geben im Folgenden eine teilweise von anderer Anschauung als die *Schreiber*sche Original-Abhandlung ausgehende Darstellung und entsprechenden Beweis des Satzes.

Zur *Vorbereitung* wollen wir zuerst den einfachen Fall des arithmetischen Mittels mit ungleichen Gewichten behandeln.

Man habe n unabhängige Messungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2 \ldots p_n$. Die Messungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ stehen mit einer Unbekannten x in folgenden Beziehungen:

$$x - a_1 l_1 = 0 \qquad x - a_2 l_2 = 0 \ \ldots \qquad x - a_n l_n = 0,$$

dann hat man zur Bestimmung von x folgende Gleichung:

$$x = \frac{[p\,a\,l]}{[p\,a\,a]} \tag{1}$$

und das Gewicht von x ist:

$$P = [p\,a\,a] = p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + \ldots p_n a_n^2.$$

Fragt man nach dem Maximum von P in Hinsicht auf die Gewichte p und auf die Gewichts-Verteilung bei konstanter Summe $[p]$, so sieht man ohne weiteres ein, dass P am grössten wird, wenn man von allen Coëfficienten $a_1, a_2 \ldots a_n$ den *grössten* auswählt, ihm das Gewicht $[p]$ zuteilt und alle anderen $p =$ *Null* setzt. Ist z. B. der erste Wert a_1 der grösste, so wird hiernach:

$$P = [p]\, a_1^2 \tag{2}$$

Man wird also *nur* diejenige Messung l machen, welche in günstigster Weise zur Bestimmung von x führt, und alle anderen l gar nicht messen.

Dieses gilt natürlich nicht für den Fall, dass man zur Vermeidung einseitiger Fehler doch die anderen l auch misst. Von solchen praktischen Nebenrücksichten soll hier und bei der folgenden Aufgabe überall nicht die Rede sein.

Zu der Ausgleichung mit Bedingungs-Gleichungen übergehend, stellen wir die bekannten Formeln hierfür zunächst zusammen, im Anschluss an unsere früheren Formeln, Band I, § 43,

$$\begin{array}{rl} \text{Beobachtungen:} & l_1 \;\; l_2 \;\; l_3 \ldots l_n \\ \text{mit Gewichten:} & p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \ldots p_n \\ \text{Verbesserungen:} & v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \ldots v_n \end{array}$$

Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots a_n v_n + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots b_n v_n + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3 + \ldots q_n v_n + w_q = 0 \end{array}$$

Die Bestimmung der $v_1, v_2 \ldots . v_n$ mit Korrelaten $k_1, k_2 \ldots . k_q$ brauchen wir hier nicht zu verfolgen, wir betrachten nun aber eine lineare Funktion F der ausgeglichenen Elemente:

$$F = f_1 (l_1 + v_1) + f_2 (l_2 + v_2) + \ldots . f_n (l_n + v_n) \tag{3}$$

Um das Gewicht P dieser Funktion nach der Ausgleichung zu bestimmen, bildet man die Übertragungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{a\,a}{p}\right] r_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] r_2 + \ldots . \left[\frac{a\,q}{p}\right] r_q + \left[\frac{a\,f}{p}\right] &= 0 \\ \left[\frac{a\,b}{p}\right] r_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] r_2 + \ldots . \left[\frac{b\,q}{p}\right] r_q + \left[\frac{b\,f}{p}\right] &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[\frac{a\,q}{p}\right] r_1 + \left[\frac{b\,q}{p}\right] r_2 + \ldots . \left[\frac{q\,q}{p}\right] r_q + \left[\frac{q\,f}{p}\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hat man hieraus die Übertragungs-Coëfficienten r bestimmt, so berechnet man:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= f_1 + a_1 r_1 + b_1 r_2 + \ldots . q_1 r_q \\ F_2 &= f_2 + a_2 r_1 + b_2 r_2 + \ldots . q_2 r_q \\ &\vdots \\ F_n &= f_n + a_n r_1 + b_n r_2 + \ldots . q_n r_q \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und dann hat man das Gewicht P der Funktion F nach der Ausgleichung durch die Formel:

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \ldots . \frac{F_n^2}{p_n} \tag{6}$$

Nun handelt es sich darum, die Funktion (6) möglichst klein zu machen (also P möglichst gross) mit der Nebenbedingung:

$$p_1 + p_2 + \ldots . p_n = [p] \text{ konstant} \tag{7}$$

Dabei sind, vermöge des Zusammenhangs der Gleichungen (5) und (4), die $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$ Funktionen der Gewichte $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$.

Wenn man annehmen dürfte, dass die F ***konstant*** wären, so würde man bekanntlich so verfahren, dass man die Nebenbedingung (7) mit einer unbestimmten Korrelate k^2 multipliziert und zu (6) addiert:

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \ldots . \frac{F_n^2}{p_n} + (p_1 + p_2 + \ldots . p_n - [p])\, k^2.$$

Dieses hätte man nach $p_1, p_2 \ldots . p_n$ zu differentiieren, und so zu rechnen:

$$0 = \frac{F_1^2}{p_1^2} - k^2, \qquad 0 = \frac{F_2^2}{p_2^2} - k^2 \text{ u. s. w.,}$$

daraus folgt, dass die $p_1, p_2 \ldots . p_n$ bzw. den $F_1, F_2 \ldots . F_n$ ***proportional*** sein müssen, oder da Gewichte überhaupt nur Proportional-Zahlen sind, kann man sagen:

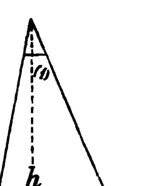
$$k\,p_1 = F_1 \qquad k\,p_2 = F_2 \ldots . \qquad k\,p_n = F_n \tag{8}$$

Wenn die F_1, F_2, F_3 zwar nicht konstant, aber auch nicht Funktionen der p, sondern nach irgend welchem Gesetze, unabhängig von den p, veränderlich sein sollen, so würde, wenn etwa die F willkürlich wären, das Minimum von (6) erzielt mit $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0 \ldots$; sind die F nicht willkürlich, aber auch nicht Funktionen der p, so kann man ein Minimum von (6) überhaupt nicht bestimmen. —

Zu weiterer Klarlegung der Verhältnisse wollen wir ein einfaches *Beispiel* nehmen:

In nebenstehender Figur 1. handelt es sich um die Bestimmung der Höhe h eines Dreiecks, in welchem die Basis b und alle drei Winkel (1) (2) (3) gemessen sind. Es besteht eine Bedingungs-Gleichung:

Fig. 1.



$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0$$

$$\text{also: } a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1 \tag{9}$$

Die Funktion F ist:

$$F = h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3) \tag{10}$$

Dieses giebt, wenn alles Konstante bei Seite gelassen wird:

$$f_1 = -\cot g\,(1) \quad f_2 = +\cot g\,(2) \quad f_3 = +\cot g\,(3),$$

wofür wir in Abkürzung schreiben wollen:

$$f_1 = -c_1 \qquad f_2 = +c_2 \qquad f_3 = +c_3.$$

Die allgemeinen Gleichungen (4) und (5) geben hiermit:

$$\left[\frac{1}{p}\right] r + \left(-\frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} + \frac{c_3}{p_3}\right) = 0$$

$$r = \frac{\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} - \frac{c_3}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{11}$$

$$F_1 = -c_1 + r \qquad F_2 = c_2 + r \qquad F_3 = c_3 + r \tag{12}$$

Man kann auch die Formel (6) vollständig bilden, sie giebt in diesem Falle:

$$\frac{1}{P} = \frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2} + \frac{c_3^2}{p_3} - \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}\left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} - \frac{c_3}{p_3}\right)^2 \tag{13}$$

Das kann man auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{P} = \frac{p_1(c_3 - c_2)^2 + p_2(c_1 + c_3)^2 + p_3(c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \tag{14}$$

(Dieses sind dieselben Formeln, wie früher (19) und (20) § 19. S. 123.)

Das Maximum der Funktion (14) mit der Nebenbedingung $[p] =$ konstant, kann durch fortgesetztes Probieren gefunden werden.

Wir nehmen hiezu folgende Zahlenwerte an:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) = 34^\circ & \cot g\, 34^\circ = c_1 = 1{,}483 \\ (2) = 68^\circ & \cot g\, 68^\circ = c_2 = 0{,}404 \\ (3) = 78^\circ & \cot g\, 78^\circ = c_3 = 0{,}213 \end{array}\right\} \tag{15}$$

In Betreff der Gewichte wollen wir zuerst annehmen $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $[p] = 3$, und damit geben die vorstehenden Formeln folgendes:

$$r = 0{,}289 \qquad F_1 = -1{,}194 \qquad F_2 = +0{,}693 \qquad F_3 = +0{,}502$$

$$\frac{1}{P} = 2{,}1578. \quad \text{Absolute Summe } [\pm F] = 2{,}389.$$

Nach diesem haben wir eine *neue* Gewichts-Annahme gemacht, nämlich die

$p_1 \, p_2 \, p_3$ proportional $F_1 \, F_2 \, F_3$ und wieder auf die frühere Summe $[p] = 3$ gestimmt, d. h. neue Annahme:

$$p_1 = 1{,}50, \quad p_2 = 0{,}87, \quad p_3 = 0{,}63, \quad [p] = 3{,}00.$$

In dieser Weise haben wir die Rechnung 6mal wiederholt, wie aus der nachfolgenden Tabelle mit den Nummern 1. 2. 3.... 7. zu ersehen ist; die in der Tabelle vorhergehenden Nummern 0. und 0,5. sind nachher mit neuen willkürlichen Gewichts-Annahmen noch hinzuberechnet worden.

Verschiedene Gewichts-Verteilungen für die Funktion

$$h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3) \tag{16}$$

Num	p_1	p_2	p_3	$[p]$	r	F_1	F_2	F_3	$\left[\frac{FF}{p}\right]$
0.	0,0	1,5	1,5	3,0	1,483	0,000	1,887	1,696	5,292
0,5.	0,5	1,0	1,5	3,0	0,660	— 0,823	1,064	0,873	2,995
1.	1,00	1,00	1,00	3,00	0,289	— 1,194	+ 0,693	+ 0,502	2,158
2.	1,50	0,87	0,63	3,00	0,059	— 1,424	+ 0,463	+ 0,272	1,715
3.	1,979	0,643	0,378	3,000	— 0,0940	— 1,577	+ 0,310	+ 0,119	1,443
4.	2,358	0,464	0,178	3,000	— 0,1756	— 1,659	+ 0,228	+ 0,037	1,287
5.	2,586	0,356	0,058	3,000	— 0,2072	— 1,690	+ 0,197	+ 0,006	1,214
6.	2,679	0,312	0,009	3,000	— 0,2128	— 1,696	+ 0,191	+ 0,000	1,191
7.	2,696	0,304	0,000	3,000	— 0,2130	— 1,696	+ 0,191	+ 0,000	1,187

Die Reihe 1. bis 7. zeigt ganz schöne Konvergenz, und führt schliesslich zu der günstigsten Gewichts-Verteilung:

$$p_1 = 2{,}696 \qquad p_2 = 0{,}304 \qquad p_3 = 0{,}000 \tag{17}$$

d. h. man soll in diesem Falle den dritten Winkel (3) gar nicht messen. Nachdem man dieses in unserem Falle erkannt hat, kann man p_1 und p_2 unmittelbar bestimmen, denn mit $p_3 = 0$ giebt die Formel (14):

$$\frac{1}{P} = \frac{p_1 (c_2 - c_3)^2 + p_2 (c_1 + c_3)^2}{p_1 \, p_2} = \frac{(c_2 - c_3)^2}{p_2} + \frac{(c_1 + c_3)^2}{p_1}$$

und das giebt nach der oben bei (7) begonnenen und nachher bei (21) bis (24) weiter zu verfolgenden Theorie:

$$p_1 = c_1 + c_3 \qquad p_2 = c_2 - c_3 \qquad p_3 = 0 \tag{18}$$

oder entsprechende Proportionalität. In unserem Falle ist $c_1 = 1{,}483$, $c_2 = 0{,}404$, $c_3 = 0{,}213$. $c_1 + c_3 = 1{,}696$, $c_2 - c_3 = 0{,}191$, und da die Summe $[p] = 3$ sein soll, hat man nun:

$$\begin{array}{rrrr} & c_1 + c_3 = 1{,}696 & & p_1 = 2{,}6964 \\ & c_2 - c_3 = 0{,}191 & & p_2 = 0{,}3036 \\ & 0{,}000 & & p_3 = 0{,}0000 \\ \hline \text{Summe} & 1{,}887 & & 3{,}0000 \end{array} \tag{19}$$

Dieses stimmt hiernach gut mit den Ergebnissen (17), welche durch fortgesetztes Probieren gefunden wurden.

Die Formeln (18) kann man allgemein für solche hochgestellte Basisdreiecke benutzen. Setzt man auch noch die Winkel (2) und (3) einander gleich, so kommt man auf den Fall, den wir schon in (27) S. 125 behandelt haben.

Im Übrigen geben die Funktionen F_1, F_2, F_3 unserer Rechenversuchsreihe (16) zu erkennen, dass sie zwar durchaus im allgemeinen nicht unabhängig von den p sind, dass sie aber *in der Nähe der günstigsten Gewichts-Verteilung* allerdings sich sehr wenig ändern, die Kurven der F, welche man als Ordinaten zu den Abscissen p aufträgt, berühren die Abscissen-Richtung. Man kann daher schreiben:

$$\left.\frac{dF_1}{dp_1}\right]_m = 0 \qquad \left.\frac{dF_1}{dp_2}\right]_m = 0 \qquad \left.\frac{dF_2}{dp_1}\right]_m = 0 \text{ u. s. w.} \tag{20}$$

wo das Zeichen $\Big]_m$ andeuten soll, dass es sich um Fälle mit günstigster Gesamtgewichts-Verteilung handelt.

Nach Erledigung des Zahlen-Beispiels betrachten wir wieder den allgemeinen Fall der Funktion (6), welche ein Maximum werden soll. Indem wir zur Abkürzung nur 3 Glieder schreiben, haben wir nach (6):

$$y = \frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3} + \ldots . \tag{21}$$

Da hiebei die F Funktionen der p sind, bilden wir das totale Differential:

$$\begin{aligned} dy = & \left(\frac{2F_1}{p_1}\frac{dF_1}{dp_1} + \frac{2F_2}{p_2}\frac{dF_2}{dp_1} + \frac{2F_3}{p_3}\frac{dF_3}{dp_1}\right) dp_1 - \frac{F_1^2}{p_1^2}\,dp_1 \\ & + \left(\frac{2F_1}{p_1}\frac{dF_1}{dp_2} + \frac{2F_2}{p_2}\frac{dF_2}{dp_2} + \frac{2F_3}{p_3}\frac{dF_3}{dp_2}\right) dp_2 - \frac{F_2^2}{p_2^2}\,dp_2 \\ & + \left(\frac{2F_1}{p_1}\frac{dF_1}{dp_3} + \frac{2F_2}{p_2}\frac{dF_2}{dp_3} + \frac{2F_3}{p_3}\frac{dF_3}{dp_3}\right) dp_3 - \frac{F_3^2}{p_3^2}\,dp_3 \end{aligned}$$

Dieses totale Differential soll allgemein = Null werden mit der Nebenbedingung $p_1 + p_2 + p_3 = [p]$ konstant, woraus auch folgt:

$$dp_1 + dp_2 + dp_3 = 0 \tag{22}$$

Nimmt man zunächst an, es bestehe Proportionalität zwischen den F und den p, etwa:

$$\frac{F_1}{p_1} = \frac{F_2}{p_2} = \frac{F_3}{p_3} = k \tag{23}$$

so geht obiges Differential dy über in:

$$\left.\begin{aligned} dy = & \, 2k\left(\frac{dF_1}{dp_1} + \frac{dF_2}{dp_1} + \frac{dF_3}{dp_1}\right) \\ & + 2k\left(\frac{dF_1}{dp_2} + \frac{dF_2}{dp_2} + \frac{dF_3}{dp_2}\right) \\ & + 2k\left(\frac{dF_1}{dp_3} + \frac{dF_2}{dp_3} + \frac{dF_3}{dp_3}\right) \\ & - k^2\,(dp_1 + dp_2 + dp_3) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Hier verschwindet das letzte Glied wegen der Nebenbedingung (22); und wenn auch die übrigen Teile von dy allgemein verschwinden sollen, so ist, bei der Unbestimmtheit der Funktionen F nötig, dass *alle* in dy vorkommenden Differential-

Quotienten $\frac{dF_1}{dp_1}, \frac{dF_1}{dp_2}$ u. s. w. = Null werden, wie wir schon oben bei (20) angedeutet haben.

Nachdem die Richtigkeit der Proportionalität (22) eingesehen ist, hat man im Falle der günstigsten Verteilung, nach (21):

$$y = k^2 (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots.) = k^2 [p] \tag{25}$$

dabei ist k^2 ein Faktor, der sich aus der Gewichts-Verteilung und aus dem Netz-Zusammenhang ergiebt, und wenn die Aufgabe *mehrere* reelle Minima von y bietet (was nicht zum Voraus beurteilt werden kann), so sind die zugehörigen Coëfficienten k^2 verschiedene, und das Minimum Minimorum wird auszuwählen sein nach der Bedingung, dass k^2 am kleinsten sei. Aus (21) und (22) kann man auch bilden:

$$y = k (F_1 + F_2 + F_3 + \ldots.) = k [F] \tag{26}$$

dabei ist aber $[F]$ als Summe der *absoluten* Werte F aufzufassen.

Diese $F_1\, F_2 \ldots.$ sind Funktionen *aller Gewichte* p, und sie sind unabhängig von der Form, in welcher die Funktion F selbst nach (3) aufgestellt wird. Diese Funktion (3) kann wegen der Existenz der Bedingungs-Gleichungen in sehr mannigfaltiger Weise gebildet werden, und dabei können die einzelnen f verschwinden oder wieder auftreten; dagegen die $F_1\, F_2 \ldots.$ nach (5), sind von der jeweiligen Auswahl der f unabhängig, obgleich jedes F_1, $F_2 \ldots.$ als Anfangsglied je ein f_1, $f_2 \ldots.$ hat. Deswegen sind auch die Gleichungen (5), welche nur einzelne Formen der F_1, $F_2 \ldots.$ darstellen, zum Erkennen der allgemeinen Eigenschaften dieser F_1, $F_2 \ldots.$ wenig geeignet. Eine wichtige allgemeine Eigenschaft, welche sich aus der sachlichen Bedeutung der F_1, $F_2 \ldots.$ ergiebt, ist nun die, dass irgend ein F_i verschwindet, wenn das zugehörige p_i = Null wird (und dass es sehr gross wird, wenn das zugehörige p_i einen grossen, die anderen p überwiegenden, Wert annimmt).

Wenn (21) dem Minimum entspricht, so kann hierin wohl der Fall inbegriffen sein, dass ein einzelnes p_i = Null ist, es ist dann auch das zugehörige F_i = Null, ohne dass die Proportionalität $F_i = k\,p_i$ gestört würde, und so kann es mit mehreren p der Fall sein.

Nun wollen wir wieder zu der Annahme zurückkehren, das Minimum und die Proportionalität der p und F sei noch nicht erreicht, und zwei Elemente mögen geben:

$$\frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} \tag{27}$$

Setzt man $p_2 = 0$, und lässt zur Erhaltung der Gesamtsumme p_1 in $p_1 + p_2$ übergehen, so möge entstehen:

$$\frac{F_1'^2}{p_1 + p_2} + \frac{F_2'^2}{0} = \frac{F_1'^2}{p_1 + p_2} \tag{28}$$

Die letzte Gleichung ist richtig, weil, wie wir oben gesehen haben, jede Annahme $p_i = 0$ auch $F_i = 0$ zur Folge hat. Wenn nun der Fall (26) nicht sehr weit von der Proportionalität entfernt ist, und p_2 erheblich *kleiner* ist als p_1, so wird F_1' nicht wesentlich grösser als F_1 sein, dagegen ist der Nenner p_1 auf $p_1 + p_2$ gewachsen, und das zweite Glied von (27) fortgefallen, folglich wird der Übergang von (26) auf (28) eine *Abnahme* des Ganzen bedeuten, und es erweist sich vorteilhaft, *kleine* Gewichte ganz verschwinden zu lassen, und sie anderen vorher schon *grösseren* Gewichten zuzulegen.

Allgemeiner kann man sagen: In der Nähe der günstigsten Gewichts-Verteilung sind die Änderungen ΔF nur Grössen zweiter Ordnung im Vergleich mit den Änderungen Δp der Gewichte p selbst, und deswegen hängt die Funktion y in erster Linie von den Nennern p der einzelnen Glieder ab, und man kann nach diesen Nennern leicht die Gesamtwirkung der Änderungen Δp beurteilen.

Wenn man also mit irgend einer Gewichts-Verteilung, etwa nach verschiedenen Versuchen, dahin gelangt ist, dass die F und p bereits nahezu proportional sind, so kann man annehmen, dass man dem Minimum der Funktion (21) oder dem Maximum von P bei konstanter Summe $[p]$ nicht mehr ferne ist. Dann sind aber die Differential-Quotienten der F nach dem p bereits der Null nahe, und deswegen wird ein einzelnes kleines p zweckmässig $=$ Null gesetzt, weil dadurch das betreffende Glied $\frac{F^2}{p}$ verschwindet, ohne dass, wegen der erwähnten kleinen Differential-Quotienten, die übrigen F erheblich wüchsen, wozu noch der kleine Vorteil kommt, dass durch das Nullsetzen eines p bei konstanter Summe $[p]$ in den übrigen Gliedern $\frac{F^2}{p}$ die Nenner etwas wachsen.

So kann man fortfahren, die grossen p auf Kosten der kleinen p zu verstärken, bis nur noch so viele Glieder vorhanden sind, als zur einfachen Bestimmung der Funktion F überall nötig sind.

Was die wirkliche Ausrechnung einer Gewichts-Verteilung betrifft, so wird man wohl immer am besten nach Anleitung unseres kleinen Beispiels (9)—(17) so verfahren, dass man versuchsweise eine Gewichts-Verteilung annimmt, die F ausrechnet und mit neuen Gewichten proportional den erstmals erhaltenen F die Rechnung wiederholt; konvergieren einzelne Glieder deutlich gegen Null, so wird man alsbald die betreffenden p völlig $=$ Null setzen u. s. w.

Wenn eine solche Aufgabe an und für sich sachlich betrachtet eine wesentlich ungleiche günstige Gewichts-Verteilung vermuten lässt, so wird auch die successive Näherungs-Rechnung mit den F und p rasch konvergieren, auch werden dann wohl schon *vor* Beginn aller Rechnung Fingerzeige vorhanden sein, in welchem Sinne etwa Gewichts-Verstärkungen oder Gewichts-Verringerungen bis zur Null, am Platze sein mögen.

Wenn dagegen die Versuchs-Rechnungen *nicht* konvergieren, so wird man es mit einem Falle zu thun haben, in welchem ungleiche Gewichts-Verteilung überhaupt nicht am Platze ist.

Anmerkung. Die Eingangs von uns zitierte Abhandlung von General *Schreiber* („Zeitschr. f. Verm." 1882, S. 129—161) geht von der Anschauung aus, dass die F Funktionen der r sind und dass dem Maximum des Gewichtes P ein Minimum der absoluten Summe $[\pm F]$ entspricht. Wenn hiernach die einzelnen F bestimmt sind, werden die p proportional dieser F genommen.

In einer Bemerkung von Herrn General *Schreiber*, „Zeitschr. f. Verm." 1889, S. 57—59, wird gesagt, dass die F Funktionen der r sind, es wird dann aber hinzugesetzt, dass die F *nicht* Funktionen der p, also von den p *unabhängig* seien.

Wir haben hierauf zu bemerken, dass die Abhängigkeit der F von den p allerdings bei der Betrachtung der absoluten Summe $[\pm F]$ gleichgültig ist, dass aber die *Proportionalität* der F und der p ohne Beziehungen zwischen F und p nicht bewiesen werden kann, wie oben bei (8) S. 146 gezeigt ist.

§ 24. Seiten-Refraktion.

Bei den Unregelmässigkeiten der Wärme-Verteilung in der Atmosphäre, entsprechend der ungleichen Wärme-Ausstrahlung der Erdoberfläche (Wasser und Land, Wälder und Sand u. s. w.) ist es an sich wahrscheinlich, dass die Lichtstrahlen in der Atmosphäre nicht nur nach der Höhe abgelenkt werden, sondern auch *seitlich* kleine Refraktionen erleiden.

Wenn z. B. ein Heliotropenlicht im Fernrohr nicht als ein Punkt, sondern als ein Lichtfleck von 60″ Durchmesser erscheint, so haben jedenfalls die seitlichen Lichtteile seitliche Brechungen von $\pm 30''$ erfahren, und ob das Intensitäts-Zentrum des Lichtflecks, auf welches die Fadenmitte eingestellt wird, allein sich in einer vertikalen Ebene fortgepflanzt hat, kann man nicht sicher wissen.

Wichtiger als solche Überlegungen sind *Beobachtungen*, zu denen wir nun übergehen.

I. Struve hat schon im Jahre 1829 im 7. Bande der „astron. Nachr." S. 391 bis 395, Seiten-Refraktionen vermutet aus dem Umstand, dass der Widerspruch w der Winkelsummen $\alpha + \beta + \gamma$ gegen $180° +$ sphär. Excess, bei Dreiecken mit kurzen Seiten im allgemeinen günstiger ausfiel, als bei langen Seiten. *Struve* ordnete die 31 Dreiecke seiner Gradmessung in den Ostsee-Provinzen Russlands nach der Grösse des Umfangs $S = a + b + c$, wo a, b und c die drei Seiten sind, und fand folgende Werte $w = \alpha + \beta + \gamma - (180° + \varepsilon)$:

Struves Beobachtungen vom 1829.

Nr.	S	w	Nr.	S	w	Nr.	S	w	
1.	20km	+ 0,50″	11.	63km	+ 1,09″	21.	98km	— 0,16″	
2.	22	— 1,36	12.	66	— 0,55	22.	98	— 1,15	
3.	33	— 0,50	13.	80	— 0,55	23.	100	+ 1,82	
4.	43	+ 0,46	14.	80	+ 0,18	24.	100	— 0,13	
5.	43	+ 0,45	15.	84	— 0,19	25.	102	+ 0,03	
6.	49	+ 0,22	16.	88	— 0,26	26.	111	— 0,28	(1)
7.	51	— 0,33	17.	89	+ 2,18	27.	113	— 1,43	
8.	57	— 0,46	18.	94	— 0,51	28.	115	+ 1,40	
9.	58	— 0,15	19.	95	— 1,03	29.	122	— 0,14	
10.	59	— 0,61	20.	97	— 1,15	30.	129	+ 1,03	
						31.	129	+ 2,81	

Diese Zahlen w zeigen allerdings eine gewisse Zunahme bei wachsendem Umfang S. Um diese Zunahme durch Seiten-Refraktion zu erklären, machte *Struve* zuerst die Annahme, dass diese Refraktion *proportional der Quadratwurzel der Sichtweite s* wirke. Wenn die seitliche Ablenkung stetig wie die Höhenablenkung wirkte, so müsste man wie bei letzterer einen Ablenkungs-Winkel proportional s selbst annehmen; da aber eine solche stetige Ablenkung längs der ganzen Sichtweite s jedenfalls nicht besteht, sondern vielmehr zahlreiche kleinere sich teils häufende, teils auch wieder aufhebende Ablenkungen wahrscheinlich sind, so ist diese *Struve*sche Annahme, proportional mit $\sqrt{s}$, an sich ganz am Platz. Aber ein Rechnungs-Versuch mit dieser Annahme gab einen inneren Widerspruch, weshalb ein Versuch in anderer Form gemacht wurde, so dass der mittlere Fehler m eines Winkels mit den Schenkel-Längen a und b so dargestellt wird:

$$m^2 = e^2 + k^2 (a^2 + b^2) \tag{2}$$

also:

$$w^2 = 3\, e^2 + 2\, k^2 (a^2 + b^2 + c^2) \tag{3}$$

Aus den in dieser Form geführten *Struve*schen Berechnungen haben wir die Formel gebildet:

$$m = \sqrt{0{,}152^2 + (0{,}0128\,S)^2} = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2} \qquad (4)$$

Dabei ist m der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung, $\mu = 0{,}152''$ der mittlere reine Theodolit-Messungsfehler und $\sigma = 0{,}0128\,S$ der Einfluss der Seiten-Refraktion.

Zur Übersicht ist hiernach berechnet:

S	μ	σ	m
0km	± 0,15″	± 0,00″	± 0,15″
20	0,15	0,26	0,30
40	0,15	0,51	0,53
60	0,15	0,77	0,78
80	0,15	1,02	1,03
100	0,15	1,28	1,29

Dr. Pfaff's Jahresreihe der Seiten-Refraktion.

Dr. *Pfaff*, Professor der Mineralogie in Erlangen, hat eine ganze durchlaufende Jahresreihe von Beobachtungen horizontaler Winkel in Hinsicht auf seitliche Strahlen-Brechung angestellt. Mitteilungen hierüber sind gemacht von *v. Bauernfeind* in den Sitzungs-Berichten der „math. phys. Kl. d. k. bayer. Akademie d. Wiss. zu München“, 1872, S. 147—162 und im Auszug in der Publ. d. königl. preuss. geod. Instituts: „der Einfluss der Lateral-Refraktion u. s. w.“ von *Fischer*, Berlin 1882.

Die Lage des Beobachtungs-Punktes und der drei Zielpunkte ist in Fig. 1. angegeben. Raiffenberg und Kalchreuth sind die Haupt-Zielpunkte in 19km und 11km Entfernung, und dazu ist noch eine *nahe* gelegene Marke in nur 283m Entfernung genommen.

Fig. 1.

Für diese drei Zielpunkte sind in der Zeit von November 1870 bis Oktober 1871 je 93 Messungen mit einem 20cm-Repetitions-Theodolit von *Ertel* gemacht; allerdings sehr ungleich verteilt, mit Lücken im Januar bis April, welche aber doch eine jährliche Periode wahrnehmen lassen. (Die Messungen wurden später nicht fortgesetzt, *Pfaff* starb etwa 1885.)

Pfaff's Beobachtungen 1870—1871.

Zeit	Raiffenberg 18 949m	Marke 283m	Kalchreuth 111 23m
November 1870	38° 8′ 33″	120° 0′ 0″	128° 55′ 26″
Dezember „	36	0	25
Januar 1871	37	0	24
Februar „	(Max.) 38	0	24
März „	36	0	23
April „	34	0	(Min.) 23
Mai „	30	0	23
Juni „	28	0	25
Juli „	(Min.) 27	0	26
August „	29	0	27
September „	32	0	(Max.) 27
Oktober „	36	0	27
Mittel	38° 8′ 33″	120° 0′ 0″	128° 55′ 25″

Wir haben die *Pfaff*schen Messungen von 1870—1871 graphisch ausgeglichen (unabhängig von den Mittelbildungen der Original-Mitteilung) und daraus vorstehende Zusammenstellung (S. 153) gebildet, in welcher angenommen ist, dass die nahe, nur 283^m entfernte Marke *unverrückt* geblieben sei, und das Azimut 120° habe.

Der Umstand, dass die beiden *fernen* Punkte *verschiedene* Jahres-Kurven geben, scheint darauf hinzudeuten, dass die Änderungen wirklich in der Atmosphäre begründet und nicht etwa durch Änderungen des Beobachtungs-Punktes und der nahe gelegenen Marke zu erklären sind. —

Geheimerat v. Bauernfeind s Beobachtungen über Seiten-Refraktion.

Aus dem Werke „Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion von *Carl Max v. Bauernfeind*, erste Mitteilung, München 1880", S. 48—65, entnehmen wir mit Bezugnahme auf Fig. 2. und 3. folgendes:

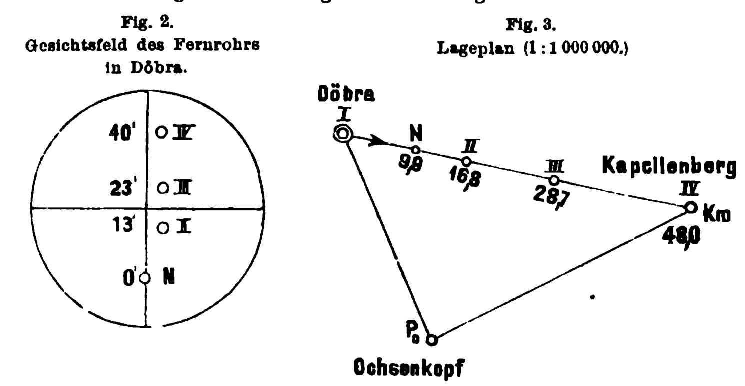


Fig. 2. Gesichtsfeld des Fernrohrs in Döbra.

Fig. 3. Lageplan (1 : 1 000 000.)

Auf dem Punkte Döbra befand sich ein *Ertel*scher Höhenkreis mit Fernrohr, fest aufgestellt, mit welchem 4 Zielpunkte *N, II, III, IV* (Fig. 3.) in nahezu gerader Linie beobachtet wurden. Diese 4 Zielpunkte erschienen gemeinsam im Gesichtsfeld des Fernrohrs, so dass die Horizontal-Winkel, stets auf den Nullpunkt *N* bezogen, durch ein Okular-Mikrometer sehr genau gemessen werden konnten. Das Gesichtsfeld des Fernrohrs mit den 4 Zielpunkten ist in Fig. 2. angedeutet, *ohne* Umkehrung, so dass der Punkt *N*, welcher der tiefste ist, unten erscheint.

Die Entfernungen und Höhen der Punkte waren:

Punkt		Entfernung	Höhen	
Döbra	*I*	0^m	795^m über *N. N.*	0^m
	N	9 921^m	..	..
	II	16 766^m	619	— 176^m
	III	28 701^m	604	— 191^m
Kapellenberg	*IV*	47 958^m	765	— 30^m

In dieser Weise wurden die Horizontalwinkel in durchlaufenden Tagesreihen, Tags mit Heliotropen, Nachts mit Lampenlicht, gemessen, im ganzen an 12 Tagen zwischen Juni und September 1877, sowie zwischen August und September 1878.

Das Ergebnis war für Seiten-Refraktion ein negatives, indem (nach Elimination einer Mikrometer-Verdrehung) keine ausserhalb der Messungs-Genauigkeit liegenden seitlichen Abweichungen sich fanden.

Doch ist dadurch nicht ausgeschlossen, dass zu anderen Zeiten als an jenen 12 Tagen sich Abweichungen zeigen würden, wie z. B. die vorerwähnten *Pfaff*schen Beobachtungen eine *Jahres*periode zeigten. Auch geht die einzige *lange* Sicht Döbra-Kapellenberg durchaus 100^m—200^m über dem Erdboden hin, weshalb wir von diesem Falle nicht weiter schliessen dürfen auf andere ungünstigere Fälle, z. B. in der norddeutschen Ebene, wo die Sichten im günstigsten Falle 20^m über dem Boden sind

Fischers Vergleichung der preussischen Triangulierungen.

Professor *Fischer* im geodätischen Institut hat im Jahre 1882 veröffentlicht: „Publikation des königl. preuss. geodätischen Instituts. Der Einfluss der Lateral-Refraktion auf das Messen von Horizontalwinkeln. Berlin 1882" (Bericht hierüber s. „Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 79—81). Es wurden von den preussischen Triangulierungs-Ausgleichungen, Gradmessung in Ostpreussen, Küsten-Vermessung u. s. w. bis zum rheinischen und hessischen Dreiecksnetz die sämtlichen Netz-Verbesserungen in der Form von *Richtungs*-Verbesserungen (mit Hilfe der *Bessel*schen Nullpunkts-Korrektionen, vgl. Band I, § 81.) dargestellt, und, in der Zahl 1434, nach der Grösse der Sichtweiten S geordnet, wie folgende Zusammenstellung zeigt, in welcher m den Mittelwert der fraglichen Richtungs-Verbesserungen in der Gruppe mit der durchschnittlichen Sichtweite S, und p die jeweilige Zahl in einer Gruppe bedeutet.

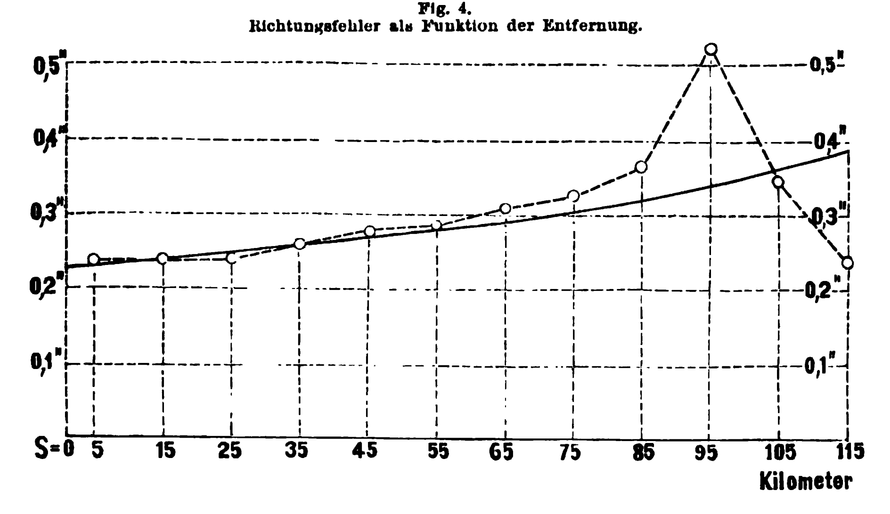
Fischers Vergleichungen.

S	p	m	S	p	m	
5^{km}	102	0,243″	65^{km}	86	0,308″	
15	198	0,238	75	54	0,322	
25	328	0,234	85	18	0,361	
35	330	0,254	95	12	0,522	
45	196	0,278	105	6	0,347	
55	100	0,281	115	4	0,238	
	1254			180		$[p]=1434$

Eine zusammenfassende Vergleichs-Berechnung ist von dem Urheber dieser wertvollen Sammlung nicht gegeben.

Wir haben zunächst diese Zahlen m und S in Fig. 4. graphisch dargestellt;

Fig. 4.
Richtungsfehler als Funktion der Entfernung.



man sieht daraus, da die Kurve jedenfalls nach oben konkav verläuft, dass eine Annahme, wie sie auch *Struve* zuerst versuchte, das Anwachsen von m in Beziehung zu $\sqrt{s}$ zu setzen, nicht durchzuführen ist.

Wir haben daher drei andere Ausgleichungs-Versuche gemacht, wobei immer die Gruppenzahlen p als Gewichte im gewöhnlichen Sinne genommen wurden:

1) $m = 0{,}208'' + 0{,}0016\ S$

2) $m = 0{,}232'' + (0{,}0415\ S)^2$

3) $m = \sqrt{0{,}237^2 + (0{,}00263\ S)^2} = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$

In Bezug auf die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler sind alle diese 3 Formen nahezu gleich; im übrigen hat die dritte Form am meisten für sich; dieselbe giebt folgendes:

S	p	μ	σ	m	m' beobachtet	$m - m' = v$
5^{km}	102	0,237″	0,013″	0,237″	0,243″	— 0,006″
15	198	0,237	0,039	0,240	0,238	+ 0,002
25	328	0,237	0,066	0,246	0,234	+ 0,012
35	330	0,237	0,092	0,254	0,254	0,000
45	196	0,237	0,118	0,265	0,278	— 0,013
55	100	0,237	0,145	0,278	0,281	— 0,003
65	86	0,237	0,171	0,292	0,308	— 0,016
75	54	0,237	0,197	0,308	0,322	— 0,014
85	18	0,237	0,224	0,326	0,361	— 0,035
95	12	0,237	0,250	0,344	0,522	— 0,178
105	6	0,237	0,276	0,364	0,347	+ 0,017
115	4	0,237	0,302	0,384	0,238	+ 0,146
	1434					

Zu Fig. 4. ist über die drei letzten Werte für 95, 105 und 115^{km}, welche zusammen nur 22 mal (oder 1,5 %) vorkommen, zu bemerken, dass dieses wohl nur *Zufalls*-Werte sind, welche das bis 85^{km} schön verlaufende Gesetz nicht stören.

Im übrigen kann man nun sagen, dass nach den 50jährigen Gesamt-Erfahrungen der preussischen Triangulierungen, weite Sichten im allgemeinen ungenauer sind als kurze. Ob der Grund hievon in eigentlicher sogen. Seiten-Refraktion liegt, oder nur darin, dass weite Sichten selten und nur undeutlich zu beobachten sind, ist für die darauf zu gründenden praktischen Folgerungen zunächst gleichgültig.

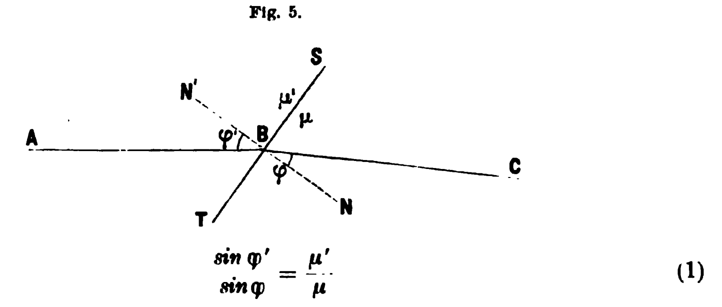
Wenn man noch überlegt, ob die grössere Netz-Unsicherheit bei langen Sichten daher rührt, dass diese Sichten selten zu erlangen waren, und deswegen mit *geringeren Anschnittszahlen* in die Ausgleichung eingingen, so müssten die älteren Richtungs-Messungen, bei welchen ein fester Plan der Messungs-Anordnung nicht vorhanden war, von den neueren Winkel-Messungen in allen Kombinationen, unterschieden werden; reduziert man aber auf gleichen Zeit- oder Arbeits-Aufwand, so kommen die langen Sichten jedenfalls in den Nachteil.

Theorie der Seiten-Refraktion.

Wir betrachten nach Andeutung von Fig. 5. S. 157 einen Lichtstrahl AB, welcher auf eine lichtbrechende Ebene $T'S$ trifft und dadurch nach BC gebrochen wird. Wenn hiebei φ' und φ die Winkel mit der Normalen $N'N$ sind, sowie μ'

und μ die absoluten Brechungs-Coëfficienten auf beiden Seiten der brechenden Ebene, so besteht bekanntlich die Gleichung:

Fig. 5.



$$\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \frac{\mu'}{\mu} \tag{1}$$

Ferner besteht zwischen dem Brechungs-Coëfficienten μ eines Gases und seiner Dichte ϱ die physikalische Gleichung:

$$\mu^2 - 1 = c\,\varrho \tag{2}$$

wobei $\mu^2 - 1$ die lichtbrechende Kraft heisst, und c eine Konstante ist. Indem man diese letzte Gleichung (2) zweifach anwendet, hat man:

$$\frac{\mu'^2}{\mu^2} = \frac{1 + c\,\varrho'}{1 + c\,\varrho} = 1 + c\,(\varrho' - \varrho) + \ldots$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = 1 + \frac{c}{2}\,(\varrho' - \varrho)$$

Dieses in Verbindung mit (1) giebt:

$$\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = 1 + \frac{c}{2}\,(\varrho' - \varrho), \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \varphi' - \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{c}{2}\,(\varrho' - \varrho) \tag{3}$$

Nun geht man zur Differential-Betrachtung über, und setzt:

$$\sin \varphi' - \sin \varphi = (\varphi' - \varphi) \cos \varphi = d\,\varphi \cos \varphi \quad \text{und} \quad \varrho' - \varrho = d\,\varrho$$

Damit wird (3):

$$\frac{d\,\varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{c}{2}\,d\,\varrho \ , \quad d\,\varphi = \frac{c}{2}\,\varrho\,\frac{d\,\varrho}{\varrho}\,\operatorname{tang} \varphi \tag{4}$$

Nun nennt man $\frac{c}{2}\,\varrho = \alpha$ die Refraktions-Konstante für die betreffende Luftdichte, und für irgend welchen Barometerstand B und Lufttemperatur t hat man:

$$\frac{c}{2}\,\varrho = \alpha = \alpha_0 \frac{B}{760} \frac{1}{1 + \varepsilon\,t} \tag{5}$$

wo $\alpha_0 = 0{,}000\,29269$ oder $= 60{,}371''$ in Winkelmass ist. (6)

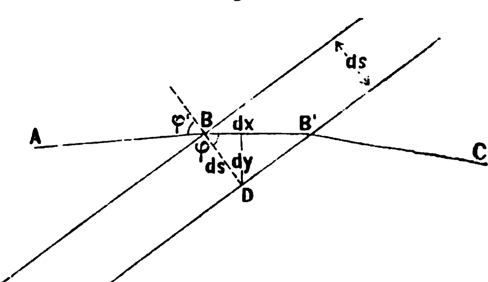
Man hat also nun:

$$d\,\varphi = \alpha\,\frac{d\,\varrho}{\varrho}\,\operatorname{tang} \varphi \tag{7}$$

Nun betrachten wir in Fig. 6. S. 158 das Durchschneiden einer Luftschichte zwischen zwei parallelen Ebenen, welche durch B und B' gehen.

Es sei $d\,s$ die Querbreite der Schichte, $d\,x$ sei die Länge $B\,B'$ des Lichtweges durch die Schichte, und $d\,y$ sei rechtwinklig zu dem Lichtwege gemessen, entsprechend dem Schichten-Abstand.

Fig. 6.



Dieses giebt nach Fig. 6.:

$$\sin\varphi = \frac{dy}{ds} \qquad \cos\varphi = \frac{ds}{dx} \tag{8}$$

also nun nach (7):

$$d\varphi = \alpha\frac{d\varrho}{\varrho}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} \quad \text{oder} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\sin\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\varrho}{dy}\sin^2\varphi \tag{9}$$

Hier ist $\frac{d\varrho}{ds}$ die Änderung der Luftdichte in Bezug auf die Querrichtung der Schichten und $\frac{d\varrho}{dy}$ giebt die Dichten-Änderung quer zur Lichtbahn.

Wenn $\varphi = 0$ ist, so wird der Ausdruck (9) jedenfalls selbst gleich Null, was auch ganz der Anschauung für einen Strahl, der rechtwinklig zur Schichtengrenze antritt, entspricht. Wenn dagegen $\varphi = 90°$ ist, so entsteht eine gewisse theoretische Unsicherheit, welche sich durch Betrachtung der mit jeder Brechung verbundenen Reflexion heben lässt.

Für unsere Zwecke sehen wir davon ab und setzen in (9), mit Annahme eines Wertes dS, welcher in B rechtwinklig zu BB' sei:

$$\frac{d\varrho}{ds}\sin\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d\varrho}{dy}\sin^2\varphi = \frac{d\varrho}{dS} \tag{10}$$

$$\text{also:} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\varrho}{dS} \tag{11}$$

Die Luftdichte ϱ ist für einen Barometerstand B und eine Temperatur t ausgedrückt durch:

$$\varrho = \varrho_0 \frac{B}{B_0}\frac{1+\varepsilon t_0}{1+\varepsilon t} \tag{12}$$

wo ϱ_0, B_0 und t_0 Anfangs-Zustände sind. Dieses giebt:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dB}{B} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon t}dt \tag{13}$$

Dieses in (11) eingesetzt giebt, mit der Näherung $1 + \varepsilon t = 1$:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{B}\frac{dB}{dS} - \alpha\varepsilon\frac{dt}{dS} \tag{14}$$

Hier kann gesetzt werden $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{R}$, wenn mit R der Krümmungs-Halbmesser

der Lichtbahn bezeichnet wird, und wenn die Länge der Lichtlinie $= x$ gesetzt wird, so hat man die Gesamtkrümmung $\Delta \varphi$:

$$\Delta \varphi = \frac{\alpha}{B} \frac{dB}{dS} x - \alpha \varepsilon \frac{dt}{dS} x \tag{15}$$

Um $\Delta \varphi$ in Sekunden zu erhalten, muss man nach (6), $\alpha = 60{,}371''$ setzen, und da weiter $\varepsilon = 0{,}003665$ ist und B rund $= 760^{mm}$ gesetzt werden kann, so giebt (15):

$$\Delta \varphi = 0{,}08 \frac{dB}{dS} x - 0{,}22 \frac{dt}{dS} x \text{ in Sekunden} \tag{16}$$

Um Zahlen einzuführen, betrachten wir zuerst den Quotienten $\frac{dB}{dS}$ in (16), welcher in der Meteorologie der „barometrische Gradient" genannt wird. Man pflegt dieses Verhältnis auf die Entfernung von 1 Grad = 15 Meilen oder rund = 111^{km} zu beziehen; d. h. wenn die Isobaren bei 1^{mm} Druckunterschied den Querabstand 111^{km} $= 111\,000^{m}$ haben, so ist nach den bisher angenommenen Masseinheiten zu setzen:

$$\frac{dB}{dS} = \frac{1}{111\,000}$$

Wenn noch die Lichtlinien-Länge $x = 10\,000^{m}$ angenommen wird, so macht das erste Glied von (16) nur $0{,}007''$.

Mehr wird das zweite Glied von (16) ausmachen, wenn lokale Ursachen die Wärmegleichheit in horizontalem Sinne stören. Nimmt man etwa $\frac{dt}{dS} = 1^{\circ}$ auf 1000^{m} und $x = 10\,000^{m}$, so giebt das zweite Glied von (16) den hohen Betrag von $2{,}2''$.

Die hier gemachten Annahmen sind im höchsten Grade unbestimmt; es kann wohl vorkommen, dass die Lufttemperatur in horizontalem Sinne sich noch viel mehr ändert als 1° auf $10\,000^{m}$, vielleicht sogar 1° auf 100^{m}, wenn z. B. Seeen und Wälder mit trockenen Landstrichen abwechseln, allein solche Störungen werden nur auf kurze Entfernungen und keinenfalls auf die ganze Länge von geodätischen Sichten vorkommen.

Trotzdem kann man unserer vorstehenden theoretischen Betrachtung etwa die Bedeutung beilegen:

Die meteorologischen Ungleichheiten in horizontalem Sinne können seitliche Refraktionen erzeugen von gleicher Grössen-Ordnung wie die Fehler der Winkel-Messungen erster Ordnung.

Anhang zu § 24. und Nachtrag zu Band II, § 128.

Die vorstehende Entwicklung der Seiten-Refraktion giebt Veranlassung, auch auf die früher in unserem II. Bande § 128. entwickelten Formeln für die Höhen-Refraktion zurückzukommen.

Wir haben inzwischen jene Formeln wesentlich kürzer entwickelt, und zugleich gefunden, dass in dem Gliede mit n ein Faktor $1 + \varepsilon t$ oder Nenner $1 - \varepsilon t$ vernachlässigt war, welcher neben den anderen Grössen gleicher Ordnung nicht zu vernachlässigen ist.

Wie inzwischen in der „Zeitschr. f. Verm. 1889", S. 176—183 gezeigt wurde, muss der allgemeine Ausdruck für k. statt (44) und (51)—(52) S. 459—460, Band II, nun so heissen:

$$k = \frac{\alpha_0}{1 - 2\,\alpha_0} \frac{B}{760} \frac{1}{(1 + \varepsilon T)^2} \frac{r}{MK} (1 - MK\varepsilon n)$$

[illegible] in Zahlen:

$$k = 0{,}2325 \frac{B}{760} \frac{1}{(1 + \varepsilon T)^2} (1 - 29{,}39\, n)$$

Dabei ist B der Barometerstand, T die Lufttemperatur und n die Abnahme der Lufttemperatur für 1^m Höhe.

Im übrigen verweisen wir auf „Zeitschr. f. Verm. 1889", S. 176—183 und S. 232—238.

§ 25. Genauigkeit der Basismessung.

Die Fehler der Basismessungen sind wesentlich zweierlei Art, erstens unregelmässige von der Handhabung der Apparate u. s. w. herrührende Fehler, welche proportional der Quadratwurzel der Länge wachsen, und zweitens regelmässige mit der gemessenen Länge selbst anwachsende Fehler, zu welchen vor allem die **Mass-Unsicherheiten** der gebrauchten Massstäbe selbst gehören.

Man wird im allgemeinen annehmen können, dass die regelmässigen Fehler im Gesamtergebnis überwiegen, indessen sind sie schwer zu bestimmen (und wahrscheinlich sind dieselben oft unterschätzt worden).

Leichter und sicherer zu bestimmen sind die unregelmässigen Fehler, mit welchen wir uns nun zuerst allein beschäftigen wollen. Man findet diese Fehler durch Messungs-Wiederholungen.

Besonders wichtig ist hiebei die Doppelmessung einer Linie in verschiedenen Teilstrecken:

Man habe hiefür folgendes:

Strecke s_1 gebe die Differenz hin und her d_1
„ s_2 „ „ „ „ d_2
. . . .
„ s_n „ „ „ „ d_n

Diese Differenzen $d_1\ d_2 \ldots d_n$ auf die Strecken-Einheit (z. B. 1^{km}) reduziert geben:

$$\frac{d_1}{\sqrt{s_1}} \quad \frac{d_2}{\sqrt{s_2}} \quad \frac{d_3}{\sqrt{s_3}} \ldots \quad \frac{d_n}{\sqrt{s_n}}$$

Daraus bildet man die mittlere Differenz:

$$D = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{d_1^2}{l_1} + \frac{d_2^2}{l_2} + \ldots \frac{d_n^2}{l_n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]}$$

oder den mittleren Fehler *einer* Messung der Längen-Einheit (1^{km}):

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{1}$$

Damit hat man auch den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen der Längen-Einheit:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{2}$$

oder den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen einer Länge L:

$$M = m' \sqrt{L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{n}\frac{[d\,d]}{s}} \tag{3}$$

Wir wollen die Hauptformel (1) auf das schon mehrfach von uns benützte klassische Beispiel der Gradmessung in Ostpreussen anwenden (vgl. Band I. S. 31).

Die Basis wurde in zwei Abschnitten je zweifach gemessen:

	Messung I	Messung II	Differenz I — II = d
s_1	441,1852^m	441,1839^m	+ 0,0013^m
s_2	1381,1571^m	1381,1632^m	— 0,0061^m
$s_1 + s_2$	1822,3423^m	1822,3471^m	— 0,0048^m

Zur weiteren Rechnung nehmen wir die Entfernungen s in Kilometern und die Differenzen d in Millimetern und haben dann:

	s	d	d^2	$\frac{d^2}{s}$
1.	0,441^{km}	+ 1,3^{mm}	1,69	3,83
2.	1,381^{km}	— 6,1^{mm}	37,21	26,94
				30,77

also $m = \sqrt{\frac{1}{4}\, 30,77} = 2,77^{mm}$ für 1^{km}. (4)

Ebenso wird verfahren, wenn statt zwei Teilstrecken s_1 und s_2 deren beliebig viele vorhanden sind.

Wenn alle Teilstrecken $s_1\ s_2 \ldots$ nahezu *gleich* sind, so braucht man die Quotienten $d : \sqrt{s}$ bzw. $d^2 : s$ nicht einzeln auszurechnen.

Als Beispiel für *gleiche* Strecken, jedoch für *drei*fache Messung aller Teilstrecken, nehmen wir die schweizerische Basismessung von Aarberg mit dem spanischen Apparat (vgl. § 14. S. 98):

Strecke	Messung I	Messung II	Messung III	Mittel
s_1	400,0370^m	400,0364^m	400,0370^m	400,0368^m
s_2	400,0390	400,0383	400,0379	400,0384
s_3	400,0383	400,0382	400,0388	400,0384
s_4	400,0570	400,0580	400,0584	400,0578
s_5	400,0352	400,0356	400,0353	400,0354
s_6	399,9045	399,9044	399,9043	399,9044
Summe	2400,1110	2400,1109	2400,1117	2400,1112

Nun bildet man die sämtlichen 18 Differenzen v zwischen den Streckenmitteln und den Einzelmessungen, mit Quersummen $[v] = 0$ zur Probe, worauf die Quadrate v^2 sich ergeben:

	v	v^2	v	v^2	v	v^2	$[v]$
1.	— 0,2^{mm}	0,04	+ 0,4^{mm}	0,16	— 0,2^{mm}	0,04	0,0^m
2.	— 0,6	0,36	+ 0,1	0,01	+ 0,5	0,25	0,0
3.	+ 0,1	0,01	+ 0,2	0,04	— 0,4	0,16	— 0,1
4.	+ 0,8	0,64	— 0,2	0,04	— 0,6	0,36	0,0
5.	+ 0,2	0,04	— 0,2	0,04	+ 0,1	0,01	+ 0,1
6.	— 0,1	0,01	0,0	0,00	+ 0,1	0,01	0,0
		1,10		0,29		0,83	2,22 = $[v\,v]$

Der mittlere Fehler einer Messung einer Strecke von rund $0{,}4^{km}$ wird hiernach:

$$m_1 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n(\sigma - 1)}} = \sqrt{\frac{2{,}22}{12}} = \pm\, 0{,}430^{mm} \tag{5}$$

Hiebei ist mit σ die Wiederholungszahl der Strecken-Messung bezeichnet, also in diesem Falle $\sigma = 3$. Weiter berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km}, da $s = 0{,}4^{km}$ ist:

$$m = m_1 \sqrt{\frac{1}{0{,}4}} = \pm\, 0{,}68^{mm} \tag{6}$$

Auch hat man den mittleren Fehler der 3fach wiederholten Messung der Gesamtlänge von $2{,}4^{km}$:

$$M = \sqrt{\frac{2{,}4}{3}}\, m = \pm\, 0{,}61^{mm} \tag{7}$$

Man wird hiernach das Gesamtergebnis schreiben:

$$L = 2400{,}1112^{m} \pm 0{,}0061^{m}$$

Wenn hier die Strecken s nicht alle gleich wären, so müsste man nicht bloss v und v^2, sondern auch alle Werte $v : \sqrt{s}$ bzw. $v^2 : s$ bilden, und dann rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n(\sigma - 1)} \left[\frac{v\,v}{s}\right]} \tag{8}$$

Sind alle s gleich, so stimmt das mit (5) und (6) überein.

Zu einem Beispiele mit *ungleichen* Wiederholungen in den einzelnen Strecken nehmen wir nochmals die Basis der Gradmessung in Ostpreussen, es ist nämlich für die erste Strecke noch eine dritte (früher bei (4) nicht benützte) Messung vorhanden, und wir haben im ganzen:

Strecke	Messung I	Messung II	Messung III	Mittel
s_1	$441{,}1835^{m}$	$441{,}1852^{m}$	$441{,}1839^{m}$	$441{,}1842^{m}$
s_2	. .	1381,1571	1381,1632	1381,1602
$s_1 + s_2$		$1822{,}3423^{m}$	$1822{,}3471^{m}$	$1822{,}3444^{m}$

	v_{mm}	$\frac{v^2}{s}$	v	$\frac{v^2}{s}$	v_{mm}	$\frac{v^2}{s}$	$\left[\frac{v\,v}{s}\right]$
$s_1 = 0{,}441^{km}$	$+\,0{,}7^{mm}$	1,10	$-\,1{,}0^{mm}$	2,27	$+\,0{,}3^{mm}$	0,20	3,57
$s_2 = 1{,}381^{km}$			+ 3,05	6,73	— 3,05	6,73	13,46
		1,10		9,00		6,93	17,03

Nun findet man den mittleren Fehler m einer Messung von 1^{km}:

$$m = \sqrt{\frac{3{,}57 + 13{,}46}{(3-1) + (2-1)}} = \sqrt{\frac{17{,}03}{3}} = \pm\, 2{,}38^{m} \quad \text{für } 1^{km}$$

Der mittlere Fehler des Schluss-Ergebnisses für die ganze Länge $s_1 + s_2$ wird:

$$M = m\sqrt{\frac{s_1}{3} + \frac{s_2}{2}} = 2{,}38\sqrt{0{,}8376} = \pm\, 2{,}18^{mm}$$

Die Vereinigung der 3 Messungen von s_1 und der 2 Messungen von s_2 giebt also zusammen:

$$s_1 + s_2 = 1822{,}3444^{m} \pm 0{,}0022^{m}$$

Nach Anleitung dieser drei Beispiele wird man alle derartigen Fälle behandeln können.

Nach diesen Formeln, welche zur Berechnung des mittleren unregelmässigen Basismessungs-Fehlers aus Messungs-Wiederholungen dienen, geben wir im Folgenden eine Reihe von Beispielen hiefür, wobei immer *m* den mittleren unregelmässigen (aus Wiederholungen berechneten) Fehler *einer* Messung von 1 Kilometer Länge, bedeutet.

1736. *Basis von Yarouqui in Peru*, 2 Messungen mit hölzernen 15 oder 20 Fuss langen Latten (*La Condamine* Mesure des trois premiers degrés dans l'hemisphère australe, Paris 1751, S. 5) „nous nous accordâmes à moins de trois pouces près sur une longueur de 6273 toises." Dieses giebt 81,21 *mm* auf 12,226 *km* doppelt gemessen, oder den mittleren Fehler für eine Messung von 1 *km*:
$m = \pm 16{,}42\ mm$.

1736. *Basis von Tornea in Lappland*, 2 Messungen mit hölzernen Latten, 7407 Toisen, Differenz 4 Zoll. (Astr. Nachr. 6. Band, 1828, S. 20.) Dieses giebt 20,152 *mm* auf 14,436 *km* oder $m = \pm 20{,}15\ mm$.

1739. *Nachmessung der Picard'schen Basis von Juvisy*, durch *Cassini* (Base du système métrique, III, S. 505), Basis von 5747 Toisen mit Eisenstangen gemessen, welche längs einer 50 Toisen langen Schnur unmittelbar aneinander gelegt wurden. Die Basis ist 5mal gemessen:

	Toisen	Fuss	Zoll	Linien	Meter
1.	5747	2′	8″	6‴	= 11201,991
2.	„	4′	0″	9‴	= 11202,431
3.	„	3′	4″	10‴	= 11202,217
4.	„	4′	5″	10‴	= 11202,569
5.	„	4′	0″	0‴	= 11202,411
				Mittel	11202,324 *m* ± 0,100 *m*

Betrachtet man alle Abweichungen als unregelmässige Fehler, so erhält man den mittleren Fehler einer Messung von 1 *km*: . . . . $m = \pm 67{,}0\ mm$

1805. *Benzenberg*s Basismessung mit hölzernen Latten für das Rheinische Kataster (vgl. § 10. S. 71)
$m = \pm 8{,}2\ mm$.

1819. *Schwerd's kleine Basis.* Zwei Messungen auf 20° R reduziert: 859,442734 *m* und 859,440943 *m* Differenz = 1,791 *mm*. (*Schwerd*, „Die kleine Speyrer Basis", S. 33.) Dieses giebt . $m = \pm 1{,}37\ mm$.

1834—1872. *Basismessungen mit dem Bessel'schen Apparate.*

Die Längen- und die Strecken-Verteilung der zahlreichen seit 1834 mit dem *Bessel*schen Apparate gemachten Basismessungen haben wir schon in § 17. S. 111 mitgeteilt, und da auch die Messungs-Differenzen bereits anderwärts, nämlich in dem Werke: „Deutsches Vermessungswesen von *Jordan-Steppes* 1882", I, S. 133 von uns zusammengestellt wurden, bilden wir hier die Tabelle der mittleren unregelmässigen Fehler *m* für je *eine* Messung von 1 Kil.:

Jahr	Länge	Basismessung	mittlerer Fehler *m*
1834	1,822 *km*	Königsberg (Gradm. in Ostpreussen) . . .	± 2,77 *mm*
1838	2,701	Kopenhagen	0,86
1846	2,336	Berlin (Küstenvermessung)	1,55
1847	2,134	Bonn	0,73
1852	2,301	Lommel (Belgien)	0,66
1853	2,489	Ostende	0,54
1854	2,763	Strehlen (Schlesien)	1,75
1871	5,875	Braak (Holstein)	1,59
1872	8,909	Grossenhain (Sachsen)	1,46

(Die Angaben für Grossenhain sind von *Nagel* veröffentlicht im „Civilingenieur" 28. Band, 1882, 1. Heft, vgl. auch *Helmert*, „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 596.)

Besonders zu erwähnen ist hier noch die *Göttinger* Basismessung, weil dieselbe in metronomischer Beziehung neu behandelt wurde, wie wir bereits auf S. 104—105 beschrieben haben.

Die Genauigkeits-Berechnung, entsprechend 4 verschiedenen metronomischen Formeln, ist von General *Schreiber* in der „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 1—17 mitgeteilt worden.

Aus den 33 Strecken-Differenzen der 5193 *m* langen Linie (eine Strecke = 157 *m*) ergab sich der mittlere Fehler *m* einer Messung von 1 *km*, unter der Annahme unregelmässiger ± gleichwahrscheinlicher Fehler so:

	Formel (vgl. S. 105)	mittl. Fehler m
I.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m$	$\pm 0{,}80\ mm$
II.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho$	0,70
III.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho + \alpha h$	0,55
IV.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho + \alpha h + \alpha^2 k$	0,57

Die Differenzen für die ganze Länge 5193 *m* (hin und her) der Göttinger Basis wurden nach diesen 4 Formeln:

I	II	III	IV
— 14,10 *mm*	— 13,04 *mm*	— 8,17 *mm*	— 7,62 *mm*

1879—1880. *Basismessung des geodätischen Instituts.*

Im Jahre 1879 wurde die alte schlesische Basis bei Strehlen, 2763 *m* lang, welche erstmals 1854 mit dem *Bessel*schen Apparat gemessen worden war, von dem geodätischen Institute mit einem *Brunner*schen Apparate (S. 93) nachgemessen. Die Linie wurde in 10 gleichen Teilen von je 276 *m* hin und her gemessen. Die Messungs-Differenzen sind in dem „Generalbericht f. d. Europ. Gradm. für 1879", S. 104 veröffentlicht; man berechnet hieraus den mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1 *km*: . . . . $m = \pm 0{,}76\ mm$.

Einiges weitere hierüber giebt auch der „Generalbericht über den Fortschritt der Arbeiten für d. Europ. Gradm. im Jahre 1880", S. 33—35.

1858. *Spanische Basismessungen.*

Spanische Basis von Madridejos, mit dem älteren *Brunner*schen Apparate (S. 92) gemessen. Das Mittelstück, 2767 *m* der 5teiligen Basis (s. o. S. 116), wurde in 12 Absätzen je zweimal gemessen („Astr. Nachr. 61. Band, 1864", S. 340). Die 11 ersten Abschnitte haben je 234 *m* Länge und die Differenzen der 11 Doppelmessungen sind: + 0,23 — 0,20 + 0,49 + 0,00 — 0,02 — 0,23 — 0,32 + 0,39 — 0,09 — 0,28 + 0,36 *mm*, das letzte Stück hat nur 194 *m* Länge und gab bei der Doppelmessung die Differenz — 0,14. Aus diesen 12 Doppelmessungen berechnet man . . $m = \pm 0{,}40\ mm$.

Über zwei kleinere, im Jahre 1860 ebenfalls mit dem älteren *Brunner*schen Apparate gemessene Grundlinien giebt der „Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1869", S. 65 die Einzelheiten der Doppelmessungen, woraus man berechnet:

Basis von Mahon,	2359 *m* in 6 Absätzen,	$m = \pm 0{,}43\ mm$
„ „ Ivice,	1665 *m* „ 4 „	$m = \pm 0{,}32\ mm$

Ausser diesen drei Linien sind bis 1879 noch 6 Grundlinien in Spanien gemessen worden, worüber Einzelheiten mitgeteilt sind in dem amtlichen Werke: „Memorias del instituto geográfico y estadístico. Tomo III. Madrid 1881, und Tomo IV, Madrid 1883. (Arcos de la Frontera III, S. 259, Lugo III, S. 337, Vich III, S. 419, Olite IV, S. 99.)

Schweizerische Basismessungen.

In den Jahren 1880—1881 wurden mit dem neuen spanischen Apparate (vgl. S. 94—98) drei Grundlinien in der Schweiz gemessen. Bei Aarberg 2400 *m*, bei Weinfelden 2540 *m* und bei Bellinzona 3200 *m*. Die erste Linie 3 mal, die beiden anderen je 2 mal.

Aus den Messungs-Differenzen berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1 *km*:

Aarberg	$m = \pm 0{,}68\ mm$
Weinfelden	$m = \pm 1{,}27\ mm$
Bellinzona	$m = \pm 0{,}89\ mm$

Weiteres hierüber giebt das amtliche Werk: „Le réseau de triangulation suisse, publié par la commission géodésique suisse, troisième volume, *la mensuration des bases* par *A. Hirsch* et *J. Dumur*. Lausanne 1888.

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstock'schen Apparat (§ 14. S. 99—102).

Nach dem Werke: „Report upon the primary triangulation of the united States Lake Survey, by *Comstock* etc. Washington 1882, S. 262, S. 290, S. 303 berechnet man aus den Messungs-Differenzen die mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1 *km*:

1877	Chicago-Base	7509 *m* in 8 Strecken	$m = \pm 1{,}12\ mm$
1878	Sandusky-Base	6227 *m* in 6 „	1,19
1879	Olney-Base	6589 *m* in 6 „	0,79

Dabei sind die auf S. 107 erwähnten Korrektionen für die Ungleichheit der Temperaturen beider Massstabteile berücksichtigt.

1881. *Californien. Yolo-Country.*

United States coast and geodetic survey, methods and results on the length of the Yolo-Base-Line. Appendix Nr. 11. Report for 1883. Washington 1884, berechnet von *Charles A. Schott*, Assistent. (vgl. auch „Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1883", Annexe III, S. 2—3.)

Die 17,5 *km* lange Linie wurde teils zweifach, teils dreifach gemessen. Aus den 18 Differenzen-Vergleichungen zwischen der ersten und zweiten Messung berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1 *km* . . . . $m = \pm 2{,}03$ *mm*

Österreichische Basismessungen.

1862. Grundlinie bei Josephsstadt, zwei Messungen, 2772,174020 und 2772,180159 Wiener Klafter, Differenz = 0,006139 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1863", S. 15). Dieses giebt 11,64 *mm* Differenz auf 5,257 *km*, oder . . . . $m = \pm 3{,}59$ *mm*

1868. Basis in Dalmatien, zwei Messungen 1305,83270 und 1305,83186 Wiener Klafter, Differenz = 0,00084 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1870", S. 28), oder 1,6 *mm* auf 2,475 *km*

$m = \pm 0{,}72$ *mm*

1863. *Schwedische Grundlinie* auf Axevella, zwei Messungen 1357,03274 Toisen und 1357,03360 T. Differenz = 0,00086 Toisen („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1863", S. 28), oder 1,68 *mm* auf 2,645 *km*

$m = \pm 0{,}73$ *mm*

1865. *Italienische Basis von Catania.* Eine Basis 3692 *m* wurde 6 mal gemessen („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1865", S. 64 und 65).

Wenn man die 6 Messungen als gleichartig behandelt, so findet man . . . . $m = \pm 1{,}96$ *mm*

Die Messungen 1. 2. 3. sind in der einen, 4. 5. 6. in der andern Richtung gemacht. Die beiden Arten zeigen eine regelmässige Differenz. Behandelt man daher die 3 ersten Messungen und die 3 letzten Messungen je für sich, so findet man die mittleren unregelmässigen Fehler für 1 *km* bzw.

für 1. 2. 3. $m = \pm 0{,}85$ *mm*
für 4. 5. 6. $m = \pm 0{,}47$ *mm*

1873. Basis von Simlak, gemessen von *Oudemans* bei der Triangulierung von Java (s. o. § 15. S. 103).

Eine Länge von 3900 *m* wurde in 20 Strecken von je rund 200 *m* doppelt gemessen, woraus sich ergiebt . . . . $m = \pm 1{,}69$ *mm*

§ 26. Geschwindigkeit der Basismessung.

Bei der Beurteilung der Leistungs-Fähigkeit eines Basis-Apparates kommt ausser der Genauigkeit auch die Geschwindigkeit in Betracht, weshalb wir hiefür eine Anzahl von Angaben gesammelt haben, die im Folgenden zusammengestellt sind. Dabei bedeutet immer v die gemessene Länge für 1 Stunde.

Schwerd mass im Jahre 1820 in 3 Tagen mit 30 Stunden seine 859^m lange Grundlinie zweimal (*Schwerd*: „Die kleine Speyrer Basis", S. 23—32). Dieses giebt für 1 Stunde . . . . $v = 57^m$

Die Württembergische Grundlinie Solitude—Ludwigsburg von 13 032^m Länge wurde in 19 Tagen einmal gemessen (*Kohler*: „Die Landes-Vermessung des Königreichs Württemberg", S. 57). Rechnet man 1 Tag durchschnittlich zu 6 Stunden, so ist . . . . $v = 114^m$

Struve fand 1840 das mittlere Fortschreiten in 1 Stunde 42 Toisen für den *Tenner*schen Apparat und 36 Toisen für seinen Apparat („Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft 1870", S. 69), dieses giebt

für den Apparat von *Tenner* . . . . $v = 82^m$
„ „ „ „ *Struve* . . . . $v = 70^m$

Basismessungen der preussischen Landes-Aufnahme mit dem Bessel schen Apparat.

Nach einer bereits früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 387 und 1883, S. 583 gemachten Zusammenstellung haben wir folgende Maximal-Leistungen in 1 Tag, wobei 1 Lage = 4 Stangen = 15,6^m^ ursprünglich als Einheit zu grunde gelegt ist:

1834	Königsberg	68,6	Lagen	= 1070^m^
1871	Braak	67	„	= 1045
1877	Oberhergheim	113	„	= 1763
1880	Göttingen	131	„	= 2044
1883	Meppen	150	„	= 2340

Dieses sind *Maximal*-Leistungen für je 1 Tag; was die *mittlere* Geschwindigkeit für 1 Stunde betrifft, so war dieselbe in Königsberg nach S. 47 „der Gradm. in Ostpreussen" 8 Lagen = 125^m^ in 1 Stunde. Teils durch die Vervollkommnungen des Apparates, teils durch die Übung steigerte sich die Geschwindigkeit so sehr, dass bei Göttingen auf 1 Lage etwa 5 Minuten, bei Meppen nur noch etwa 3 Minuten auf 1 Lage kamen.

Hiernach haben wir folgende Geschwindigkeiten in 1 Stunde:

Königsberg . . . . $v = 125^m$
Göttingen . . . . $v = 187^m$
Meppen . . . . $v = 300^m$

Sächsische Basismessung bei Grossenhain.

Diese Basis ist ebenfalls mit dem *Bessel*schen Apparate gemacht.

Nach der Mitteilung „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 600 erforderte die 8 909^m^ lange Linie folgende Zeiten:

Hinmessung	13 Tage	= 118,5 Stunden,	also 75 Meter	in 1 Stunde
Rückmessung	12 „	= 88,0 „	„ 101 „	„ „ „

Im Mittel hat man 206,5 Stunden für 17818^m^ oder die mittlere Geschwindigkeit in 1 Stunde: . . . . $v = 86^m$

Basismessungen des geodätischen Instituts.

Mit einem *Brunner*schen Apparat, ähnlich dem ersten spanischen Apparate, wurden die zwei Grundlinien bei Strehlen (2763^m^) und bei Berlin (2336^m^) in den Jahren 1879—1880 gemessen. Nach Mitteilung von Professor *Fischer* wurden zu Anfang stündlich 5 Stangenlagen (= 20^m^) gemacht; nachdem aber das Personal eingeübt war, kamen bei der Strehlener Basis auf 1 Stunde durchschnittlich 7—8 Lagen, und bei der Rückmessung 10 Lagen. Bei der Berliner Basis wurden bei etwa 3stündiger Arbeitszeit Vormittags und 3stündiger Nachmittags zusammen 60 Lagen = 240^m^ gemessen.

Hiernach ist die Geschwindigkeit für 1 Stunde anzunehmen: . . . $v = 40^m$

Bei einer späteren Messung würde sich die Zahl der Stangenlagen in einem Tage vermehren lassen, weil nach den Erfahrungen bei der Strehlener und Berliner Basismessung sich Vereinfachungen des Messungsmodus erzielen lassen.

Spanische Basismessungen mit dem Brunner schen Apparat.

Der erste *Brunner*sche Apparat, mit welchem die Basis von Madridejos gemessen wurde, hatte eine sehr geringe Geschwindigkeit. *Koppe* schreibt hierüber in der Abhandlung „der Basisapparat des General *Ibanez* und die Aarberger Basismessung" S. 2:

Die erste spanische Basismessung, 14 663^m^, dauerte vom 22. Mai bis zum 7. September 1858. Sie erforderte 78 Arbeitstage, also 5,3 Tage für 1 Kilometer. Rechnet man 1 Tag = 6 Stunden, so erhält man für 1 Stunde . . . . $v = 31^m$

In dem Werke: „Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases u. s. w. traduit par *Laussedat*, Paris 1860", S. 210 ist angegeben, dass die Geschwindigkeit 2 Minuten für 1 Meter war, oder für 1 Stunde . . . . $v = 30^m$

Bei den zwei kleinen spanischen Grundlinien von Mahon und Ivice auf den balearischen Inseln war nach dem „Generalbericht der Europ. Gradm. für 1869", S. 65 die Messungs-Geschwindigkeit in 1 Stunde: . . . . $v = 120^m$

Schweizerische Basismessungen.

1880—1881 die Grundlinien bei Aarberg, Weinfelden und Bellinzona (vgl. S. 94 bis 98). Die Zeitverhältnisse sind sehr genau angegeben, man findet die Geschwindigkeit in 1 Stunde:

Aarberg . . . . $v = 142^m$
Weinfelden . . . . $v = 114^m$
Bellinzona . . . . $v = 144^m$

Ausserdem sind auch die *Kosten* angegeben (S. 86 der amtl. Veröffentlichung), nämlich für alle drei Linien 37 600 Fr. oder 4 600 Fr. für 1 Kilometer.

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstockschen Apparat (vgl. S. 99—102).

„Report upon the primary triangulation" etc. S. 262, S. 290, S. 300 giebt:

1877 Chicago-Base. Die mittlere Messung in 1 Tag war 292^m, die grösste Leistung in 1 Tag 500^m,

1878 Sandusky-Base. Der Durchschnitt für 1 Tag bei der Hinmessung war 88 Röhren $= 352^m$, bei der Rückmessung 100 Röhren $= 400^m$,

1879 Olney-Base. Die mittlere Röhrenzahl in 1 Tag war $105 = 420^m$, die grösste Zahl an 1 Tag war 168 Röhren $= 672^m$. Gemessen wurde an 32 Tagen.

Die Tagesleistung wächst mit den Übungsjahren. Nehmen wir zum Schlusse 1 Tag = 6 Stunden $= 420^m$, so wird für 1 Stunde: . . . . $v = 70^m$

§ 27. Mittlere Winkelfehler der Triangulierungen.

Um die verschiedenen Begriffe und Berechnungsarten des mittleren Winkelfehlers bei Triangulierungen zu entwickeln, beginnen wir mit dem einfachsten Fall:

Wenn in einem Dreieck alle drei Winkel α, β, γ gleich genau gemessen sind, und in ihrer Summe einen Widerspruch geben:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = w \quad \text{bzw.} \quad \alpha + \beta + \gamma - (180^\circ + \varepsilon) = w \tag{1}$$

so hat man bekanntlich den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels α, β oder γ zu berechnen:

$$m = \frac{w}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

(Diesen einfachen für sich verständlichen Fall haben wir früher auch nach dem Grundsatze des arithmetischen Mittels dargestellt in unserem I. Bande, S. 27.)

Hat man mehrere unabhängige Dreiecke dieser Art, in der Anzahl p, etwa in einer Kette (ohne Seitengleichungen), so bekommt man entsprechend:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3p}} \tag{3}$$

Wenn Dreiecke nicht nur kettenartig zusammenhängen, sondern auch Vierecke mit Diagonalen bilden, so ist die Fehler-Berechnung aus den Dreiecksschlüssen nicht mehr so einfach. Sieht man zunächst davon ab, dass dann auch Seitengleichungen auftreten, und will man sich nur an die bequem verfügbaren Dreiecksschlüsse halten, so hat man in einem Vierecke deren vier. Sind dieselben w_1, w_2, w_3, w_4 (wobei diese allerdings nicht unabhängig sind), so rechnet man nach § 23. S. 144 hieraus:

$$m^2 = \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{12} \tag{4}$$

Jedoch darf man diesen Wert nicht als aus 4 Dreiecken, sondern nur als aus

3 Dreiecken gezogen, mit anderen Elementen zusammen nehmen. Wenn also z. B. 6 Werte w vorliegen:

$$w_0, \; (w_1, \; w_2, \; w_3, \; w_4), \; w_5$$

wobei w_0 und w_5 selbständig aus je *einem* Dreieck, dagegen w_1, w_2, w_3, w_4 zusammen aus einem Viereck mit 2 Diagonalen erhalten sind, so rechnet man:

$$m^2 = \frac{w_0^2 + \frac{3}{4}(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) + w_5^2}{1 + 3 + 1} \tag{5}$$

Wenn man nur diejenigen Widersprüche w benützt, welche in *Gesamt*-Netzausgleichungen als Absolutglieder der Dreiecks-Summengleichungen verfügbar sind, so giebt man in jedem Viereck eine Probe w verloren; rechnet man trotzdem aus Bequemlichkeit nur mit denjenigen w, welche als unabhängig in die Ausgleichung eingehen, so wird die Bestimmung von m erheblich weniger zuverlässig, zumal möglicherweise willkürliche Auswahl der Werte w im Viereck stattgefunden hat.

Bei der internationalen Erdmessung hat sich das Bedürfnis einer einfachen Formel zur Berechnung des mittleren Winkelfehlers von Triangulierungen ergeben, und es wurde auf der 1887er Konferenz der permanenten Kommission in Nizza (Verhandlungen hierüber S. 54) der Beschluss gefasst, dass für jedes System von Dreiecken ein Zahlenwert m nach der vorstehenden Formel (3) zu berechnen sei, welcher als Näherungswert für die Winkelmess-Genauigkeit gelten soll, ohne dass dadurch schärferen Genauigkeits-Berechnungen vorgegriffen werden soll. Um diese Bestimmung von m von jeder Willkür unabhängig zu machen, bestimmte man, dass *alle* Dreiecke eines Netzes zugezogen werden sollen, z. B. in einem Viereck nicht nur drei unabhängige Werte w, sondern alle vier, wie schon oben bei (4) besprochen wurde.

Nach dieser rohen Überschlags-Berechnung gehen wir zu schärferen Genauigkeits-Berechnungen über:

Wenn man gleichartige Winkelmessungen in einem Netze mit beliebigem Zusammenhang, also auch mit Seitengleichungen, zusammen ausgleicht, so berechnet man aus der Quadratsumme $[v\,v]$ der sämtlichen Winkel-Verbesserungen, bei r Bedingungs-Gleichungen den mittleren Winkelfehler:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \tag{6}$$

Damit bekommt man den mittleren Fehler eines Winkels von der Art, wie sie in die Netz-Ausgleichung eingehen; wenn jedoch in der Netz-Ausgleichung auch *Stationsproben* enthalten waren, dann ist der vorstehende Wert (6) nicht unmittelbar vergleichbar mit den früheren Werten (3) und (2), oder mit den nachher noch zu betrachtenden mittleren Fehlern; und wir wollen deshalb denjenigen mittleren Fehler zu bestimmen suchen, welchen man erhalten haben würde, wenn man zuerst alle Stationsproben zu Stations-Ausgleichungen benützt hätte, und dann erst mit den auf den Stationen ausgeglichenen Winkeln in die Netz-Ausgleichung eingegangen wäre. Allerdings strenge können wir dieses nicht durchführen; da es sich aber in solchen Fällen meist nur um sehr *wenige* Stations-Bedingungen handelt, deren Anzahl $= s$ sei, bei einer Anzahl n von Winkeln, so wollen wir annehmen, durch Konzentration der n Winkel auf $n - s$ unbedingt nötige Winkel werde die Genauigkeit im Verhältnis $\sqrt{n} : \sqrt{n - s}$ gesteigert, und wir nehmen deshalb in solchem Falle:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}}\sqrt{\frac{n-s}{n}} \tag{7}$$

Ein gutes Beispiel hiefür ist unser badisches Netz in unserem I. Bande S. 195. Es handelt sich um 27 einzelne gemessene Winkel, welche aber um Speyer und Oggersheim je eine Horizont-Summenprobe im Netze zu erfüllen haben. Da der mittlere Fehler der Ausgleichung an und für sich $= \pm 1{,}31''$ war (I. Band, S. 204), so rechnen wir nun den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels nach (7):

$$m = 1{,}31\sqrt{\frac{25}{27}} = \pm 1{,}26'' \tag{8}$$

Sind Winkelmessungen *verschiedener* Genauigkeit zusammen ausgeglichen, so giebt die Ausgleichung den mittleren Fehler m_1 eines Winkels vom Gewichte 1 bei r Bedingungs-Gleichungen:

$$m_1 = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{r}} \tag{9}$$

Bei n Winkeln kann man zunächst daran denken, das *durchschnittliche* Gewicht eines gemessenen Winkels zu berechnen:

$$P = \frac{p_1 + p_2 + \ldots p_n}{n} = \frac{[p]}{n} \tag{10}$$

Indessen ist dieses nicht dem Prinzip der Fehlerquadrate entsprechend, da ein Gewicht immer *umgekehrt* proportional einem mittleren Fehlerquadrat ist; man hat vielmehr ein *mittleres* Gewicht so zu berechnen:

$$\frac{1}{P} = \frac{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots \frac{1}{p_n}}{n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}\right] \tag{11}$$

Nimmt man dieses zu (9), so bekommt man den mittleren Fehler eines Winkels von mittlerem Stationsgewicht:

$$m = \frac{m_1}{\sqrt{P}} = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{P\,r}} \tag{12}$$

Zu einem Beispiele wollen wir unsere frühere Ausgleichung des *Schwerd*schen Basisnetzes nehmen (Band I, S. 208 und S. 211). Das durchschnittliche Gewicht nach (10) ist $= 48$, und das mittlere Gewicht nach (11) wird $= 23$, also erheblich von dem vorigen verschieden. Der mittlere Gewichtseinheits-Fehler ist $m_1 = \pm 4{,}77''$, also nun der mittlere Fehler für mittleres Gewicht auf der Station:

$$m = \frac{4{,}77}{\sqrt{23}} = \pm 0{,}99'' \tag{13}$$

Hier wäre noch, weil unter 9 Winkeln eine Stationsprobe bestand, nach (7) zu reduzieren:

$$m = 0{,}99\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm 0{,}93'' \tag{14}$$

Doch sind Reduktionen dieser Art, so bald sie erheblich werden, nach der nachher zu entwickelnden genaueren Theorie von (24) – (27) zu behandeln.

Hat man eine Triangulierung nach *Richtungen* ausgeglichen, wie z. B. das badische Viereck in Band I, S. 216, oder das Hannoversche Stadt-Netz in Band II, S. 228, so giebt die Ausgleichung einen mittleren Richtungs-Fehler r, welchem ein mittlerer Winkelfehler m entspricht nach der Gleichung:

$$m = r\sqrt{2} \tag{15}$$

Hat man dabei auf der Station ungleiche Gewichte, so ist nach (11) und (12) zu reduzieren. Dagegen Reduktionen nach der zweifelhaften Näherung (7) kommen bei Richtungs-Ausgleichungen nicht vor, da von jeder Station gerade so viel Richtungen ins Netz eingehen, als die Station Strahlen hat.

Es ist auch zu (15) zu bemerken, dass es überhaupt zweckmässiger wäre, bei allen in Frage stehenden Genauigkeits-Betrachtungen den mittleren *Richtungs*fehler r und nicht den mittleren *Winkel*fehler m als Einheit zu Grunde zu legen; indessen da man jederzeit die beiden Fehler nach (15) gegenseitig reduzieren kann, haben wir dem Herkömmlichen folgend, den mittleren *Winkel*fehler an die Spitze gestellt.

Wir gehen über zu dem sehr häufigen Falle der Ausgleichung nach *Bessels* Methode (Band I, § 54., § 78. und § 79.) Die hier auftretenden Verbesserungen (1) (2) (3)... sind *Winkel*-Verbesserungen im Netz, und wenn man von Gewichts-Unterscheidungen absieht, so bekommt man bei r Bedingungsgleichen den mittleren Winkelfehler geradezu:

$$m \quad \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots (n)^2}{r}} \tag{16}$$

Wenn die *Bessel*schen Nullpunkts-Korrektionen z berechnet sind, so kann man daraus zuerst einen mittleren Richtungs-Fehler und dann wieder durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$ einen mittleren Winkelfehler berechnen, nach der Formel:

$$m = \sqrt{2\,\frac{z^2 + (1')^2 + (2')^2 + \ldots}{r}} \tag{17}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} (1') &= z + (1) \\ (2') &= z + (2) \text{ u. s. w.} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Für die einzelne Station ist hiebei:

$$-z = \frac{[p'](1) + p''(2) + p'''(3)}{[p^\circ] + [p'] + [p''] + [p''']} \tag{19}$$

wo $[p^\circ]$, $[p']$, $[p'']$, $[p''']$ die Anschnitts-Zahlen der einzelnen Strahlen sind.

Da diese ganze Berechnung mit z eine willkürliche Verteilungsart ist, kann man statt (19) auch kürzer so rechnen:

$$-z = \frac{(1) + (2) + (3) + \ldots (s-1)}{s} \tag{20}$$

wo s die Zahl der Strahlen für die fragliche Station ist, d. h. man stimmt nach (20) und (18) die $s-1$ Winkel-Korrektionen auf s Richtungs-Korrektionen mit der Summe Null ab.

(Dieses Verfahren ist angewendet in dem „Schweizerischen Dreiecksnetz, II. Band, Zürich 1885“, S. 39.)

Wenn man die Wahl hat, nach (16) oder (17) zu rechnen, so ist die Richtungsform (17) vorzuziehen, weil dabei keine Richtung im Vergleich mit irgend einer anderen bevorzugt oder benachteiligt wird.

Näherungs-Berechnungen mit dem durchschnittlichen Fehler.

In allen bisherigen Formeln treten *Quadrat*-Summen auf, welche für den vorliegenden Zweck auszurechnen sind. Obgleich dieses keine ins Gewicht fallende Arbeit ist, fühlt man doch manchmal bei überschläglichen Berechnungen, kritischen Vergleichungen u. s. w. das Bedürfnis, rasch einen mittleren Fehler zu bilden, indem man nur die absolute Summe $[\pm \delta]$ irgend welcher Fehler-Elemente δ benützt. Da wir die hiezu nötigen Theorien bereits früher in Band I, § 91. behandelt haben, bilden wir hier sofort die Anwendungen:

Wenn p einzelne Dreiecke vorliegen und die Summe $[\pm w]$ ihrer ohne Rücksicht auf das Vorzeichen zusammengenommenen Widersprüche, so hat man den mittleren Winkelfehler:

$$m = 1{,}2533 \frac{[\pm w]}{p\sqrt{3}} \tag{21}$$

Für *Bessel*sche Ausgleichung und Winkel-Verbesserungen (1) (2) ... hat man mit absoluter Summierung (1) + (2) + ...:

$$m = 1{,}2533 \frac{(1) + (2) + (3) + \ldots (n)}{\sqrt{n\,r}} \tag{22}$$

Wenn man die *Bessel*schen Winkel-Korrektionen (1) (2) (3) ... zuvor mittelst Nullpunkts-Korrektionen z auf *Richtungen* reduziert, so hat man damit, wenn n' die Gliederzahl im Zähler ist, den mittleren Winkelfehler:

$$m = 1{,}2533\sqrt{2}\, \frac{(0') + (1') + (2') + \ldots}{\sqrt{n'\,r}} \tag{23}$$

Mittleres Gewicht eines Winkels auf der Station.

Fig. 1.

Zu einer strengeren Bestimmung des mittleren Winkelfehlers mit Rücksicht auf die Stations-Ausgleichungen gelangt man, wenn man die Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s. w. dieser Ausgleichungen benützt. Wir thun dieses nach dem Vorgang des „Schweizerischen Dreiecksnetzes, II. Band, Zürich 1885“, S. 38 und des „Märkisch-Thüringischen Netzes des geodätischen Instituts, Berlin 1889“, S. 63—64.

Bezeichnet Fig. 1. eine Station, deren Nullstrahl nicht zum Netze gehört, dann haben die Winkel zwischen den übrigen Strahlen folgende Gewichts-Reciproken:

$$\begin{aligned}
(1,2) &= [\alpha\alpha] - 2[\alpha\beta] + [\beta\beta] & \qquad (2,3) &= [\beta\beta] - 2[\beta\gamma] + [\gamma\gamma] \\
(1,3) &= [\alpha\alpha] - 2[\alpha\gamma] + [\gamma\gamma] & \qquad (2,4) &= [\beta\beta] - 2[\beta\delta] + [\delta\delta] \\
(1,4) &= [\alpha\alpha] - 2[\alpha\delta] + [\delta\delta] & \qquad (2,1) &= [\beta\beta] - 2[\beta\alpha] + [\alpha\alpha] \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Denkt man sich alle diese Werte angeschrieben und addiert, so findet man mit Rücksicht darauf, dass $[\alpha\beta] = [\beta\alpha]$ u. s. w. ist, allgemein für s Strahlen 1. 2. 3. 4. die Summe:

$$(2s-2)([\alpha\alpha] + [\beta\beta] + [\gamma\gamma]) - 4([\alpha\beta] + [\alpha\gamma] + [\alpha\delta] + [\beta\gamma] + [\beta\delta] + [\gamma\delta]) \tag{24}$$

kürzer bezeichnet $=$

$$2(s-1)[A\,A] - 4[A\,B] \tag{25}$$

Da $\frac{s(s-1)}{2}$ Winkel zwischen s Strahlen möglich sind, und hiebei jeder Winkel zweimal auftritt, bekommt man den Mittelwert für einen Winkel dieser Station:

$$m^2 = \frac{\mu^2}{s}\left(2\,[A\,A] - 4\,\frac{[A\,B]}{s-1}\right) \tag{26}$$

Dabei ist die Bedeutung der Zeichen $[A\,A]$ und $[A\,B]$ durch Vergleichung von (24) und (25) bestimmt, und in (26) ist μ der Gewichtseinheits-Fehler. Denkt man sich diesen Ausdruck (26) auch für die übrigen Stationen berechnet, so bekommt man daraus nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels der Fehlerquadrate, den Gesamt Mittelwert:

$$\frac{m^2}{\mu^2} = 2\,\frac{\left([A_1\,A_1] - \frac{2}{s_1-1}[A\,B]\right) + \left([A_2\,A_2] - \frac{2}{s_2-1}[A_2\,B_2]\right) + \ldots}{s_1 + s_2 + \ldots} = \frac{1}{P} \tag{27}$$

Diese Formel gilt zunächst für den Fall von Fig. 1., wo der Nullstrahl nicht zum Netz gehört. Wenn der Nullstrahl selbst zum Netz gehört, so gilt die Formel (27) immer noch, jedoch muss dann der Nullstrahl in der Zahl s mitgezählt werden. Man findet dieses, wenn man die ganze Betrachtung für diesen Fall wiederholt.

Der durch (27) bestimmte Wert P ist das gesuchte mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels.

Um die Bedeutung dieser Formeln deutlich zu machen, nehmen wir von unserem Band I, § 79. die Vierecks-Ausgleichung der Gradmessung in Ostpreussen, und haben von S. 240 oder aus der Tabelle von S. 244 daselbst:

	$[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$ u. s. w.	$[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ u. s. w.	
Nidden	+ 0,0611	0,0175	$s_1 = 3$
„	+ 0,0764		
Lattenwalde	+ 0,1431	0,0745	$s_2 = 3$
„	+ 0,0805		
Kalleninken	+ 0,1667	0,0833	$s_3 = 3$
„	+ 0,1667	0,1753	
Gilge	+ 0,3333	0.	$s_4 = 1$
	1,0278		10

$$\frac{1}{P} = 2\,\frac{1{,}0278 - 0{,}1753}{10} = 0{,}17050$$

Als mittleren Gewichtseinheits-Fehler nehmen wir nach (6) S. 247, Band I, den Wert m_2 aus der *Netz*-Ausgleichung, nämlich $\pm 4{,}88''$, es ist also nun der mittlere Fehler für mittleres Stationsgewicht:

$$m = 4{,}88\,\sqrt{0{,}1705} = \pm 2{,}02''.$$

Bei einer grossen Zahl von Stationen und Richtungen wird diese Rechnung wohl meist nahe dasselbe geben, wie eine der früher erwähnten genäherten Mittelbildungen (16), (17) oder der zu (20) gehörigen.

Es sind hier auch die drei Formeln für den Gewichtseinheits-Fehler vorzuführen, welche wir früher in Band I, S. 122—123 und S. 127—130 kennen gelernt haben, nämlich mit kurzen Bezeichnungen:

Stationen $$\mu_1 = \sqrt{\frac{[v' v']}{n'}} \tag{28}$$

Netz $$\mu_2 = \sqrt{\frac{[v'' v'']}{r}} \tag{29}$$

Gesamt-Ausgleichung $$\mu = \sqrt{\frac{[v' v'] + [v'' v'']}{n' + r}} \tag{30}$$

Das Verhältnis $\mu_2 : \mu_1$ giebt für eine Triangulierung Aufschluss darüber, ob, und in welchem Mass, die Netz-Ausgleichung Fehler-Einflüsse zu Tage gefördert hat, welche auf den Stationen verborgen blieben.

Die *Netz*-Ausgleichung ist massgebend, und unser im bisherigen behandelter mittlerer Winkelfehler m bezieht sich nur auf Netz-Ausgleichung. Hat man Genauigkeits-Berechnungen, welche sich bei einer Triangulierung auf μ_1 oder μ beziehen, so kann man sie, wenn alle drei Werte μ_1, μ_2, μ bekannt sind, dadurch verhältnismässig auf μ_2 reduzieren.

Mittlerer Fehler des mittleren Fehlers.

Wenn man einen mittleren Fehler irgend welcher Art bestimmt hat, so kann man auch noch die Frage nach der Zuverlässigkeit dieser Bestimmung aufwerfen, denn es ist z. B. ein mittlerer Winkelfehler aus *einem* Dreieck offenbar viel unsicherer bestimmt, als aus einer grossen Triangulierung mit hunderten von Dreiecken.

Gerade bei solchen mittleren Winkelfehlern der Triangulierungen, wenn Vergleichungen und kritische Schlüsse darauf gegründet werden sollen, ist die Frage nach dem mittleren Fehler eines irgend wie bestimmten mittleren Fehlers nicht nebensächlich.

Wir haben diese Frage für *wahre* Beobachtungs-Fehler Δ bereits früher in Band I, § 93. nach der *Gauss*schen Abhandlung: „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" behandelt, und dabei meist *wahrscheinliche* Fehler betrachtet. Indem wir nun das Zeichen m für mittlere Fehler in dem Sinne eines Funktions-Zeichens benützen (vgl. die Anmerkung S. 120), können wir die in Band I, S. 279 stehende Gleichung so schreiben:

$$m(m^2) = \frac{m^2}{\sqrt{n-1}}\sqrt{2} \tag{31}$$

Diese Gleichung bedarf aber insofern einer Berichtigung, als sie für *wahre* Beobachtungs-Fehler Δ, welche dort angenommen sind, heissen muss:

$$m(m^2) = \frac{m^2}{\sqrt{n}}\sqrt{2} \tag{32}$$

und es ist überall von (4) S. 278, Band I an, $n - 1$ durch n zu ersetzen. Wenn *wahre* Fehler Δ und nicht nur Ausgleichungs-Fehler v vorliegen, so handelt es sich um mittlere Fehler der mittleren Fehler nur insofern, als nicht unendlich viele Werte Δ, sondern nur eine endliche Zahl n derselben vorhanden ist und in diesem praktisch allerdings kaum auftretenden Falle wahrer Fehler Δ gilt die Gleichung (32).

Wenn man an die weitere Frage herantritt, wie der mittlere Fehler eines mittleren Fehlers wächst, wenn nicht *wahre* Fehler Δ, sondern nur gewisse Werte v als übrigbleibende Fehler einer Ausgleichung mit mehr oder weniger Unbekannten vorliegen, so reicht die frühere Theorie von Band I, § 93. nicht aus.

Gauss hat die allgemeinere Aufgabe mit n Unbekannten bei n Beobachtungen in Art. 39. der „Theoria combinationis" gelöst, und wir wollen hievon hier zunächst den Fall $n = 1$, d. h. das arithmetische Mittel aus n Beobachtungen, nehmen:

Beim arithmetischen Mittel hat man nach Band I, S. 16 und S. 67:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-1} = \frac{[\Delta\,\Delta] - \frac{[a\,\Delta]^2}{[a\,a]}}{n-1}$$

Wenn m als Funktions-Zeichen in dem Sinne der Anmerkung S. 120 genommen wird, so ist:

$$(m\,(m^2))^2 = \text{Mittelwert von} \left(\frac{[\Delta^2] \quad \frac{[a\,\Delta]^2}{[a\,a]}}{n-1} - m^2\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 \left([\Delta^2] - \frac{[a\,\Delta]^2}{[a\,a]} - (n-1)\,m^2\right)^2 \qquad (33)$$

Die Klammer giebt:

$$(\ldots)^2 = [\Delta^2]^2 + \frac{[a\,\Delta]^4}{[a\,a]^2} + (n-1)^2\,m^4 - 2\,[\Delta^2]\,\frac{[a\,\Delta]^2}{[a\,a]}$$
$$- 2\,[\Delta^2]\,(n-1)\,m^2 + 2\,\frac{[a\,\Delta]^2}{[a\,a]}\,(n-1)\,m^2 \qquad (34)$$

Hier sind von allen Gliedern die Mittelwerte zu suchen:

$$[\Delta^2]^2 = (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^2 = [\Delta^4] + 2\,(\Delta_1^2\,\Delta_2^2 + \Delta_1^2\,\Delta_3^2 + \ldots)$$

Nun haben wir nach Band I, S. 277 und S. 271:

$$\frac{[\Delta^4]}{n} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{h^4} = \frac{3}{4}\,(4\,m^4) = 3\,m^4$$

$$(\Delta_1^2\,\Delta_2^2 + \Delta_1^2\,\Delta_3^2 + \ldots) \text{ giebt im Mittel } n\,\frac{n-1}{2}\,m^4$$

$$\text{also} \quad [\Delta^2]^2 = 3\,n\,m^4 + n\,(n-1)\,m^4 = (2\,n + n^2)\,m^4 \qquad (35)$$

Das zweite Glied in (34) giebt:

$$\frac{[a\,\Delta]^4}{[a\,a]^2} = \frac{(a_1\,\Delta_1 + a_2\,\Delta_2 + \ldots)^4}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots} = \frac{(a_1^4\,\Delta_1^4 + a_2^4\,\Delta_2^4 + \ldots) + 6\,(a_1^2 a_2^2\,\Delta_1^2\,\Delta_2^2 + \ldots}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots}$$

$$\text{Mittelwert} = \frac{[a^4]\,3\,m^4 + 6\,[a^2]\,m^4}{[a^4] + 2\,[a^2]} = 3\,m^4$$

In ähnlicher Weise bestimmt man auch die übrigen Mittelwerte des Ausdrucks (34) und bekommt dann für denselben:

$$(\ldots)^2 = m^4\,((2\,n + n^2) + 3 + (n-1)^2 - 2\,(2+n) - 2\,n\,(n-1) + 2\,(n-1))$$
$$= m^4\,(2\,n - 2)$$

Dieses ist der Klammer-Ausdruck von (33), man kann also nun nach (33) das Ergebnis bilden:

$$(m\,(m^2))^2 = \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 (2\,n-2)\,m^4 = \frac{2}{n-1}\,m^4$$

$$m\,(m^2) = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,m^2$$

Man kann also nun m^2 mit seinem eigenen mittleren Fehler so schreiben:

$$m^2 = m^2 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\, m^2 = m^2\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$$

$$m = m\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}} = m\left(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$$

$$m = m\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-1)}}\right) = m \pm m\sqrt{\frac{1}{2\,(n-1)}} \tag{36}$$

Dieses giebt den mittleren Fehler des mittleren Fehlers m bei n Beobachtungen für *eine* Unbekannte, und die Ausdehnung dieser Untersuchung auf mehrere Unbekannte (in dem oben zitierten Art. 39. der „theoria combinationis"), giebt für n Beobachtungen und u Unbekannte:

$$m = m\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-u)}}\right) \tag{37}$$

Dieses lässt sich auch für bedingte Beobachtungen übertragen, z. B. Triangulierung mit r Bedingungs-Gleichungen giebt, weil hier $n - u = r$ ist:

$$m = m\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,r}}\right) \tag{88}$$

Nehmen wir als Beispiel wieder das badische Netz von Band I, § 70.—71., so ist der mittlere Fehler an sich $m = 1{,}31''$; und da die Ausgleichung $r = 13$ Bedingungs-Gleichungen enthielt, hat man nun:

$$m = 1{,}31''\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{26}}\right) = 1{,}31''\,(1 \pm 0{,}196) = 1{,}31'' \pm 0{,}26''$$

d. h. der mittlere Fehler 1,31" ist mit einem mittleren Fehler von rund 0,2 oder 20% seines eigenen Wertes bestimmt, oder absolut mit einem mittleren Fehler von 0,26".

Genauigkeits-Angaben verschiedener Triangulierungen.

Wir haben zahlreiche Genauigkeits-Angaben von Triangulierungen gesammelt und in Verbindung mit manchen anderen historischen, litterarischen und sonstigen Notizen im Folgenden zusammengestellt. (vgl. hiezu auch die Einleitung S. 12—14.)

Ohne Zweifel ist die Zuverlässigkeit von Genauigkeits-Angaben verschiedener geodätischer Werke, aus denen wir geschöpft haben, eine sehr ungleiche; und welcher Gebrauch zur absoluten Beurteilung von Genauigkeiten oder zur Vergleichung, von den nachstehenden Angaben zu machen ist, müssen wir dem Leser überlassen. —

Unter m ist stets der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels, aus *Netz*-Widersprüchen berechnet, verstanden.

Triangulierung der Niederlande, ausgeführt von *Willebrord Snel van Roien* (latinisiert *Snellius*) um 1615.

Zu dem Basisnetze und den Hauptverhältnissen der niederländischen Triangulierung, welche wir bereits in der Einleitung S. 4—5 mitgeteilt haben, ist nun hinzuzufügen, dass inzwischen eine wertvolle historische Abhandlung erschienen ist in der „Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, onder redactie van *I. Boer*, Hz. te Utrecht, Jaargang V, 1889, 1e Aflevering": Overzicht van de graadmetingen in Nederland (met plaat) door Dr. *J. D. van der Plaats*, und: Graadmeting, Geschiedkundig overzicht door *G. B. H. de Balbian*. Diese zweite wertvolle Abhandlung haben wir zugleich zu unserem Litteratur-Verzeichnisse, Einleitung S. 16, nachzutragen.

Die spätere holländische Triangulierung von Krayenhof ist dadurch bekannt geworden, dass *Gauss* hievon ein kleines Netz von 9 Dreiecken als Zahlen-Beispiel in Art. 23. des „supplementum theoriae combinationis“ behandelt hat. Das Netz hat 27 gemessene Winkel mit 2 Seiten-Gleichungen, 9 Dreiecks-Gleichungen und 2 Horizont-Gleichungen. Der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels nach der Ausgleichung ist $= \pm 2{,}744''$, um jedoch den Einfluss der 2 Horizont-Gleichungen zu berücksichtigen, nehmen wir nach (7) S. 169 für den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$m = 2{,}744 \sqrt{\frac{27}{29}} = \pm 2{,}65''$$

Trig. Vermessung der batavischen Republik, mit Dreieckskarte, s. „Allgemeine geogr. Ephemeriden“, 4. Band, 1799, S. 80.

Über die mittlere Genauigkeit der alten holländischen Triangulierung findet man Mitteilungen in dem Berichte von *Gaede*, „Zeitschr. f. Verm. 1885“, S. 172.

Die französische Gradmessung in Peru von 1736 hat 43 Dreiecke, in welchen je alle 3 Positionswinkel gemessen wurden. Auf S. 22—39 des Werkes „Mesure des trois premiers degrés dans l'hémisphère australe, par M. de *La Condamine*“, Paris 1751, sind die Winkel dieser 43 Dreiecke mitgeteilt. Der grösste Widerspruch ist 13″ und die Quadratsumme aller Widersprüche ist 1718, also der mittlere Winkelfehler:

$$m = \sqrt{\frac{1718}{3 \times 43}} = \pm 3{,}65''$$

Auf S. 85 dieses Werkes wird auch der Basisanschluss mitgeteilt. Die Triangulierung stützte sich auf die 6273 Toisen lange Basis von Yarouqui (vgl. § 25. S. 163), und leitete aus derselben durch 43 Dreiecke die Basis von Tarqui ab mit dem Resultat 5260,03 Toisen, während die unmittelbare Messung 5258,949 Toisen gab. Die Differenz ist:

1,081 Toisen oder 205^{mm} für 1^{km}.

Die Entfernung beider Grundlinien ist etwa 3° oder ungefähr 330 Kilometer.

Die Triangulierung der französischen Gradmessung in Lappland vom Jahr 1736 wurde im Jahr 1827 von *Rosenberger* ausgeglichen, wobei der wahrscheinliche Fehler eines Winkels $= 6{,}0''$ berechnet wurde („Astr. Nachr.“, 6. Band, S. 18). *Hansen* hat im Jahr 1831 ebenfalls eine Ausgleichung dieser Triangulierung unternommen und findet den mittleren Winkelfehler $= 10{,}99''$ („Astr. Nachr.“ 9. Band, S. 243). Der Unterschied rührt davon her, dass *Rosenberger*, wie *Hansen* „Astr. Nachr.“ 9. Band S. 216 angiebt, unter 24 Bedingungs-Gleichungen 6 hatte, welche bereits in den übrigen enthalten waren. Unter Beibehaltung der *Hansen*schen Angabe 10,99″ nehmen wir noch eine Reduktion nach (7) S. 169 vor, es ist nämlich die Anzahl der gemessenen Winkel = 30 mit 4 Stations-Bedingungs-Gleichungen, also:

$$m = 10{,}99'' \sqrt{\frac{26}{30}} = \pm 10{,}23''$$

Die französische Gradmessung von Delambre und Méchain von 1792 wurde veröffentlicht in dem Werke: „Base du système métrique etc.“, III. Band, wo auf S. 605 sich findet:

bei	36	Dreiecken ist der Dreiecks-Widerspruch w zwischen	0″	und	1″
„	27	„ „ „ „ „ „	1″	„	2″
„	18	„ „ „ „ „ „	2″	„	3″
„	4	„ „ „ „ „ „	3″	„	4″
„	3	„ „ „ „ „ „	4″	„	5″

Indem man nun für die einzelnen w jeweils den Durchschnitts-Wert der betreffenden Gruppe nimmt, z. B. 0,5″ für die ersten 36 Dreiecke, 1,5″ für die folgenden 27 Dreiecke u. s. w., berechnet man den mittleren Winkelfehler: $m = \pm 1{,}05''$

(Dieses sind 88 Dreiecke, während auf S. 605 die Zahl 90 Dreiecke genannt ist.)

Über die *neueren* französischen Triangulierungen, zur internationalen Erdmessung, ist ein Bericht gegeben in „Comptes rendus hebd. des séances de l'acad. d. sc. tome CVIII, Nr. 3, Januar 1889“, note sur la nouvelle méridienne de France, S. 122—127. (Auszug hieraus von *Hammer*, „Zeitschr. f. Verm.“ 1889, S. 999.)

Die britische Landes-Vermessung.

Die schon 1783 unter General *Roy* begonnene Triangulierung gelangte 1858 zum Abschluss unter *James* und *Clarke*.

Es wurde hierüber ein grosses Werk herausgegeben: „*Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland*“ u. s. w. (vgl. Einleitung S. 10).

Die Ausgleichung der Triangulierung ist in 21 Partial-Netze, mit zusammen 202 Punkten, zerlegt worden.

Die Ausgleichung erfolgte nach Richtungen („ord. trig. surv.“ S. 273—277). Der Netz-Ausgleichung ging eine genäherte Stations-Ausgleichung voran, welche wir schon in Band I, S. 228—231 beschrieben haben. An diese Stations-Ausgleichungen schlossen sich genäherte Gewichts-Bestimmungen an („ord. trig. surv.“ S. 66), wobei teils die Abweichungen der einzelnen Richtungs-Beobachtungen von ihrem Mittel, teils die Zahl der Einstellungen, als Genauigkeitsmass dienten. Die Resultate der Stations-Ausgleichungen gingen mit diesen Gewichten wie unmittelbar beobachtete Richtungen in die Netz-Ausgleichungen ein.

Es findet also in jedem einzelnen der 21 Partialnetze Richtungs-Ausgleichung mit ungleichen Gewichten statt, worüber schon in unserem I. Bande, S. 259 einiges bemerkt wurde.

Die Anzahl aller Richtungen ist 1554, es kommen also durchschnittlich 74 Richtungen auf ein Partialnetz.

Als Ganzes behandelt, hätte die Ausgleichung 920 Gleichungen gegeben, während in den Gruppen die Gleichungs-Anzahl zwischen 12 und 64 sich bewegt („ord. trig. survey“ S. 277). In Bezug auf die gegenseitigen Gruppen-Anschlüsse wird auf S. 272 bis 273 Folgendes berichtet: Nachdem eine Gruppe unabhängig von allen anderen ausgeglichen war, wurden die daraus erhaltenen Korrektionen in den Bedingungs-Gleichungen der nächsten Gruppe substituiert und die Quadratsumme der Fehler in dieser zweiten Gruppe zum Minimum gemacht, in gleicher Weise schloss sich eine zweite Gruppe an, und so fort. *Vier* der Triangulierungs-Gruppen haben unabhängigen Anfang (oder fünf nach S. 276 und 277, nämlich 1. 6. 7. 12. 14.), ohne fremde Bedingungen, vielmehr wurden Bedingungen aus diesen Anfangs-Gruppen in die anstossenden Gruppen übertragen. Für die Anschlüsse der gemessenen Grundlinien wurden keine Zwangs-Bedingungen eingeführt, denn es kamen niemals 2 Grundlinien in einer Gruppe zusammen. Zwar könnte man durch Basis-Anschlussbedingungen die Fehler-Anhäufung vermindern, allein andernfalls bekommt man in den ungezwungenen Basis-Anschlüssen eine gute Probe für die Theodolit-Arbeit.

Über die Winkel-Genauigkeit sind keine Berechnungen angestellt, doch sind die Dreiecks-Schlüsse sämtlich angegeben; wir haben aus diesen 464 Dreiecks-Schlüssen („ord. trig. surv.“ S. 426—495) folgende Tabelle gebildet, wobei mit n die Anzahl der Dreiecke in jeder Gruppe, mit $[\pm w]$ die absolute Summe der Dreiecks-Widersprüche und mit $\frac{[\pm w]}{n}$ deren Durchschnittswerte bezeichnet sind.

Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$\frac{[\pm w]}{n}$	Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$\frac{[\pm w]}{n}$
1.	21	34,65″	1,6″	11.	35	116,67″	3,3″
2.	24	94,58	3,9	12.	16	32,49	2,0
3.	14	66,31	4,7	13.	16	69,23	4,3
4.	19	65,68	3,5	14.	22	43,03	2,0
5.	40	104,31	2,6	15.	45	202,14	4,5
6.	14	78,69	5,6	16.	29	63,72	2,2
7.	18	42,70	2,4	17.	19	57,17	3,0
8.	20	39,54	2,0	18.	12	33,35	2,8
9.	21	27,08	1,3	19.	19	45,42	2,4
10.	14	38,77	2,8	20.	19	53,25	2,8
				21.	27	105,79	3,9
				Summen von 1. bis 21.	464	1414,57	

Aus allen 464 Dreiecken hat man den mittleren Winkelfehler:

$$m = 1{,}2533 \frac{1414{,}57}{464\sqrt{3}} = \pm 2{,}21''$$

Von den 6 gemessenen Grundlinien wurden zwei ausgewählt, nämlich die von Lough Foyle und Salisbury Plain, welche mit *Colby*s Kompensations-Stangen gemessen sind (vgl. § 10. S. 78). Die trigonometrische Verbindung zwischen den zwei ausgewählten Grundlinien gab einen Widerspruch von 0,418 Fuss, dessen Verteilung auf *eine* Masseinheit für die ganze Vermessung führte. Die Differenzen zwischen den wirklich gemessenen Linien und den hiefür trigonometrisch aus jener festgesetzten Einheit abgeleiteten Werten zeigt folgende Tafel („ord. trig. surv." S. XIV und S. 422):

Jahr	Basis	Basismess-Apparat	Basislänge	trigon. Resultat	Differenz	für 1km
			engl. Fuss	engl. Fuss	engl. Fuss	mm
1791	Hounslow Heath	Stahlkette	27 406,190	27 406,363	+ 0,173	+ 6,3
1794	Salisbury Plain I	Stahlkette	36 576,830	36 577,656	+ 0,826	+ 22,6
1801	Misterton Carr	Stahlkette	26 344,060	26 343,869	— 0,191	— 7,2
1806	Rhuddlan Marsh	Stahlkette	24 516,000	24 517,596	+ 1,596	+ 65,1
1817	Belhelvie	Stahlkette	26 517,530	26 517,770	+ 0,240	+ 9,1
1827	Lough Foyle	Kompens.-Stangen	41 640,887	41 641,103	+ 0,216	+ 5,2
1849	Salisbury Plain II	Kompens.-Stangen	36 577,858	36 577,656	— 0,202	— 5,5
			219 579,355	219 582,013	+ 2,658	

Die Entfernungen der Grundlinien von einander betragen zwischen 62 und 371 englischen Meilen („ord. trig. survey" S. 424) oder etwa zwischen 100 und 600 Kilometern.

Die Gesamtlänge dieser 7 Grundlinien ist rund 66,9km, also eine Grundlinie im Mittel 9,6km. (vgl. die frühere Zusammenstellung § 18. S. 113.)

Die Breitengrad-Messung in den Ostsee-Provinzen Russlands, ausgeführt 1821 bis 1831 von *W. Struve*, enthält 32 in einer einfachen Kette an einander gereihte Dreiecke. Über die Winkel-Genauigkeit giebt *F. G. W. Struve* Auskunft in dem Werke: „Beschreibung der Breitengrad-Messung in den Ostsee-Provinzen Russlands, I. Teil, Dorpat 1831", S. 137—138 und S. 148—149. Aus Wiederholungen fand sich der wahrscheinliche Fehler eines Dreiecks-Winkels im Jahr 1823 $= \pm 0{,}425''$ und im Jahr 1824 mit teilweise veränderter Messung $= \pm 0{,}384''$. Im Mittel hieraus hat man den mittleren Fehler eines Dreiecks-Winkels nach den Vergleichungen auf den *Stationen*:

$$m = \pm 0{,}60''$$

Für 31 geschlossene Dreiecke ist die Quadratsumme der Widersprüche = 30,60, also der mittlere Fehler eines Winkels aus den Proben im *Netz*:

$$m = \sqrt{\frac{30{,}60}{3 \times 31}} = \pm 0{,}57''$$

Über die Genauigkeit dieser russischen Messungen giebt auch folgende Mitteilung im 10. Band (1833) der „astr. Nachr." S. 323—328 Auskunft:

Die Vereinigung der beiden von *Struve* und *Tenner* geleiteten Gradmessungen fand in 2 Dreiecken statt. Die durch Einsendung an einen Dritten, nämlich an *Bessel*, in Betreff der gegenseitigen Unabhängigkeit sichergestellten Resultate sind die folgenden:

Winkel-Vergleichung:

	Struve	*Tenner*	Differenz
Sestukalns	92° 59′ 8,26″	92° 59′ 8,19″	— 0,07″
Gaisekalns	53 11 6,66	53 11 5,76	— 0,90
Daborkalns	33 49 46,72	33 49 48,15	+ 1,43
Summe	180 0 1,64	180 0 2,10	
soll	180 0 1,46	180 0 1,46	

Winkel-Vergleichung:

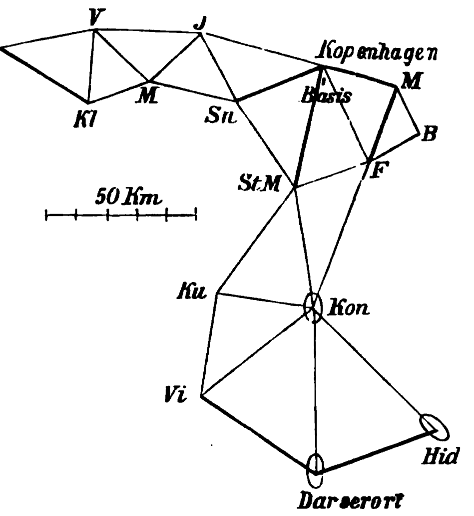
	Struve	*Tenner*	Differenz
Gaisekalns	18° 29′ 18,38″	18° 29′ 20,28″	+ 1,90″
Daborkalns	101 11 56,39	101 11 55,64	— 0,75
Kreuzburg	60 18 44,21	60 18 45,67	+ 1,46
Summe	179 59 58,98	180 0 1,59	
soll	180 0 1,17	180 0 1,17	

Zugleich werden nach den beiderseitigen Triangulierungen die sechs Dreiecks-Seiten mitgeteilt, welche im Mittel um 25 Milliontel abweichen.

Die dänische Gradmessung wurde im Jahr 1816 unter Leitung von *Schumacher* begonnen, und bis 1823 von Altona bis Lysabbel auf Alsen fortgesetzt, dann 1837-1848 weiter ausgedehnt, 1850 unter Leitung von *Andrae* vollendet und veröffentlicht in dem Werke: „Den Danske Gradmaaling, udgived af *C. G. Andrae*, Geheime Etatsraad og Directeur for Gradmaalingen Kjobenhavn, I. Band, 1867; II. Band, 1872; III. Band, 1878, IV. Band, 1884". Hiezu gehört auch:

„Problèmes de haute géodésie, extraits de l'ouvrage danois: „den danske gradmaaling", 1er cahier: Formation et calcul des triangulations géodésiques, Copenhague 1881; 2er cahier: calcul des latitudes, des longitudes et des azimuts sur le sphéroïde, 1882; 3e cahier: determination du sphéroïde terrestre etc. 1883."

Fig. 1.
Dänisches Haupttriangulierungs-Netz.
(Massstab 1 : 2 500 000.)



Ein Litteratur-Bericht über das Werk: „Den Danske Gradmaaling" ist von *Helmert* gegeben in der „Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft", 1877, S. 184 bis 239 und 1878, S. 57—80.

Die dänische Triangulierungs-Berechnung zeichnet sich hauptsächlich durch scharfe Genauigkeits-Untersuchungen aus. Unsere Fig. 1. von S. 389 des ersten Bandes zeigt einen Teil der dänischen Dreiecke, welche auf Grund der Kopenhagener Basis berechnet sind. Die Verbindung der 2701 Meter langen Grundlinie bei Kopenhagen mit der ersten Hauptseite Kopenhagen—Snoldelev wird durch ein Basisnetz von 5 Dreiecken erzielt (welches in Fig. 1. wegen Kleinheit des Massstabes nicht mit aufgenommen ist). Für die 7 Dreiecks-Seiten, welche in Fig. 1. stark gezogen sind, sind die mittleren Fehler berechnet worden, und zwar mit Trennung des Einflusses der Winkelmessungs-Fehler von dem Einfluss des Basisfehlers. Folgende Tabelle (S. 180) giebt hiefür die Fehlerquotienten, ausgedrückt in Millionteilen der Seiten selbst, oder in Millimetern für 1 Kilometer.

Man bemerkt, dass der Einfluss des Basisfehlers neben dem Einfluss der Winkelfehler schon im 5ten Dreieck fast verschwindet.

Für die Punkte Kongsbjerg Darserort und Hiddensö wurden auch die *Fehlerellipsen* berechnet, entsprechend der Theorie, welche in unserem I. Bande, § 121.—124. mitgeteilt wurde. Diese *Andrae*schen Fehler-Ellipsen haben den Massstab $s = 1$, entsprechend den Wahrscheinlichkeits-Gesetzen (10) S. 347. Band I.

Indem die Kopenhagener Basis als fehlerfrei angenommen wird, und alle Winkelfehler von der Basis an berücksichtigt werden (*Andrae* Fall II.), hat man a, b, z (s. S. 180).

Mittlere Fehler der Seiten s, ausgedrückt in Millionteln der Länge.

Dreiecks-Seiten s	Anzahl der Dreiecke	Fehler, herrührend von Winkel-messung	Fehler, herrührend von Basis-messung	Mittlerer Gesamt-fehler
Grundlinie	. .	0,0	1,7	1,7
Kopenhagen-Snoldelev	5	4,4	1,7	4,7
Kopenhagen-St.Möllehöi	6	4,5	1,7	4,8
Kopenhagen-Malmö	8	4,9	1,7	5,2
Malmö-Falsterbo	8	5,0	1,7	5,3
Refsnaes-Klöveshöi	11	6,8	1,7	6,9
Vigerlöse-Darserort	11	7,1	1,7	7,3
Darserort-Hiddensö	12	7,3	1,7	7,5

Die grosse Halbaxe a, die kleine Halbaxe b und das Azimut z der grossen Halbaxe für die erwähnten drei Fehler-Ellipsen sind:

Punkt	a	b	z
Kongsberg	$0{,}56^m$	$0{,}12^m$	1°
Darserort	$1{,}06^m$	$0{,}29^m$	178°
Hiddensö	$1{,}00^m$	$0{,}34^m$	156°

Die Winkelmessungen, welche bei diesen Fehler-Ellipsen benützt wurden, sind sehr genau, z. B. findet man aus den 32 Winkel-Verbesserungen von S. 296 des 1. Bandes der dänischen Gradmessung die Quadratsumme 3,57 mit 7 Bedingungs-Gleichungen, also den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{3{,}57}{7}} = \pm 0{,}71''$$

Aber die Genauigkeit, welche durch diese Fehler-Ellipsen veranschaulicht wird, ist noch überschätzt, weil der dabei benützte Gewichtseinheits-Fehler (μ nach der Formel (30) S. 173) keine Rücksicht darauf nimmt, dass μ_1 in den Stationen und μ_2 im Netz nicht gleich sind.

Die Werte μ_1 und μ_2 sind (nach einer schon früher von General v. *Morozowicz* in der „Zeitschr. f. Verm. 1877", S. 393 gegebenen Zusammenstellung) für 5 Ausgleichungen der dänischen Gradmessung folgende:

1)	$\mu_1 = \pm 1{,}00$	$\mu_2 = \pm 1{,}63$	$\mu_2 : \mu_1 = 1{,}63$
2)	1,00	1,65	1,65
3)	1,00	3,08	3,08
4)	1,64	2,99	1,82
5)	0,96	1,75	1,82

Der Wert 3) $\mu_2 : \mu_1 = 3{,}08$ ist durch besondere Umstände bedingt, im übrigen ist im Mittel rund:

$$\mu_2 : \mu_1 = 1{,}7$$

d. h. nahezu derselbe Wert wie bei der preussischen Landes-Triangulierung (S. 182).

Hannoversche Gradmessung von Gauss. (vgl. Einleitung S. 13—14.)

In Art. 24—25 des „Supplementum theoriae combinationis" hat *Gauss* die Richtungs-Ausgleichung eines Fünfecks der Hannoverschen Gradmessung mitgeteilt (ausführlich dargelegt in *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen, 1882", I, S. 5—13). Der mittlere Fehler einer als gemessen in die Netz-Ausgleichung eingehenden Richtung ist 0,419″, also der mittlere Winkelfehler:

$$m = 0{,}419 \sqrt{2} = \pm 0{,}59''$$

Es ist aber nicht anzunehmen, dass das an solcher Stelle gegebene Ausgleichungs-Beispiel die Genauigkeit der Hannoverschen Gradmessungs-Triangulierung im ganzen darstellt.

An *Bessel* schrieb *Gauss* am 5. November 1823 („Briefwechsel mit *Bessel*", S. 423 und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205): „Ich habe das System meiner Hauptdreiecke in diesen Tagen sorgfältig ausgeglichen .... Es sind zusammen 26 Dreiecke, worin alle Winkel von mir selbst beobachtet sind. Die grösste Summe der Fehler ist 2,2", wo bei einer Seite das Pointieren sehr schwierig war; die nächstgrösste ist 1,8". Keine der 76 vorkommenden Richtungen ist bei der Ausgleichung um eine ganze Sekunde geändert, die grösste Änderung beträgt 0,813"."

Ferner *Gauss* an *Bohnenberger* am 16. November 1823 („Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 431 und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205:

„Bei meinen Messungen habe ich gefunden, dass das, was ich in meiner Abhandlung „theoria combinationis etc." den *mittleren* Fehler nenne, aus mehreren Stationen, gute und weniger gute Messungen durch einander gerechnet, etwa $3,5'' : \sqrt{n}$ ist (n = Anzahl der Repetitionen). Bei sehr fester Aufstellung, sehr günstiger (d. i. nicht zitternder) Luft und ausschliesslich heliotropischen Zielpunkten ist der mittlere Fehler aber beträchtlich kleiner. Meine sämtlichen Messungen geben bisher 76 Hauptrichtungen (38 hin und 38 zurück) und aus der Ausgleichung der Fehler fand sich, dass der *mittlere* Fehler einer Hauptrichtung = 0,47" war."

Trotzdem scheint die Genauigkeit der Hannoverschen Gradmessung im ganzen doch eine geringere gewesen zu sein, wie *Gäde* in der „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205—206 näher ausführt; und jedenfalls war die spätere Hannoversche *Landes*-Vermessung noch erheblich weniger genau.

In dem soeben zitierten Briefe von *Gauss* an *Bohnenberger* vom 16. November 1823 („Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 430—431) findet sich auch eine prophetische Stelle, welche jetzt, 66 Jahre nachdem sie geschrieben, im schönsten Lichte glänzt:

> „Wie schön wäre es, wenn einmal alle über Europa von Schottland bis zum Banat und von Kopenhagen bis Genua und Formentera sich erstreckenden Messungen in Ein zusammenhängendes System gebracht werden könnten. Ich möchte gern nach Kräften dazu vorbereiten, allein wenn man über die Mitte seines Lebens hinaus ist, muss man bei einem so ausgedehnten Gegenstande je eher je lieber anfangen."

Die kurhessische Triangulierung wurde von *Gerling*, einem Schüler von *Gauss*, im wissenschaftlichen Anschluss an die Hannoversche Triangulierung ausgeführt.

Gerling hat hierüber in seinen „Beiträgen zur Geographie Kurhessens", Kassel 1839, ausführliche Mitteilungen gemacht; er giebt daselbst auf S. 182 den mittleren Fehler einer Richtung (im *Gauss*schen Sinn) = ± 0,88".

Ferner wurden im „General-Bericht der Europ. Gradm. für 1865", S. 47 von *Börsch* und *Kaupert* Angaben für den mittleren Richtungs-Fehler der kurhessischen Triangulierung gemacht, nämlich für die erste Abteilung 0,95" und 0,99", im Mittel 0,97" und für die zweite Abteilung 1,37". Unter Voraussetzung, dass die Messungen, für welche *Gerling* im Jahr 1839 den Wert 0,88" gab, in den Angaben vom Jahr 1865 mit inbegriffen sind, nehmen wir als Gesamtresultat das Mittel aus den Angaben 0,97" und 1,37" für die erste und zweite Abteilung, d. h. 1,17" und damit wird der mittlere Winkelfehler:

$$m = 1,17\sqrt{2} = \pm 1\,65''$$

Weiteres über *Gerlings* Ausgleichung s. *Jordan-Steppes* „deutsches Vermessungswesen" I, S. 14—17.

Die Gradmessung in Ostpreussen von Bessel und Baeyer 1838, bildet den Anfang einer neuen Epoche der Triangulierungen und Gradmessungs-Arbeiten. *Bessel* hat hier die Aufgabe gelöst, die Quadratsumme der Änderungen *aller einzelnen* Richtungs-Beobachtungen zu einem Minimum zu machen (vgl. Einleitung S. 14). Auf Genauigkeits-Bestimmungen für die Winkel-Messungen und die daraus abgeleiteten Resultate hat sich jedoch *Bessel* nicht eingelassen.

Die 22 Dreiecks-Widersprüche, welche in den Bedingungs-Gleichungen auf S. 141

bis 148 der „Gr. in O.“ enthalten sind, haben wir bereits gelegentlich in Band I, S. 7 mitgeteilt; dieselben geben die Quadratsumme 30,5, also den mittleren Winkelfehler:

$$m = \sqrt{\frac{30,5}{3 \,.\, 22}} = \pm 0,68''$$

Die Küstenvermessung von Baeyer 1849, ist als eine Fortsetzung der Gradmessung in Ostpreussen zu betrachten. Die Messungs- und Berechnungs-Methoden sind im wesentlichen die *Bessel*schen.

Man erkennt in der „Küsten-Vermessung“ das peinlichste Bestreben, dem Vorbilde der Gradmessung in Ostpreussen nachzukommen; die Küsten-Vermessung enthält aber mehrere Irrtümer, z. B. die „Berechnung des mittleren Fehlers der Winkelmessung“ § 97. S. 353, u. A. (vgl. *Jordan-Steppes* „das deutsche Vermessungswesen“ I, S. 38—44).

Die Verbindung der preussischen und russischen Dreiecks-Ketten 1857.

Dieses Werk, ebenfalls von General *Baeyer* geleitet, hat denselben Charakter wie die Küsten-Vermessung.

Über diese *Baeyer*schen Triangulierungen haben wir näher berichtet in *Jordan-Steppes* „deutsches Vermessungswesen“ I, S. 38—51 und stellen die dort berechneten mittleren Winkelfehler zusammen:

Küsten-Vermessung . . . . $m = \pm 0,77''$
Verbindung der preuss. u. russ. Dreiecks-Ketten . . $m = \pm 0,60''$

Die preussische Landes-Triangulierung.

Als Fortsetzung der Gradmessung in Ostpreussen, der Küsten-Vermessung u. s. w. haben wir von 1867 an die preussische Landes-Triangulierung. Die in jene Zeit fallenden Fortschritte der Ausgleichungs-Theorie haben wir bereits in unserem I. Bande § 78. behandelt, und da wir auch im übrigen einen ausführlichen Bericht anderwärts geliefert haben (*Jordan-Steppes* „deutsches Vermessungswesen“ I, S. 59—140), so beschränken wir uns hier darauf, einige charakteristische Zahlen zusammen zu stellen, und zwar zuerst die mittleren Winkelfehler, in soweit sie aus *Netz*-Widersprüchen berechnet sind:

Triangulation 1858, Hauptdreiecke I. Teil, S. 167 . . .	$m = \pm 0,63''$
Triangulation 1859, Hauptdreiecke I. Teil, S. 99 . . .	0,62
Triangulation 1861 u. 1862, Hauptdreieck I. Teil, S. 258	0,65
Triangulation 1865, Hauptdreiecke I. Teil, S. 364 . . .	0,64
Triangulation 1867, Hauptdreiecke I. Teil, S. 411 . . .	0,52
Triangulation in Schleswig-Holstein, II. Teil, S. 224 . .	0,56
Schlesisch-Posensche Kette, II. Teil, S. 571	0,84
Durchschnitt	$m = \pm 0,64''$

Von besonderer Wichtigkeit bei Triangulierungs-Ausgleichungen ist noch das Verhältnis des mittleren Gewichtseinheits-Fehlers μ_1 in der *Stations*-Ausgleichung zu dem mittleren Gewichtseinheits-Fehler μ_2 in der *Netz*-Ausgleichung (vgl. die Formeln (28)—(30) S. 173).

Folgendes sind die wichtigsten Mittelwerte hiefür:

Bezeichnung der Triangulation:		Stations-Ausgleichung μ_1	Netz-Ausgleichung μ_2	$\frac{\mu_2}{\mu_1}$
1859	I S. 99	1,29″	2,06″	1,59
1858	I S. 168	1,32	1,87	1,42
1861—62	I S. 259	1,30	2,21	1,70
1865	I S. 365	1,41	2,15	1,52
1867	I S. 412	1,91	2,01	1,05
Schlesw.-Holst.	II S. 225	1,51	1,95	1,29
Mark-Schlesien	II S. 438	1,53	2,45	1,60
Schlesien-Posen	II S. 572	1,74	3,49	2,00
	Durchschnitt	1,50″	2,27″	1,52

In runder Zahl kann man also sagen, dass die Netz-Ausgleichung den mittleren Fehler $1\frac{1}{2}$ fach grösser giebt, als die Stations-Ausgleichungen. Man muss hiernach auf Fehler schliessen, welche auf den Stationen verborgen bleiben und erst im Netze zu Tage treten. Dieses könnten z. B. je nach Anordnung der Messungen Teilungsfehler sein, vielleicht Seiten-Refraktionen in der Atmosphäre, oft aber auch sind Verwerfungen und Wiederholungen u. s. w. auf den Stationen schuld an einem ungünstigen Verhältnisse $\mu_2 : \mu_1$.

Über die neueren Triangulierungen der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme ist von General *Schreiber* eine Mitteilung gemacht in Annex X^b, S. 6—12 der „Verhandlungen der 1887er Konferenz der internationalen Erdmessung“, Berlin 1888 (bereits zum Teil auf S. 135—137 von uns abgedruckt), wovon wir die sehr wertvollen Angaben über Zeitaufwand, Genauigkeit u. s. w. bei dem Wesernetz (vgl. S. 134) hier zitieren:

Zur Bestimmung der 15 Netzpunkte des Wesernetzes sind 4760 Einstellungen (sämtlich nach Heliotropen), und zur Bestimmung der 33 Zwischenpunkte, 3536 Einstellungen (davon 3247 nach Heliotropen) gemacht worden.

Hiermit sind beschäftigt gewesen:

im Jahre 1886: eine Sektion 162 Tage,

„ „ 1887: drei Sektionen bzw. 141, 136 und 74 Tage.

Jede Sektion bestand aus 1 Beobachter, 1 bis 2 Assistenten und 10 bis 15 kommandierten Soldaten.

Gleichzeitig sind von diesem Personal alle einstellbaren Türme je 6 mal angeschnitten und alle Centrier- und Festlegungs-Arbeiten ausgeführt worden.

Wie aus der Karte (S. 134) zu ersehen, enthält das eigentliche Netz 60 Bedingungs-Gleichungen, abgesehen von 16 örtlichen Winkel-Gleichungen auf den Anschluss-Stationen. Es kommen somit durchschnittlich 4 Netz-Bedingungen auf den Punkt. Die Ausgleichung ist übrigens nicht nach Bedingungs-Gleichungen (Korrelaten), sondern nach Elementen, und zwar nach ebenen rechtwinkligen Koordinaten, ausgeführt worden, so dass anstatt eines Systems von 60 nur ein solches von 30 Normal-Gleichungen (da 15 Punkte zu bestimmen waren) gebildet und aufgelöst zu werden brauchte.

Von den 121 durch die Netz-Ausgleichung bestimmten Richtungs-Verbesserungen sind 6 grösser als 1″, die grösste hat die Richtung Hüttenberg—Deister mit 1,48″ erhalten. Die Richtungs-Verbesserungen liefern übrigens kein zutreffendes Genauigkeitsmass für die Winkel-Bestimmung im Wesernetz, da der ganze Anschluss-Zwang in ihnen enthalten ist. Frei von letzterem sind dagegen die Schlussfehler der 38 Dreiecke und nicht in Dreiecke zerlegten Vier- und Fünfecke, in denen alle Winkel gemessen worden sind. Von diesen Schlussfehlern (die der Vier- und Fünfecke, den Gewichts-Verhältnissen entsprechend, bzw. mit $\sqrt{\frac{3}{4}}$ und $\sqrt{\frac{3}{5}}$ multipliziert) liegen:

2	zwischen	2,5″	und	2,0″
6	„	2,0″	„	1,0″
30	„	1,0″	„	0,0″

Die Summe ihrer Quadrate ist 27,22, mithin der mittlere Dreiecks Schlussfehler:

$$\sqrt{\frac{27,22}{38}} = 0,85'',$$

woraus sich der mittlere Fehler eines durch Stations-Ausgleichung bestimmten Winkelwertes gleich $0,85'' \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,49''$ ergiebt.

Die Berechnung der Messungen geschieht durchweg, bis zur niedrigsten Ordnung herab, nach der Methode der kleinsten Quadrate, und zwar unter völligem Anschluss der neu hinzukommenden an die bereits feststehenden Teile, so dass schliesslich ein über das ganze Land ausgedehntes widerspruchsfreies Netz von durchschnittlich 20 Punkten auf 100 Quadrat-Kilometer entsteht. Selbstverständlich kann in den niederen Ordnungen von einer wissenschaftlich strengen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate nicht die Rede sein; diese dient hier lediglich dem Zweck, auf eine möglichst willkürfreie Art zu widerspruchsfreien und plausiblen Resultaten zu gelangen.

Dieses Ziel ist aber mit Hilfe der Methode, wenn man nur da, wo wirkliche Strenge ohnehin unerreichbar, auch auf den Schein einer solchen verzichtet, in der denkbar einfachsten und elegantesten Weise erreichbar.

Nur die Hauptdreiecks-Ketten und -Netze werden nach Korrelaten, alle übrigen Messungen dagegen, nämlich die Füllnetze, die Zwischenpunkte I. Ordnung und die den weitaus grössten Teil der Gesamtheit bildenden Messungen II. und III. Ordnung nach Koordinaten ausgeglichen.

Triangulierungen des geodätischen Instituts.

Von 1864—1886 sind von dem königlich preussischen geodätischen Institute namentlich drei grössere Triangulierungs-Arbeiten ausgeführt worden, nämlich, nach der Zeit ihrer Veröffentlichung:

1) Das rheinische Dreiecksnetz I. Heft: die Bonner Basis, 1876,
II. „ die Richtungs-Beobachtungen, 1878,
III. „ die Netz-Ausgleichung, 1882;

2) das hessische Dreiecksnetz, 1882;

3) das märkisch-thüringische Dreiecksnetz, 1889.

(Litteratur-Berichte hierüber s. „Vierteljahrschrift d. astr. Gesellschaft 1877“, S. 146—166, ferner „Zeitschr. f. Verm. 1879“, S. 97—149, 1884, S. 69—78 und 1889, S. 155–159.)

Diese Triangulierungen wurden ursprünglich nach dem Muster der „Küsten-Vermessung“ angelegt, und sind später im Anschluss an die übrige Weiter-Entwicklung der Ausgleichungs-Theorie fortgeführt worden. Als charakteristische Zahlen führen wir an die Werte für den mittleren Winkelfehler m und für das Verhältnis $\mu_2 : \mu_1$ der Gewichtseinheits-Fehler nach und vor der Netz-Ausgleichung (nach (28)—(30) S. 173):

Rheinisches Dreiecksnetz,	1. Ausgl	$m = \pm 0{,}63''$	$\mu_2 : \mu_1 = 1{,}8$
„ „	2. Ausgl.	. .	2,6
Hessisches „		$\pm 0{,}77''$	2,4
Märkisch-Thüringisches Dreiecksnetz		$\pm 0{,}82''$	1,9
	Durchschnitt	$m = \pm 0{,}74''$	$\mu_2 : \mu_1 = 2{,}2$

Die bayerische Landes-Triangulierung.

Am Anfang dieses Jahrhunderts begann Bayern mit seiner Landes-Aufnahme, welche auch auf die Vermessungen der anderen süddeutschen Staaten günstig einwirkte.

Die Triangulierung entwickelte sich unter *Soldner* (1776—1833, vgl. Einleitung S. 12—13). Ein amtliches Werk über die bayerische Triangulierung erschien erst 1873, aus Veranlassung der internationalen Erdmessung: „Die bayerische Landes-Vermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, herausgegeben von der Kgl. Steuer-Kataster-Kommission in Gemeinschaft mit dem topographischen Bureau des Königl. Generalstabs“, München 1873. 1. Abschnitt, die Grundlinien, bearbeitet von Direktor *v. Bauernfeind*, 2.—8. Abschnitt, Triangulierung und Gradmessungs-Resultate, bearbeitet von Oberstlieutenant *v. Orff*. Die Messungen begannen am Anfang dieses Jahrhunderts, die letzte Berechnung geschah erst 1866—1873. Es sind 3 Grundlinien gemessen, bei München, Nürnberg und Speyer. Die Winkelmessungen sind nach der Repetitions-Methode gemacht und stationsweise vorläufig ausgeglichen. Die Ergebnisse der Stations-Ausgleichungen wurden als unmittelbare Richtungs-Messungen in die Netz-Ausgleichung eingeführt, jedoch nicht mit gleichen Gewichten (wie bei *Gauss* und *Gerling*), sondern mit den Anschnitts-Zahlen als Gewichten (vgl. hiezu unseren Band I, S. 259). Das Gesamtnetz wurde in 32 Polygone zerlegt, von denen jedoch ein Teil, namentlich die letzten, Nichts zum Zusammenhalt des Ganzen beiträgt, sondern mehr den Charakter von Punkt-Einschaltungen hat. Die ersten Polygone schliessen sich an die 3 gemessenen Grundlinien an, und der Zusammenhang der Polygone wird durch Zwangs-Bedingungen, welche sich auch auf die Basis-Anschlüsse erstrecken, gewonnen. Über die Winkel-Genauigkeit geben die auf S. 481 zusammengestellten Dreiecks-Widersprüche Auskunft:

Bei	106	Dreiecken oder	31,3 %	ist der Widerspruch zwischen	0,0″	und	0,9″
„	72	„ „	21,2	„ „ „ „	1,0	„	1,9
„	53	„ „	15,6	„ „ „ „	2,0	„	2,9
„	42	„ „	12,4	„ „ „ „	3,0	„	3,9
„	29	„ „	8,6	„ „ „ „	4,0	„	4,9
„	13	„ „	3,8	„ „ „ „	5,0	„	5,9
„	11	„ „	3,2	„ „ „ „	6,0	„	6,9
„	7	„ „	2,1	„ „ „ „	7,0	„	7,9
„	4	„ „	1,2	„ „ „ „	8,0	„	8,9
„	2	„ „	0,6	„ „ „ „	9,0	„	9,9
	339		100,0 %				

Indem man in der ersten Gruppe den Mittelwert 0,5″ für alle einzelnen Dreiecke annimmt, in der zweiten Gruppe den Mittelwert 1,5″ u. s. w., findet man den mittleren Winkelfehler:

$$m = \pm 1{,}81''$$

Weiteres hierüber s. *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen, 1882“, I, S. 195—203.

Schwerds Basisnetz.

Im Anschluss an die bayerische Landes-Triangulierung, aber wissenschaftlich unabhängig, wurde die Basismessung und Basisnetz-Triangulierung von *Schwerd* in Speyer unternommen, die wir schon in Band I, S. 207—216 und S. 356—361 behandelt haben.

Wir fanden dort (S. 211) den mittleren Gewichtseinheits-Fehler $= \pm 4{,}77''$, woraus der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels für mittleres Gewicht in (14) S. 169 berechnet wurde: $m = \pm 0{,}93''$

Württembergische Triangulierung.

In Württemberg hat schon im vorigen Jahrhundert *Bohnenberger* (1765—1831, vgl. Einleitung S. 13) privatim trigonometrische Messungen und Berechnungen gemacht. Im Schwarzwald mass *Bohnenberger* meist mit einem Sextanten, indem er oft hohe Bäume bestieg, doch gebrauchte er auch zuweilen einen englischen Theodolit. (s. „Allgemeine geograph. Ephemeriden“, 1. Band, 1798, S. 239, Einiges hierüber haben wir in *Jordan-Steppes*, „deutsches Vermessungswesen“ I, 265 angegeben.)

Später, 1816, wurde die *amtliche* Triangulierung des Königreichs Württemberg unter wissenschaftlicher Leitung von *Bohnenberger* begonnen. Über die hiezu gehörige Basismessung Solitude—Ludwigsburg haben wir schon in § 10. S. 74—75 berichtet. Die Winkelmessungen wurden mit einem 12zölligen *Reichenbach*schen Repetitions-Theodolit gemacht.

Die württembergische Triangulierung ist zwar für Landesvermessungs-Zwecke bis jetzt genügend gewesen, sie hat aber den Erwartungen nicht entsprochen, welche man an *Bohnenberger*s Namen zu knüpfen berechtigt ist, denn nach *Bohnenberger*s Tode, 1831, trat ein Rückgang ein, infolge dessen auch die Original-Dokumente der Messungen nicht erhalten wurden. („Gen.-Ber. d. Eur. Gr. für 1871“, S. 67.)

Das Wichtigste ist veröffentlicht in dem amtlichen Werk: „Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg, in wissenschaftlicher, technischer und geschichtlicher Beziehung auf Befehl der k. Regierung bearbeitet und mit deren Genehmigung herausgegeben, von *Conrad Kohler*, Professor, Trigonometer bei dem k. Katasterbureau, Stuttgart, *J. B. Cotta*scher Verlag. 1858“.

Weiteres haben wir gesammelt und dargestellt in *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen I“, S. 252—259, ferner ist eine neuere schätzbare Arbeit zu erwähnen: Über die Genauigkeit des Detail-Dreiecksnetzes in Württemberg, von Vermessungs-Kommissär Trigonometer *Steiff*, „Zeitschr. f. Verm. 1886“, S. 177—197.

Die badische Landes-Triangulierung

wurde etwa im Jahr 1816 begonnen, unter Leitung von Oberst *Tulla*, von welchem ein heute noch in Baden gebräuchliches graphisches Ausgleichungs-Verfahren herrührt, das wir in Band II, § 84. beschrieben haben. Im Jahr 1823 wurden mehrere Münchener Repetitions-Theodolite angeschafft (vgl. Band II, S. 143), mit welchen von da an alle Messungen gemacht sind. Nachdem die Mängel einer *ebenen* Triangulierungs-Berechnung. welche zuerst ausgeführt worden war, erkannt waren, wurden von 1841—1846 die Winkel grossenteils neu gemessen, und eine neue (sphärische) Triangulierungs-Berechnung mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate unternommen. Zugleich wurde im Jahr 1846 eine badische Basis bei Heitersheim gemessen (Fig. 4. S. 116), nachdem von 1820 an die bayerische Basis Speyer—Oggersheim benützt worden war. Der offizielle Dirigent der Vermessung war, als *Tullas* Nachfolger, Oberst *Klose*; der wissenschaftliche Teil der Vermessung ist aber die Arbeit von Obergeometer *Rheiner*. (vgl. „Badische Biographieen von *Weech*", Artikel *Tulla* und *Klose*.)

Das Hauptgerippe der badischen Triangulierung besteht aus einer langen Kette längs des Rheinthals, welche die badische Basis bei Heitersheim mit der Speyerer Basis verbindet und den Basis-Anschluss in die Ausgleichung aufnimmt, sowie auch *zwei* Azimute, mit welchen die zwei Grundlinien orientiert sind.

An dieses Hauptgerippe schliessen sich zahlreiche Partial-Netze an.

Die Netz-Ausgleichungen sind auf *Winkel* gegründet. Die Horizontproben wurden mit in das Netz gezogen. Das pfälzische Netz, das wir in unserem I. Bande § 70. bis §. 71. behandelt haben, und das kleine Beispiel von Band I. § 74. bringen das badische Winkel-Material zur Anschauung. Die amtliche badische Ausgleichung wurde jedoch viel schwerfälliger gemacht, wie wir in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungewesen I." S. 276 angegeben haben. Mittlere Winkel-Fehler wurden in der letzten Zeit (etwa 1850) nach der *Bayer*schen Formel S. 353 der „Küsten-Vermessung" berechnet.

Im Ganzen kann man den mittleren Winkelfehler der badischen Triangulierung annehmen:

$$m = \pm 0{,}75''$$

Dieses ist im Einzelnen gezeigt in *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen 1882", S. 277, worauf wir hier verweisen, sowie auf eine 1873 aus Veranlassung der „Europ. Gradmessung" ausgearbeitete autographisch vervielfältigte Denkschrift: „Triangulierung des Grossherzogtums Baden, in der Zeit von 1823—1852 ausgeführt von Oberst *Klose* und Obergeometer *Rheiner*, im Auftrage des Gr. Ministeriums des Innern, auf Grund der Akten des Gr. Kataster-Bureaus beschrieben und durch Revisions-Berechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate erläutert von *W. Jordan*, Professor der Geodäsie am Gr. Polytechnikum. Karlsruhe, Februar 1873." 68 S. 4° und 5 Tafeln. Auch ein Abschnitt in *Sydows* Berichten über den „kartographischen Standpunkt Europas" in *Petermanns* geogr. Mitteilungen, 1861, S. 468—470 ist auf amtliches Material gegründet.

Die badische Triangulierung ist in Hinsicht auf Messungs-Genauigkeit und Punkt-Festlegung, und Aufbewahrung der Original-Messungen die beste der drei süddeutschen Vermessungen. —

Über die

Hessen-Darmstädtische Triangulierung

berichtet *Eckhardt* im 12. Band, 1834, der „Astr. Nachr." S. 129, dass der mittlere Fehler des einzelnen Winkels $= 2{,}365''$ sei, wobei aber die Horizont-Abschlüsse (gyrus horizontis) als Bedingungs-Gleichungen in die Netz-Ausgleichung eingeführt wurden. Das hessische Netz hat meist die Anordnung von nahezu gleichseitigen Dreiecken, so dass die Anzahl der Horizont-Abschlüsse etwa gleich $1/3$ der Anzahl der Winkel ist, wir nehmen deswegen schätzungsweise nach (7) § 169:

$$m = 2{,}365'' \sqrt{\frac{5}{6}} = 2{,}12''$$

Von der hessischen Triangulierung giebt auch *Fischer* in seinem „Lehrbuch der höheren Geodäsie, dritter Abschnitt, Giessen 1846“, S. 93—105 ein Ausgleichungs-Beispiel. Es ist ein Netz mit 5 Seiten-Gleichungen, 14 Dreiecks-Gleichungen und 5 Horizont-Gleichungen, zusammen 24 Netz-Bedingungsgleichungen. Die Quadratsumme der 45 Winkel-Korrektionen in Centesimal-Sekunden, welche einzeln angegeben sind, ist = 373,2, also der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels $= \sqrt{\frac{373{,}2}{24}} = 3{,}94$ und näherungsweise mittlerer Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels, weil Horizont-Gleichungen benützt sind; nach (7) S. 169:

$$m = 3{,}94 \sqrt{\frac{40}{45}} = \pm 3{,}71$$

Dieses sind Centesimal-Sekunden, also in Sexagesimal Sekunden:

$$m = 0{,}324 \times 3{,}71 = \pm 1{,}20''$$

In Hessen war bei der Ausgleichung der Triangulierung ein eigentümliches, von *Schleiermacher* herrührendes, Eliminations-Verfahren im Gebrauch, über welches wir verweisen auf *Helmert* in *Schlömilch*s „Zeitschr. f. M. u. Ph. 1869“, S. 201—205; ferner *Nell*, „Zeitschr. f. Verm. 1881“, S. 1—11 und S. 109—121, und *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen I“, S. 286.

1853—1863 Nassauische Landes-Triangulierung.

Aus den Schlussfehlern der 15 Hauptdreiecke berechnet man: $m = \pm 0{,}78''$ (Weiteres s. „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 313—322.)

Mecklenburgische Landes-Vermessung.

Von 1853—1873 wurde eine Triangulierung ohne eigene Basismessung im Anschluss an die Nachbarstaaten unternommen, und 1882 veröffentlicht in einem amtlichen Werke: „Grossherzogl. Mecklenb. Landes-Vermessung, ausgeführt unter wissenschaftlicher Leitung von *F. Paschen*, herausgegeben (nach *Paschen*s Tode) von *Köhler*, *Bruhns* und *Foerster*, Schwerin 1882. I. Teil: Die trigonometrische Vermessung; II. Teil: Das Coordinaten-Verzeichnis (hiezu auch noch III. Teil: Die astronomischen Bestimmungen, und IV. Teil: Die geometrischen Nivellements)“. Litteratur-Bericht hierüber mit Dreiecks-Netz in 1 : 2 000 000 s. „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 355 bis 367. Aus 57 Dreiecks-Schlüssen berechnet man den mittleren Winkelfehler:

$$m = \pm 1{,}15''$$

In Österreich (vgl. Einleitung S. 13)

werden etwa seit 1860 umfassende trigonometrische Arbeiten ersten Rangs durch das k. k. militär-geographische Institut ausgeführt, wie die 4 bis jetzt erschienenen Bände „Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. k. militär-geographischen Instituts in Wien“, I. Band 1871, II. Band 1873, III. Band 1875, zeigen. Eine Basismessung in Dalmatien haben wir bereits auf S. 165 erwähnt. Die Triangulierungs-Methode ist in Bezug auf Messung und Ausgleichung die *Bessel*sche. Auf S. 186 des I. Bandes wird angegeben, dass für ein Netz mit 64 Bedingungs-Gleichungen die absolute Summe der 133 Richtungs-Korrektionen = 45,10 ist, man hat daher den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels nach (23) S. 171:

$$m = 1{,}2533 \sqrt{2} \frac{45{,}10}{\sqrt{133 \cdot 64}} = \pm 0{,}87''$$

Ähnliche Berechnungen kann man auch anstellen nach den Angaben von Band II, S. 162, Band III, S. 241 der zitierten österreichischen Veröffentlichungen.

Schweizer Triangulierungen (vgl. Einleitung S. 13).

Über die ältesten Vermessungen seit 1550 bis zur Neuzeit berichtet das Werk: „Geschichte der Vermessungen in der Schweiz von *Rudolf Wolf*, Zürich 1879". (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 367—370). Aus der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts stammt eine Triangulierung von *Eschmann*, für welche man aus 69 geschlossenen Dreiecken den mittleren Winkelfehler findet: $m = \pm 3{,}24''$

Mit dem Eintritte der Schweiz in die internationale Erdmessung wurde eine neue Triangulierung unternommen, welche veröffentlicht ist in dem Werke: „Das schweizerische Dreiecks-Netz", herausgegeben von der schweizerischen geodätischen Kommission. I. Band: Die Winkelmessungen und Stations-Ausgleichungen, Zürich 1881 (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 456—457) und II. Band: „Die Netz-Ausgleichung" (bearbeitet von *Koppe*), Zürich 1884. Auf S. 39 dieses Bandes ist angegeben der mittlere Fehler einer auf der Station ausgeglichenen Richtung nach den Angaben der Netz-Ausgleichung $= \pm 0{,}90''$, also der mittlere entsprechende Winkelfehler:

$$m = 0{,}90\sqrt{2} = \pm 1{,}27''$$

Ferner sind auf S. 36—37 die mittleren Gewichtseinheits-Fehler aus der Stations-Ausgleichung $\mu_1 = \pm 1{,}33''$ und aus der Netz-Ausgleichung $\mu_2 = \pm 1{,}64''$ angegeben, es ist also das Verhältnis: $\mu_2 : \mu_1 = 1{,}24$

Zum Schluss unserer vorstehenden Einzel-Angaben haben wir noch die Triangulierungs-Berichte der internationalen Erdmessung zu erwähnen:

„Rapport sur les triangulations par *A. Ferrero*, als Annex II des General-Berichtes für 1883", und:

„Comptes rendus de la session de la commission permanente à Nice 1887. Supplément, Rapport sur les triangulations par le Général *A. Ferrero*.

Diese Berichte enthalten alle Haupt-Triangulierungspunkte mit Breiten und Längen (auf 1″ abgerundet) und Triangulierungs-Karten von Europa in 1 : 10 000 000 und 1 : 8 000 000.

Der zweite Bericht hat auch teilweise historische Einleitungen zu den Triangulierungen.

Anmerkung zu § 25. — § 27.

Fehler-Quotienten für Dreiecks-Seiten. Die Fehler von Dreiecks-Seiten oder auch von anderen geodätischen Linien, werden häufig in Quotienten-Form angegeben, auch wenn der Fehler-Quotient an sich noch nicht massgebend für die Güte der Messungen ist.

Wenn s eine Seitenlänge, und Δs deren Fehler ist, so nennt man häufig den Quotienten $\frac{\Delta s}{s}$ den *relativen Fehler* von s, den man entweder als Reciproke 1 : . . . oder besser als Dezimalbruch angiebt. Wenn z. B. $s = 300\,000^m$ und $\Delta s = 1{,}5^m$ ist, so hat man:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{1{,}5}{300\,000} = \frac{1}{200\,000} = 5 \text{ Milliontel oder} = 5 \text{ Millimeter für 1 Kilometer.}$$

In der logarithmischen Rechnung zählt man gewöhnlich in Einheiten der 7. Stelle:

$$log\,(1 \pm 0{,}000\,005) = \pm 0.000\,0021\cdot7$$

$$\text{kürzer geschrieben} = \pm 21\cdot7$$

Die Beziehung zwischen logarithmischen Fehlern und Seiten-Fehlern ist:

$$\Delta \log s = 0{,}43429\,\frac{\Delta s}{s}$$

wobei 0,43429 der logarithmische Modul ist. Hiernach haben wir zur Übersicht Folgendes zusammengestellt:

Milliontel oder Millimeter auf 1 Kilometer	$\frac{\Delta s}{s} = 1 : n$		$\log\left(1 + \frac{\Delta s}{s}\right)$
1	0,000 001	1 : 1000 000	0,000 0004·3
2	0,000 002	1 : 500 000	8·7
3	0,000 003	1 : 333 333	13·0
4	0,000 004	1 : 250 000	17·4
5	0,000 005	1 : 200 000	21·7
6	0,000 006	1 : 166 667	0,000 0026·1
7	0,000 007	1 : 142 857	30·4
8	0,000 008	1 : 125 000	34·7
9	0,000 009	1 : 111 111	39·1
10	0,000 010	1 : 100 000	43·4

§ 28. Schluss-Betrachtungen über Haupt-Triangulierung.

Die neueren Basis-Messungen sind technisch so fein behandelt, dass der mittlere unregelmässige Messungs-Fehler nicht mehr als etwa 1 Millimeter für 1 Kilometer beträgt. Dieses geht aus den auf S. 163—165 gesammelten mittleren Fehlern deutlich hervor, denn wir haben für den mittleren Fehler einer Messung von 1 Kilometer, in runden Durchschnitts-Zahlen:

S. 163	für *Bessels* Apparat	$m = \pm 1{,}3^{mm}$
S. 164	„ den neuen spanischen Apparat	$0{,}9^{mm}$
S. 164	„ „ nordamerikanischen „	$1{,}0^{mm}$
	Durchschnitt	$m = \pm 1{,}1^{mm}$

Für Doppelmessung vermindert sich dieses noch auf $1{,}1 : \sqrt{2} = 0{,}8^{mm}$ für 1^{km}, indessen wollen wir den runden Wert $m = \pm 1^{mm}$ für 1^{km} als unregelmässigen von der Messung selbst herrührenden Fehler einer neueren Basis nun annehmen.

Ganz anders, nämlich ungünstiger, steht es mit den *regelmässigen*, namentlich den metronomischen Fehlern der Basis-Messungen.

Wir haben auf S. 83 berichtet, dass bei der *Bessel*schen Basis-Messung bei Königsberg, 1834, der Hauptfehler, nämlich die Vergleichung mit einem von anderwärts gegebenen Normalmass, nur = 0,6 Milliontel der Länge gefunden wurde, und ähnliche kleine Werte wurden auch später mit dem *Bessel*schen Apparate gefunden (wie wir z. B. in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen", I, S. 132—133 zusammengestellt haben); indessen sind wahrscheinlich jene älteren Vergleichungen in Bezug auf Genauigkeit überschätzt, wie auf S. 106 berichtet wurde, indem später mit dem *Bessel*schen Apparate Unsicherheiten bis zu $0{,}02^{mm}$ auf eine Stange von 4^{m}, d. h. 5 Milliontel der Länge, gefunden wurden.

Die beiden betrachteten Fehlerteile, nämlich m = mittlerer unregelmässiger Fehler und m' = mittlerer regelmässiger Fehler, setzen sich in bekannter Weise zum Gesamtfehler M für die Länge L zusammen, nach der Gleichung:

$$M = \sqrt{(m\sqrt{L})^2 + (m'\,L)^2} = \sqrt{m^2\,L + m'^2\,L^2} \qquad (1)$$

Nehmen wir nach dem bisherigen $m = 1^{mm}$ für $L = 1^{km}$ und als Minimum m' ebenfalls $= 1^{mm}$ für $L = 1^{km}$, so wird:

$$M = \sqrt{L + L^2}$$

Zur Übersicht ist hernach folgendes berechnet:

Gemessene Basis-Länge L	Mittlerer unregelm. Fehler $m\sqrt{L}$	Mittlerer regelmäss. Fehler $m'\,L$	Mittlerer Gesamt-Fehler M	Verhältnis $\frac{M}{L}$
				Milliontel
1^{km}	$\pm 1{,}00^{mm}$	$\pm 1{,}00^{mm}$	$\pm 1{,}41^{mm}$	1,41
2^{km}	$1{,}41^{mm}$	$2{,}00^{mm}$	$2{,}24^{mm}$	1,12
5^{km}	$2{,}24^{mm}$	$5{,}00^{mm}$	$5{,}48^{mm}$	1,10
10^{km}	$3{,}16^{mm}$	$10{,}00^{mm}$	$10{,}49^{mm}$	1,05

Hieraus ist zu sehen, dass bei grösseren Längen neben den systematischen Fehlern m', die unregelmässigen Messungs-Fehler m fast verschwindend sind; dieses ist noch viel mehr der Fall, als die vorstehende Tabelle zeigt, weil wir hier nur m' $= 1$ Milliontel angenommen haben, während es in Wirklichkeit das 5—10fache hievon betragen kann.

Durch solche Überlegungen wird der Fingerzeig gegeben, dass die Technik auf einem falschen Wege war, als sie Apparate, wie den älteren *Brunner*schen und ähnliche schuf (vgl. S. 93 und S. 99).

Die Messungs-Geschwindigkeiten sind nach der Zusammenstellung S. 165—167 sehr verschieden; die äussersten Werte scheinen zu sein:

Älterer *Brunner*scher Apparat . . . . . . $v =$ 30 Meter in 1 Stunde
*Bessel*s Apparat, Landes-Aufnahme bei Meppen $v =$ 300 „ „ „ „

Die Hauptsache der Basis-Messung, nämlich der metronomische Teil, liegt nun in den Händen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus (vgl. S. 57—59 und S. 64), und in dieser Beziehung werden ohne Zweifel die nächsten Basis-Messungen sich wesentlich von den früheren unterscheiden.

Die mittleren Basis-Fehler betragen nach den vorstehenden Untersuchungen mindestens 1—2 Milliontel, können aber bei metronomischen Unsicherheiten und konstanten Fehler-Einflüssen (Keildruck u. s. w.), welche namentlich in früherer Zeit vorkamen, auch auf das 5—10fache, d. h. auf etwa 10 Milliontel steigen, und solche Fehler pflanzen sich in Triangulierungen unmittelbar nach dem Verhältnis der Längen fort.

Nachdem dieses erkannt ist, haben wir zu überlegen, welche Fehler durch die Triangulierung selbst, d. h. durch die Winkelmessung, entstehen und wie sich diese Fehler fortpflanzen.

Betrachten wir hiezu zuerst den mittleren Winkel-Fehler, so haben wir für neuere gute Triangulierungen nach S. 180—184 in runden Zahlen etwa Folgendes:

S. 180	Dänische Gradmessung	$m = \pm 0{,}71''$
S. 182	Preussische Landes-Aufnahme	0,64
S. 184	„ geodätisches Institut	0,74
	Durchschnitt	$m = 0{,}71''$

Unter solche Beträge scheint der mittlere Fehler eines Winkels in diesem Sinne

(auf der Station ausgeglichen, aus Netz-Widersprüchen berechnet) sich zur Zeit noch nicht erheblich herunterbringen zu lassen; doch ist dieses auch nicht dringlich, denn mit dieser Genauigkeit lassen sich die vorhandenen Bedürfnisse befriedigen, und wenn bei Triangulierungen grosse Fehler auftreten, so werden die Gründe oft anderswo zu suchen sein, als in der nackten Winkel-Messung.

Nun fragt es sich weiter, wie die Winkel-Fehler in Dreiecks-Ketten oder Netzen die Schluss-Ergebnisse beeinflussen.

Die nötigsten Theorieen hiezu haben wir bereits in § 19. und 20. (S. 119—132) entwickelt, und wir haben z. B. auf S. 131 gefunden, dass eine *einfache* Kette gleichseitiger Dreiecke, deren Längs-Erstreckung das 10fache ($v = 10$) einer Dreiecks-Seite hat, mit einem mittleren Fehler von $1,62\sqrt{10}$ Millionteln $= 5$ Millionteln trianguliert werden kann. Dabei ist der mittlere Winkel-Fehler zunächst rund $= 1''$ angenommen, und da derselbe in Wirklichkeit kleiner, nämlich nach dem obigen etwa $= \pm 0,7''$ gemacht werden kann, auch Ketten mit Seiten-Gleichungen und sonstigen Verstärkungen noch günstiger werden können, braucht obiger Wert von 5 Millionteln nur als obere Grenze solcher Fehler-Fortpflanzung angenommen zu werden.*)

Ausser solchen theoretischen Untersuchungen der Fehler-Fortpflanzung in Dreiecks-Ketten haben wir aber auch noch einen guten Anhaltspunkt zur Genauigkeits-Beurteilung, in den mannigfachen formell streng nach der M. d. kl. Q. berechneten mittleren Fehlern von Dreiecks-Seiten und Polar-Coordinaten, welche in den früheren Bänden der Triangulierung der preussischen Landes-Aufnahme veröffentlicht sind.

Wir haben dieselben gesammelt in *„Jordan-Steppes* Deutsches Vermessungswesen" I, S. 138—139 und entnehmen von dort Folgendes:

Mittlere Fehler von Polar-Coordinaten.

Citat. Preuss. Landes-Triangulierung.	Polar-Coordinate.	Entfernung D	Mittl. Fehler von D in Einheiten der 7ten Log.-Dezimale	Mittl. Fehler der Azimut-Übertragung
Triangulation 1858 I S. 181-185	Pillakerberg-Algeberg	125^{km}	$\pm$ 15·3	$\pm$ 0,63″
„ 1859 I S. 114-118	Sommerfeld-Pillakerberg	135	9·2	0,68
„ 1861-62 I S. 274-280	Lautern-Mahren	125	9·0	0,55
„ 1865 I S. 377-381	Klorberg-Culm	180	8·2	0,68
„ 1867 I S. 416-418	Kistowo-Krummenflies	100	5·7	0,33
	Durchschnitt	133^{km}	$\pm$ 9·5	$\pm$ 0,57″

Wegen des Verhältnisses $\mu_2 : \mu$ nach (29) und (30) S. 173, welches für die preussische Landes-Triangulierung im Mittel $\mu_2 : \mu = 1,5$ ist, hat man diese Durchschnitts-Werte noch zu vergrössern, so dass man hat:

$$\Delta \log D = \pm 14{\cdot}2 \qquad \Delta \alpha = \pm 0,85''$$

Statt $\Delta \log D$ in Einheiten der 7ten Logarithmen-Dezimale kann man auch den mittleren Entfernungs-Fehler ΔD selbst, oder das Verhältnis $\Delta D : D$ angeben,

*) Hiezu ist auch eine nach dem Druck unseres § 20. erschienenen Veröffentlichung des geodätischen Instituts anzuführen: „Gewichts-Bestimmungen für Seiten-Verhältnisse in schematischen Dreiecks-Netzen", von Dr. *Paul Simon*. Berlin 1889.

denn es ist nach den Bemerkungen am Schlusse von § 27. S. 188—189, für $\Delta \log \Delta =$ 14·2, der Fehler-Quotient:

$$\frac{\Delta D}{D} = 0{,}000\,0033 = 3{,}3 \text{ Milliontel oder } 3{,}3^{mm} \text{ für } 1^{km}.$$

Dieses gilt zunächst für mittlere Entfernungen von 133^{km} und ist auf andere Entfernungen nach dem Quadratwurzel-Gesetz von S. 131 zu übertragen.

(Über erfahrungsmässige Genauigkeit von Dreiecks-Seiten selbst, welche durch die Ketten der Landes-Aufnahme trigonometrisch übertragen wurden, vgl. „*Jordan-Steppes*, Deutsches Vermessungswesen“ I, S. 138.)

Vergleichung zwischen Basis-Fehlern und Triangulierungs-Fehlern.

Nach all diesen, auf die Erfahrungen der letzten Jahrzehnte bei unseren besten Triangulierungen gegründeten Überlegungen können wir zu der sehr wichtigen Vergleichung zwischen Basis-Fehlern und Triangulierungs-Fehlern übergehen.

Wenn eine Triangulierungs-Kette (wie z. B. auf S. 134) zwei gleichartig gemessene Grundlinien in der Entfernung von $200—300^{km}$ verbindet, so kann bei den besten neueren Genauigkeits-Verhältnissen die Anschluss-Differenz wohl etwa 10 Milliontel ausmachen, wozu die Triangulierung selbst den Hauptteil beitragen wird. Wenn jedoch die beiden Grundlinien nicht mit demselben Apparat, oder überhaupt nicht metronomisch gleichartig gemessen sind, so können aus den Basis-Messungen selbst Anschluss-Fehler hervorgehen, welche den Triangulierungs-Fehlern gleichkommen und dieselben sogar übertreffen.

Dieses ist ein Ergebnis, welches auf den ersten Blick überraschend ist, welches aber auf die unzweifelhaften Erfahrungen gegründet ist.

Astronomisch-geodätische Netze.

Aus dem früheren Beispiele von S. 134 haben wir die rein trigonometrische Anordnung und Ausgleichung der Ketten und Netze der preussischen Triangulierungen kennen gelernt. Die ersten Ketten werden zuerst selbständig angelegt und für sich ausgeglichen. Gelangen mehrere Ketten zum Polygonschluss, so muss die Schlusskette nicht nur ihre eigenen Fehler, sondern auch den Anschluss-Zwang zur Ausgleichung bringen, und ähnlich verhält es sich mit dem Füllnetze zwischen den Umfangs-Ketten.

Dieses Verfahren rührt davon her, dass man wegen des allmählichen Fortschrittes der Arbeit (in diesem Sinne etwa seit 1865) und wegen der praktischen Bedürfnisse der Kleinvermessungen, nicht warten konnte, bis das Ganze fertig ist und zusammen ausgeglichen werden kann.

Die *astronomische* Orientierung der ganzen preussischen Landes-Triangulierung beruht seit 1865 auf dem *einen* Punkte Rauenberg bei Berlin mit einem Azimute nach dem Marienturm in Berlin.

Die so gewonnenen Coordinaten der Landes-Aufnahme werden wohl noch Jahrzehnte lang die Grundlagen aller praktischen Vermessungen bilden.

Inzwischen wird in Preussen bereits mit einer *neuen* Ausgleichung geodätischer Dreiecks-Ketten mit Zuziehung zahlreicher *astronomischer* Messungen begonnen, wie aus dem nachstehenden Übersichts-Netze zu ersehen ist, welches dem „allgemeinen

Arbeitsplane des geodätischen Institutes für das nächste Decennium", Berlin 1886, entnommen ist. (Abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm." 1886, S. 497—506.)

Fig. 1.

Astronomisch-geodaetisches Netz I Ordnung.

Massstab 1 : 10 800 000.

Die Verbindung *astronomischer* und geodätischer Messungen kann nur teilweise zur Versicherung und Verfeinerung von Triangulierungs-Netzen dienen. Z. B. einzelne astronomisch gemessene Breiten, Längen oder Azimute, tragen zur geodätischen Punkt-Bestimmung wenig bei, weil z. B. ein Breiten-Fehler von 0,1″ bereits 3 Meter auf der Erd-Oberfläche ausmacht, und dazu kommt noch die *Lot-Abweichung*, welche meist mehrere Sekunden beträgt.

Anders verhält es sich mit der Verbindung astronomisch gemessener Längen und Azimute. Wenn nämlich an den beiden Endpunkten einer Dreiecks-Kette, bzw. der daraus abgeleiteten geodätischen Linie, die beiden Azimute α_1 und α_2 und zugleich der Längen-Unterschied λ astronomisch gemessen sind, so besteht eine von den Lot-Abweichungen und von den Erd-Dimensionen nahezu *unabhängige* Gleichung (nach *Laplace*, im wesentlichen $\alpha_1 - \alpha_2 = \lambda \sin \varphi$ für die Mittelbreite φ).

Soweit diese Theorieen in den Rahmen unseres Buches gehören, werden wir dieselben später behandeln.

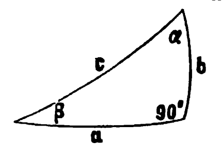
Kapitel II.*)

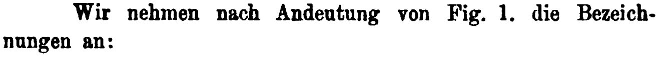
Mathematische Hilfsmittel der geodätischen Entwicklungen.

§ 29. Sphärische Trigonometrie.

1. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

Fig. 1.
Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.





Wir nehmen nach Andeutung von Fig. 1. die Bezeichnungen an:

Hypotenuse $= c$ Gegenwinkel $= 90°$
Kathete $= a$ Gegenwinkel $= \alpha$
Kathete $= b$ Gegenwinkel $= \beta$

Hiemit hat man folgende Gleichungen:

$$\cos c = \cos a \cos b \tag{1}$$

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \tag{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c} \tag{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c} \tag{4}$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a} \tag{5}$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \quad \text{und} \quad \cos \beta = \sin \alpha \cos b \tag{6}$$

In dieser Gestalt prägen sich diese Gleichungen leicht dem Gedächtnis ein, wenn man die Analogieen mit den Formeln der *ebenen* Trigonometrie im Auge behält.

Z. B. würde man für ein *ebenes* rechtwinkliges Dreieck, entsprechend Fig. 1., schreiben:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{a}{b}$$

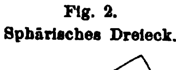
und nun braucht man nur noch auswendig zu wissen, dass *sinus* im Zähler *sinus* und im Nenner *sinus*, sowie *tangens* entsprechend *tangens* und *sinus* hat, endlich dass *cos* im Zähler und im Nenner beidemal *tang* hat, um die Formeln (3) (4) (5) immer aus dem Gedächtnis anschreiben zu können.

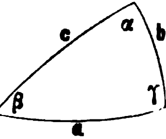
Ferner merke man sich, dass die Formel (1) dem pythagoräischen Satze der Ebene, d. h. $c^2 = a^2 + b^2$ entspricht, und dass die beiden Beziehungen (2) und (6) der Beziehung in der Ebene $\alpha + \beta = 90°$ entsprechen.

Ausserdem hat man die *Neper*sche Regel: Wenn man die Stücke α, c, β, $90° - a$, $90° - b$, $\alpha \ldots$ in cyklischer Aufeinanderfolge betrachtet, so ist der Cosinus irgend eines Stückes gleich dem Sinus-Produkt der getrennten und gleich dem Cotangenten-Produkt der anliegenden Stücke.

*) Wir schalten dieses kleine Kapitel hier ein, um die gebräuchlichsten Formeln für geodätische Entwicklungen zur Hand zu haben und nach Bedarf citieren zu können.

II. Allgemeines sphärisches Dreieck.


Fig. 2. Sphärisches Dreieck.



Nach Fig. 2. bezeichnen wir:

Seite a mit dem Gegenwinkel α
" b " " " β
" c " " " γ

Man hat zuerst folgende 4 Gleichungs-Gruppen, welche je *vier* Stücke enthalten, und zur Bestimmung eines Dreiecks aus drei gegebenen Stücken genügen:

Cosinus-Satz

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Sinus-Satz

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \qquad (8)$$

Cotangenten-Satz

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \beta \\ \operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos \beta + \sin \beta \operatorname{cotg} \gamma \\ \operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos \beta + \sin \beta \operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{cotg} \beta \\ \operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \gamma \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Polar-Cosinus-Satz

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Nicht unmittelbar zur Auflösung eines Dreiecks dienend, aber anderweitig oft brauchbar, ist eine Beziehung zwischen *fünf* Stücken des Dreiecks, welche in sechsfacher Anwendung folgende Gruppe giebt:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \cos \beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha \\ \sin b \cos \gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta \\ \sin c \cos \alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma \\ \sin a \cos \gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha \\ \sin b \cos \alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta \\ \sin c \cos \beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \gamma \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Weiter haben wir die wichtigen *Gauss*schen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} &= \sin \frac{b + c}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} &= \sin \frac{b - c}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} &= \cos \frac{b + c}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} &= \cos \frac{b - c}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Diese Gleichungen lassen verschiedene Anwendungen zu; wenn z. B. b, c und α gegeben und β, γ, a zu berechnen sind, so bestimmt man zuerst $\frac{\beta + \gamma}{2}$ und $\frac{\beta - \gamma}{2}$, womit man auch β und γ hat, und dann $\frac{a}{2}$ auf mehr als einem Wege.

Wenn wir hiebei zur vorübergehenden Abkürzung die Zähler und Nenner der entstehenden Brüche mit Z, N, sowie Z', N' bezeichnen, so haben wir:

$$tang\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{Z}{N} \tag{13}$$

$$tang\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{Z'}{N'} \tag{14}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{Z}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{N}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\ , \quad \sin\frac{a}{2} = \frac{Z'}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \tag{15}$$

Wenn hier $\frac{a}{2} < 45°$ ist, so ist die Bestimmung aus $\sin\frac{a}{2}$ vorzuziehen, und wenn $\frac{a}{2} > 45°$, so ist $\cos\frac{a}{2}$ günstiger.

Bei der Doppelbestimmung, die man auch für $\cos\frac{a}{2}$ selbst oder für $\sin\frac{a}{2}$ hat, gelten zu günstigster Auswahl dieselben Regeln, wie bei der Berechnung der Hypotenuse eines ebenen Dreiecks, wie bereits in unserem Band II. S. 191—192 angegeben ist.

Der sphärische Exzess eines sphärischen Dreiecks ist der Überschuss der Winkelsumme über 180°, d. h.:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180° \tag{16}$$

Wenn r der Kugelhalbmesser und F die krumme Oberfläche des sphärischen Dreiecks ist, so findet man daraus den Exzess ε nach der Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2}\varrho \tag{17}$$

wo $\varrho = 206\,265''$ ist.

§ 30. Reihen-Entwicklungen.

In der höheren Geodäsie spielen konvergierende Reihen eine wichtige Rolle.

Als Grundlage der konvergierenden Potenz-Reihen betrachten wir zuerst die *Taylor*sche Reihe mit der Veränderlichen x und mit der Änderung h derselben:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \tag{1}$$

Dabei bedeutet $f'(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$ nach x, $f''(x)$ die zweite Ableitung u. s. w., ferner ist:

$$\left.\begin{array}{ll} 1! = 1 & 6! = 720 \\ 2! = 1.2 = 2 & 7! = 5\,040 \\ 3! = 1.2.3 = 6 & 8! = 40\,320 \\ 4! = 1.2.3.4 = 24 & 9! = 362\,880 \\ 5! = 1.2.3.4.5 = 120 & 10! = 3\,628\,000 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Beispielshalber schreiben wir hiefür die sehr oft gebrauchten trigonometrischen Anwendungen:

$$\left.\begin{aligned}
sin(x+h) &= sin\,x + h\,cos\,x - \frac{h^2}{2}\,sin\,x - \frac{h^3}{6}\,cos\,x + \frac{h^4}{24}\,sin\,x + \ldots\\
sin(x-h) &= sin\,x - h\,cos\,x - \frac{h^2}{2}\,sin\,x + \frac{h^3}{6}\,cos\,x + \frac{h^4}{24}\,sin\,x - \ldots\\
cos(x+h) &= cos\,x - h\,sin\,x - \frac{h^2}{2}\,cos\,x + \frac{h^3}{6}\,sin\,x + \frac{h^4}{24}\,cos\,x - \ldots\\
cos(x-h) &= cos\,x + h\,sin\,x - \frac{h^2}{2}\,cos\,x - \frac{h^3}{6}\,sin\,x + \frac{h^4}{24}\,sin\,x + \ldots\\
tang(x+h) &= tang\,x + h\,\frac{1}{cos^2 x} + h^2\,\frac{sin\,x}{cos^3 x} + \frac{h^3}{3}\,\frac{cos^2 x + 3\,sin^2 x}{cos^4 x} + \ldots\\
cotg(x+h) &= cotg\,x - h\,\frac{1}{sin^2 x} + h^2\,\frac{cos\,x}{sin^3 x} - \frac{h^3}{3}\,\frac{sin^2 x + 3\,cos^2 x}{cos^4 x} + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Auf die zuerst angegebene *Taylor*sche Reihe (1) gründet sich auch die *Maclaurin*sche Reihe:

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}\,f''(0) + \frac{x^3}{3!}\,f'''(0) \quad (4)$$

wobei $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ u. s. w. diejenigen Werte sind, welche entstehen, wenn in $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. w. die Veränderliche x gleich Null gesetzt wird.

Von besonderer Wichtigkeit ist die *Binomial-Reihe*:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots \quad (5)$$

Die Coëfficienten dieser Reihe heissen *Binomial-Coëfficienten*, und haben folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned}
\binom{n}{1} &= \frac{n}{1}\\
\binom{n}{2} &= \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\\
\binom{n}{3} &= \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3} \text{ u. s. w.}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Binomial-Reihe gilt allgemein für ganze oder gebrochene positive oder negative Exponenten n und konvergiert immer, wenn $x < 1$ ist. Einige häufig gebrauchte Anwendungen dieser Reihe sind folgende:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \quad (7)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \quad (8)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots \quad (9)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots \quad (10)$$

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 \pm \ldots \quad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \mp \frac{63}{256}x^5 + \frac{231}{1024}x^6 \mp \ldots \quad (12)$$

Logarithmische Reihe.

$$\left.\begin{array}{l} l(1+x) = +x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \\ l(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) \end{array}\right\} \quad (13)$$

Hiebei ist l das Zeichen für natürliche Logarithmen mit der Basis $e = 2,71828\,1828$, oder es ist $l\,z$ der natürliche Logarithmus von z. Dagegen bedeutet $log\,z$ den *Brigg*schen Logarithmus mit der Basis 10, und es besteht die Beziehung:

$$log\,z = \mu\,(l\,z) \quad (14)$$

Der Faktor μ heisst der *Modulus* des *Brigg*schen Logarithmen-Systems, und es ist:

$$\mu = log\,e = \frac{1}{l\,10} = 0{,}434\,294\,4819 \quad , \quad log\,\mu = 9.637\,7843{\cdot}113 \quad (15)$$

Anmerkung. Der logarithmische Modulus wird sehr häufig mit M bezeichnet; wir werden jedoch M als Zeichen für den Meridian-Krümmungshalbmesser nehmen, und sind dadurch teilweise gehindert, M zugleich als Zeichen für den Modulus zu benützen.

Goniometrische Reihen.

In den Potenzreihen für $sin\,x$, $cos\,x$ u. s. w. ist x als Bogen in analytischem Masse zu nehmen.

Zur gegenseitigen Verwandlung zwischen Winkelmass in Graden, Minuten, Sekunden einerseits, in analytisches Mass andererseits, dient die Zahl ϱ, bzw. die drei Zahlen ϱ° ϱ' ϱ''.

Wenn x°, x', x'' ein Winkelwert in geometrischem Mass, d. h. in Graden, Minuten oder Sekunden ist, und x der entsprechende Wert in analytischem Masse, so bestehen die Gleichungen:

$$x = \frac{x^\circ}{\varrho^\circ}, \qquad x = \frac{x'}{\varrho'}, \qquad x = \frac{x''}{\varrho''}$$

Die Zahlenwerte sind;

$$\left.\begin{array}{ll} \pi = 3{,}141\,592\,653\,5898 & log\,\pi = 0.497\,1498{\cdot}727 \\ \varrho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}295\,779\,5131^\circ & log\,\varrho^\circ = 1.758\,1226{\cdot}324 \\ \varrho' = \frac{180.60'}{\pi} = 3\,437{,}746\,77078' & log\,\varrho' = 3.536\,2738{\cdot}828 \\ \varrho'' = \frac{180.60.60''}{\pi} = 206\,264{,}806\,247'' & log\,\varrho'' = 5.314\,4251{\cdot}332 \\ \text{Für neue (Centesimal-) Teilung des Quadranten ist:} & \\ \varrho = \frac{200^\circ}{\pi} = 63{,}661\,977\,237^\circ & log\,\varrho^\circ = 1.803\,8801{\cdot}230 \end{array}\right\} \quad (16)$$

In diesem Sinne ist x in den folgenden Reihen aufzufassen:

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad , \quad cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

oder entwickelt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \cdots \qquad (17)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628000} + \cdots \qquad (18)$$

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382\,x^{11}}{155925} + \cdots \qquad (19)$$

$$\operatorname{cotang} x = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \cdots\right) \qquad (20)$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots \qquad (21)$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31x^6}{15120} + \cdots\right) \qquad (22)$$

$$\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + \frac{63x^{11}}{2816} + \cdots \qquad (23)$$

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots \qquad (24)$$

$$l \sin x = l\,x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + \cdots \qquad (25)$$

$$l \cos x = \quad - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \cdots \qquad (26)$$

$$l \operatorname{tang} x = l\,x + \frac{x^3}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \cdots \qquad (27)$$

Diese Reihen können manchmal dazu dienen, für einen sehr kleinen Winkel unmittelbar *log sin* u. s. w. zu berechnen, z. B. für x'' in Sekunden:

$$\log \sin x'' = \log \frac{x''}{\varrho''} - \frac{\mu}{6\,\varrho''^2}\,x''^2 - \frac{\mu}{180\,\varrho''^4}\,x''^4 - \cdots \qquad (28)$$

Dabei ist für Einheiten der 7. Logarithmenstelle:

$$\log \frac{\mu}{6\,\varrho''^2} = 5{\cdot}230\,7828 - 10 \qquad \log \frac{\mu}{180\,\varrho''^4} = 3{\cdot}12481 \qquad (28\,\mathrm{a})$$

Verwandlung der Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ in *sin* und *cos* der Vielfachen von x.

1) für gerade Exponenten:

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}\cos 2x + \binom{2n}{n-2}\cos 4x - \cdots\right) \qquad (29)$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{1}{2}\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}\cos 2x + \binom{2n}{n-2}\cos 4x + \cdots\right) \qquad (30)$$

2) für ungerade Exponenten:

$$\sin^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n+1}{n}\sin x - \binom{2n+1}{n-1}\sin 3x + \cdots\right) \qquad (31)$$

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n+1}{n}\cos x + \binom{2n+1}{n-1}\cos 3x + \cdots\right) \qquad (32)$$

In diesen Reihen ist so lange fortzufahren, bis ein Coëfficient = 0 wird. Die Anwendung bis zur 8. Ordnung giebt:

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \\
\sin^3 x &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \\
\sin^4 x &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \\
\sin^5 x &= \frac{5}{8}\sin x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{1}{16}\sin 5x \\
\sin^6 x &= \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x \\
\sin^7 x &= \frac{35}{64}\sin x - \frac{21}{64}\sin 3x + \frac{7}{64}\sin 5x - \frac{1}{64}\sin 7x \\
\sin^8 x &= \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{7}{32}\cos 4x - \frac{1}{16}\cos 6x + \frac{1}{128}\cos 8x
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \\
\cos^3 x &= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x \\
\cos^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \\
\cos^5 x &= \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x \\
\cos^6 x &= \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x \\
\cos^7 x &= \frac{35}{64}\cos x + \frac{21}{64}\cos 3x + \frac{7}{64}\cos 5x + \frac{1}{64}\cos 7x \\
\cos^8 x &= \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{7}{32}\cos 4x + \frac{1}{16}\cos 6x + \frac{1}{128}\cos 8x
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Verwandlung der sin und cos der Vielfachen von x in Potenzen von sin x und cos x.

$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5}\cos^{n-5} x \sin^5 x \ldots \quad (35)$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - \ldots \quad (36)$$

Hieraus findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x \\
\sin 3x &= 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x \\
\sin 4x &= 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x \\
\sin 5x &= 5\sin x\cos^4 x - 10\sin^3 x\cos^2 x + \sin^5 x \\
\sin 6x &= 6\sin x\cos^5 x - 20\sin^3 x\cos^3 x + 6\sin^5 x \\
\sin 7x &= 7\sin x\cos^6 x - 35\sin^3 x\cos^4 x + 25\sin^5 x\cos^2 x - \sin^6 x\cos x \\
\sin 8x &= 8\sin x\cos^7 x - 56\sin^3 x\cos^5 x + 56\sin^5 x\cos^3 x - 8\sin^7 x\cos x
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\
\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \\
\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\
\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x \\
\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 x + 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x \\
\cos 7x = \cos^7 x - 21\cos^5 x \sin^2 x + 35\cos^3 x \sin^4 x - 7\cos x \sin^7 x \\
\cos 8x = \cos^8 x - 28\cos^6 x \sin^2 x + 70\cos^4 x \sin^4 x - 28\cos^2 x \sin^6 x + \sin^8 x
\end{array}\right\} \quad (38)$$

Abgekürzte Potenz-Reihen mit mittlerem Argument.

Man kann in einer Potenzreihen-Entwicklung nach dem *Taylor*schen Satz immer Glieder sparen durch Einführung eines *mittleren* Arguments, wie sich so zeigen lässt:

Man setzt zuerst: $x + h = \left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}$

und dann: $x = \left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}$

Dann hat man nach dem *Taylor*schen Satze (1):

$$f(x+h) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} f'\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x+\frac{h}{2}\right) + \ldots$$

$$f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} f'\left(x+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x+\frac{h}{2}\right) - \ldots$$

Daraus findet man durch Subtraktion und Addition:

$$f(x+h) - f x = h f'\left(x+\frac{h}{2}\right) + h^3 \ldots \quad (39)$$

$$\frac{f(x+h)+f(x)}{2} = f\left(x+\frac{h}{2}\right) + h^2 \ldots \quad (40)$$

In (39) kommt kein Glied mit h^2 vor und in (40) ist kein Glied mit h; diese Glieder wurden durch Einführung von $x + \frac{h}{2}$ als Argument von f und von f' erspart.

Als einfache Anwendung der Gleichung (39) nehmen wir z. B.:

$$\sin u - \sin v = (u - v)\cos\frac{u+v}{2} + (u-v)^3 \ldots \quad (40\,a)$$

Will man hier nur bis auf $(u - v)^2$ einschl. genau rechnen, so kann man in dem Glied mit $(u - v)$ nach Belieben u oder v schreiben, z. B.:

$$\sin u = \sin v + (u - v)\cos u + (u-v)^3 \ldots \quad (41)$$

oder

$$\sin u = \sin v + (u - v)\cos v + (u-v)^3 \ldots \quad (42)$$

Diese zwei letzten Formeln sind *gleich* genau.

Eine andere Anwendung dieses Prinzips ist folgende:

Wenn $f(x, x')$ eine Funktion von x und x' ist, welche nach Potenzen von $(x' - x)$ entwickelt werden kann, so ist:

$$f(x, x') = f(x, x) + (x' - x) f'(x) + (x' - x)^2 \ldots$$

oder

$$f(x, x') = f(x', x') + (x - x') f'(x') + (x - x')^2 \ldots$$

Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt:

$$f(x, x') = \frac{f(x, x) + f(x', x')}{2} + (x' - x)\frac{f'(x) - f'(x')}{2} \tag{43}$$

Es unterscheiden sich aber $f'(x)$ und $f'(x')$ selbst nur um Glieder von der Ordnung $(x' - x)$, also ist:

$$f(x, x') = \frac{f(x, x) + f(x', x')}{2} + (x' - x)^2 \ldots \tag{44}$$

Dabei sind $f(x, x)$ und $f(x', x')$ diejenigen 2 Werte von $f(x, x')$, welche entstehen, wenn bzw. $x' = x$ und $x = x'$ gesetzt wird.

Folgendes sind zwei einfache Beispiele hiefür:

$$\sqrt{x\,x'} = \frac{x + x'}{2} + (x' - x)^2 \ldots \tag{45}$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + x'^2}{2}} = \frac{x + x'}{2} + (x' - x)^2 \ldots \tag{46}$$

oder in Worten: das geometrische Mittel, das Mittel der Methode der kleinsten Quadrate und viele andere Mittel zweier Zahlen x und x' sind dem arithmetischen Mittel gleich, auf Glieder von der Ordnung $(x' - x)$ einschliesslich genau.

Zum Schluss dieser Betrachtungen erinnern wir daran, dass Näherungsformeln, welche nur auf *ein* Glied genau sein sollen, am einfachsten in der Gestalt von *Differentialformeln* angeschrieben werden; wenn man z. B. $\sin u - \sin v$ nur auf Glieder von der Ordnung $u - v$ genau haben will, so setzt man:

$$\sin u - \sin v = d \sin v \quad \text{oder} \quad = - d \sin u$$

und:

$$u - v = d v \quad \text{oder} \quad = - d u$$

und hat damit:

$$d \sin u = \cos u\, d u \quad \text{oder} \quad d \sin v = \cos v\, d v$$

woraus entsteht:

$$\sin u - \sin v = (u - v) \cos u \quad \text{oder} \quad = (u - v) \cos v \tag{47}$$

in Übereinstimmung mit (41) und (42).

Reihen-Umkehrung.

Wenn eine konvergierende Potenzreihe vorliegt von dieser Form:

$$y = A\,x + B\,x^2 + C\,x^3 + D\,x^4 + \ldots \tag{48}$$

so kann man die Aufgabe stellen, umgekehrt x durch eine konvergierende Reihe nach Potenzen von y darzustellen.

In erster Näherung giebt die Reihe (48) jedenfalls, nach x aufgelöst:

$$x = \frac{y}{A} + y^2 \ldots$$

also

$$y = A\,x + B\left(\frac{y}{A} + y^2 \ldots\right)^2 + \ldots$$

und dieses giebt nach x aufgelöst:

$$x = \frac{y}{A} - \frac{B}{A^3}\,y^2 + \ldots$$

In dieser Weise kann man fortfahren, und Schritt für Schritt höhere Glieder $y^3 \dots y^4 \dots$ u. s. w. hinzufügen, was in besonderen Fällen oft nützlich ist. Man kann das Verfahren auch allgemeiner darstellen, indem die Auflösung der Reihe (48) diese Form annehmen soll:

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \dots \qquad (49)$$

Hier haben die Coëfficienten α, β, γ, $\delta \dots$ folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \dfrac{1}{A}, & \beta = \left(-\dfrac{B}{A^3}\right) \\ \gamma = \left(\dfrac{2B^2}{A^5} - \dfrac{C}{A^4}\right), & \delta = \left(-\dfrac{5B^3}{A^7} + \dfrac{5BC}{A^6} - \dfrac{D}{A^5}\right) \end{array}\right\} \qquad (50)$$

In ähnlicher Weise kann man auch *zwei* Reihen mit einander vergleichen; es sei gegeben:

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots = A'y + B'y^2 + C'y^3 + \dots \qquad (50)$$

Dann kann man x so darstellen:

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \dots \qquad (51)$$

wo die Coëfficienten α, β, $\gamma \dots$ folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{A'}{A}, \quad \beta = \left(\dfrac{B'}{A} - \dfrac{BA'^2}{A^3}\right) \\ \gamma = \left(\dfrac{C'}{A} - \dfrac{2BA'B'}{A^3} - \dfrac{CA'^3}{A^4} + \dfrac{2B^2A'^3}{A^5}\right) \end{array}\right\} \qquad (52)$$

§ 31. Interpolation.

Wir betrachten verschiedene Werte einer Funktion y, welche gewissen in arithmetischer Progression stehenden Werten des Arguments x entsprechen und nehmen die Bezeichnungen nach folgender Anordnung:

Argument x	Funktion y	Differenzen Δy		
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$.
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	.
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$.
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	.
		Δy_3	.	.
x_4	y_4	.	.	.
.	.	.	.	.

Es handelt sich nun um irgend einen *Zwischen*wert x_{n+z}, welcher zwischen x_n und x_{n+1} liegt, wobei also z ein echter Bruch ist; und es soll der hiezu gehörige Wert y berechnet werden. Man hat hiezu die bekannte Interpolations-Formel:

$$y = y_n + z\,\Delta y_n + \frac{z}{1}\,\frac{z-1}{2}\,\Delta^2 y_n + \frac{z}{1}\,\frac{z-1}{2}\,\frac{z-2}{3}\,\Delta^3 y_n + \dots \qquad (1)$$

In der Geodäsie hat man nur selten nötig, höhere Differenzen zu berücksichtigen; als Beispiel der Anwendung haben wir jedoch das zuweilen auftretende Bedürfnis, einen Wert so genau als möglich aus der 10stelligen Logarithmen-Tafel zu entnehmen (s. unten (5)—(6)).

Mit Beschränkung auf die zweite Differenz schreiben wir nach (7):

$$y = y_n + z\,\Delta y_n - \frac{z(1-z)}{2}\,\Delta^2 y_n \qquad (2)$$

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir annehmen, man solle aus der Tafel Seite [26] des Anhangs den Funktionswert m entnehmen für die Breite $\varphi = 52^\circ\,37'\,32{,}6709''$.

Da in jener Tafel S. [26] das Intervall $\Delta\varphi = 10'$ ist, schreiben wir zunächst:

$$\varphi = 52^\circ\,37'\,32{,}6709'' = 52^\circ\,37{,}544515', \text{ oder } z = 0{,}7544515$$

Im Übrigen bekommt man nach S. [26] mit der vorstehenden Formel (2):

für $\varphi = 52^\circ\,30'$ 5 818 380,341^m

„ erste Differenz $18\,544{,}271 \times 0{,}7544515 = +\,13\,990{,}753$

„ zweite „ $-\,0{,}523\,\frac{0{,}754 \times 0{,}246}{2} = -\,0{,}049$

$m = 5\,832\,371{,}045^m$ (3)

Man kann für das letzte Glied der Formel (2) in jedem vorkommenden Falle Hilfstäfelchen berechnen, ähnlich wie dieses auch für erste Differenzen am Rande von Tabellen meist geschieht.

In manchen Fällen ist es nützlich, die Interpolations-Formel (1) auf eine andere Form zu bringen, nämlich:

$$y = y_n + z\left(\Delta y_n - \frac{1-z}{2}\,\Delta^2 y_n\right) \qquad (4)$$

Hier wird eine Verbesserung $-\frac{1-z}{2}\Delta^2 y_n$ der ersten Differenz Δy_n berechnet, und dann mit der verbesserten ersten Differenz weiter gerechnet, wie bei einfacher Proportional-Interpolation.

Hiernach ist folgendes berechnet:

$z =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{(1-z)}{2} =$	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,00

(5)

Die weitere Anwendung zeige ein Beispiel:

Es liege vor $x = 15^\circ\,30'\,34{,}67492''$ und man soll den zugehörigen Wert $y = \log\sin x$ aus der 10stelligen Logarithmen-Tafel bestimmen.

Indem wir voraussetzen, dass der Leser die fragliche 10stellige Tafel zur Hand habe, setzen wir die Rechnung hiernach an, mit Ausrechnung des Proportionalteils in 6stelliger logarithmischer Nebenrechnung:

$x = 15^\circ\,30'\,34{,}67492'' = 15^\circ\,30'\,30'' + 0{,}467\,492\,(10'')$

Δy $\Delta^2 y$

+ 758·868

$\log\sin 15^\circ\,30'\,30'' = 9.427\,1265{\cdot}273$ — 0·141

+ 758·727

+ 0·038 (Korrekt. 0,27 × 0·141)

758·765

2.880107 = log 758·765

9.669774 = log 0,467492

354·717 2.549881

$\log\sin 15^\circ\,30'\,34{,}67492'' = 9.427\,1619{\cdot}990$ (6)

Wir bedienen uns für solche Zwecke eines autographierten Schemas, diesem Beispiele entsprechend, welches ein Hilfstäfelchen nach (5), und alles Konstante vorgedruckt enthält. Man kann nach diesem Schema in gleicher Weise sowohl y zu gegebenem x als auch x zu gegebenem y bestimmen; in letzterem Falle hat man nur zuerst einen Näherungswert von x zu benützen, um die Korrektion für zweite Differenz ausrechnen zu können.

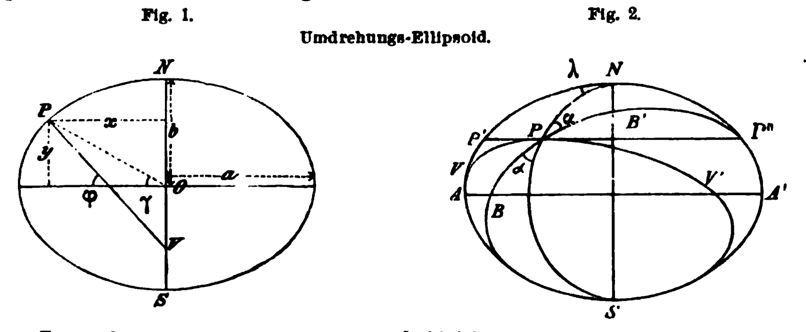
Für grössere Rechnungen mit 10stelligen Logarithmen werden die einzelnen Logarithmen in dem erwähnten Schema behandelt, welches dann eine Beilage zu der Haupt-Rechnung bildet.

Kapitel III.

Das Erd-Ellipsoid, (Sphäroid).

§ 32. Erklärungen und Grund-Masse.

Die ideale Erdoberfläche, welche unseren Berechnungen zu Grunde gelegt wird, ist ein Umdrehungs-Ellipsoid, d. h. diejenige Fläche, welche durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe erzeugt wird.



Zuerst kommen folgende Grössen und Gleichungen in Betracht, welche zu den vorstehenden Fig. 1. und Fig. 2. in Beziehung stehen.

Die grosse Halbaxe a (1)

die kleine Halbaxe b (2)

die Abplattung $\alpha = \frac{a - b}{a}$ (3)

die Excentricität $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ (4)

die zweite Excentricität $e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$ (5)

Die Excentricität e in diesem Sinne ist eine absolute Zahl, und erscheint als Verhältnis der halben linearen Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ zur *grossen* Halbaxe a.

Indem man die halbe lineare Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ auch zur *kleinen* Halb-

Axe b in Beziehung setzt, kommt man auf den Wert e' nach (5), welcher für unsere Berechnungen oft vorteilhafter ist, als e nach (4).

Zwischen e und e' bestehen die leicht nachweisbaren Beziehungen:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \qquad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \tag{6}$$

Ferner geben (1) (2) (4) und (5):

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \qquad a^2 = b^2 (1 + e'^2) \tag{7}$$

$$(1 - e^2)(1 + e'^2) = 1 \tag{7a}$$

Die Abplattung α steht zur Excentricität e in den Beziehungen:

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} \qquad e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \tag{8}$$

Da in der Abplattung α die grosse Axe bevorzugt ist, könnte man daran denken, auch einen Wert $\alpha' = \frac{a - b}{b}$ einzuführen. Dieses ist nicht gebräuchlich, dagegen benützt man häufig einen Quotienten von ähnlichem Sinne, der aber a und b gleichmässig behandelt, nämlich:

$$n = \frac{a - b}{a + b} \tag{9}$$

Ausser den beiden Halbaxen a und b führen wir auch noch eine dritte Grösse c ein, entsprechend der Gleichung:

$$c = \frac{a^2}{b} \quad \text{oder} \quad c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{10}$$

Diese Grösse c hat bekanntlich die Bedeutung des Krümmungs-Halbmessers im Nordpol oder Südpol der Meridian-Ellipse, und schmiegt sich daher dem Umdrehungs-Ellipsoid in der Nähe der Pole sehr an; diese Grösse c wird sich später bei manchen Entwicklungen nützlich erweisen.

In Fig. 1. haben wir noch zu betrachten die Normale PV, welche die Richtung der Schwerkraft auf dem Ellipsoid anzeigt, und insbesondere den Winkel φ, welchen die Normale mit der grossen Axe macht, d. h.:

die geographische Breite φ (11)

Sehr verschieden hievon ist der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel γ, welcher *geocentrische* Breite heisst, und in der Erdmessung fast nie gebraucht wird (dagegen kommt γ bei astronomischen Parallaxen-Rechnungen vor; die Formel für $\varphi - \gamma$ und für den geocentrischen Halbmesser OP haben wir mitgeteilt in „Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung", Berlin 1885, S. 296—298).

Ferner sind nach Fig. 2. noch folgende Begriffe festzustellen:

die Umdrehungs-Axe NS,
der Parallelkreis $P'P''$,
Meridiane NAS, NPS u. s. w.,
geographischer Längen-Unterschied λ,
verschiedene Normalschnitte, z. B. BPB',
das Azimut α eines Normalschnittes.

Die Besselschen Erd-Dimensionen.

Wie wir schon in der Einleitung S. 9 angegeben haben, werden die von *Bessel* im Jahre 1841 durch Ausgleichung berechneten Erd-Dimensionen sehr allgemein angewendet, und wir werden in der Folge dieselben stets benützen.

Aus formellen Gründen rechnet man mit solchen Grund-Massen so scharf als möglich; es waren aber die letzten Stellen lange schwankend (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 22—27 und S. 90, sowie „Zeitschr. f. Verm. 1889", S. 359).

Nach den zwei neueren amtlichen Werken: „Rechnungs-Vorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme, erste Ordnung", Berlin 1878, S. 4 und „Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Instituts, Lot-Abweichungen", Berlin 1886, S. 4, bilden wir folgende Zusammenstellung der Grundzahlen mit ihren 10stelligen Logarithmen:

$$a = 6\,377\,397{,}15500 \text{ Meter} \qquad \log a = 6.804\,6434{\cdot}637$$
$$b = 6\,356\,078{,}96325 \text{ „} \qquad \log b = 6.803\,1892{\cdot}839$$
$$\frac{a^2}{b} = c = 6\,398\,786{,}84939 \text{ „} \qquad \log c = 6.806\,0976{\cdot}435$$

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{,}152\,8128} \qquad \log \frac{1}{\alpha} = 2.475\,8930{\cdot}907$$
$$\alpha = 0{,}003\,342\,773\,181\,579 \qquad \log \alpha = 7.524\,1069{\cdot}093 - 10$$
$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2 = 0{,}006\,674\,372\,230\,614 \qquad \log e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237 - 10$$
$$\frac{a^2-b^2}{b^2} = e'^2 = 0{,}006\,719\,218\,797\,971 \qquad \log e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833 - 10$$
$$1 - e^2 = 0{,}993\,325\,627\,769\,386 \qquad \log(1-e^2) = 9.997\,0916{\cdot}404 - 10$$
$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} = 0{,}996\,657\,226\,850 \qquad \log \sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458{\cdot}202 - 10$$
$$\frac{a-b}{a+b} = n = 0{,}001\,674\,184\,800\,816 \qquad \log n = 7.223\,8033{\cdot}949 - 10$$

Im Anschluss hieran geben wir noch die wichtigsten *mathematischen Konstanten.*

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,5898 \qquad \log \pi = 0.497\,1498{\cdot}727$$
$$\varrho^\circ = \frac{180}{\pi} = 57{,}295\,779\,5131 \qquad \log \varrho^\circ = 1.758\,1226{\cdot}324$$
$$\varrho' = \frac{180 \times 60}{\pi} = 3\,437{,}746\,770\,78 \qquad \log \varrho' = 3.536\,2738{\cdot}828$$
$$\varrho'' = \frac{180 \times 60 \times 60}{\pi} = 206\,264{,}806\,247 \qquad \log \varrho'' = 5.314\,4251{\cdot}332$$
$$\text{Logarithmischer Modul, } \mu = 0{,}434\,294\,481\,90 \qquad \log \mu = 9.637\,7843{\cdot}113 - 10$$

Ferner zur Verwandlung von Toisen in Meter:

$$1 \text{ Meter} = \frac{443{,}296}{864} \text{ Toisen} \qquad \begin{aligned} \log 443{,}296 &= 2.646\,6938{\cdot}125 \\ \log 864 &= 2.936\,5137{\cdot}425 \end{aligned}$$
$$1 \text{ Meter} = 0{,}513\,074\,074 \text{ Toisen} \qquad \log(M, T) = 9.710\,1800{\cdot}700 - 10$$
$$1 \text{ Toise} = 1{,}949\,036\,310 \text{ Meter} \qquad \log(T, M) = 0.289\,8199{\cdot}300$$

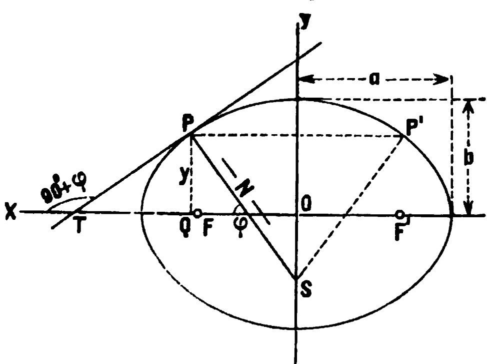
Einige 10stellige Logarithmen:

$$\log 2 = 0.301\,0299{\cdot}957 \qquad \log 6 = 0.778\,1512{\cdot}504$$
$$\log 3 = 0.477\,1212{\cdot}547 \qquad \log 7 = 0.845\,0980{\cdot}400$$
$$\log 4 = 0.602\,0599{\cdot}913 \qquad \log 8 = 0.903\,0899{\cdot}870$$
$$\log 5 = 0.698\,9700{\cdot}043 \qquad \log 9 = 0.954\,2425{\cdot}094$$

§ 33. Die Haupt-Krümmungs-Halbmesser.

Die Gleichung der Ellipse in rechtwinkligen Coordinaten, nach Andeutung von Fig. 1., ist bekanntlich:

Fig. 1.
Umdrehungs-Erd-Ellipsoid.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \tag{1}$$

Die Differentiierung dieser Gleichung giebt:

$$\frac{2\,x\,d\,x}{a^2} + \frac{2\,y\,d\,y}{b^2} = 0 \text{ oder } \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \tag{2}$$

Andererseits hat der Differential-Quotient $\frac{d\,y}{d\,x}$ eine Beziehung zum Normalen-Winkel φ, nämlich (nach Fig. 1.):

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\,cotg\,\varphi \text{ oder } \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) zusammen geben:

$$\frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \text{ oder } \frac{b^2 x^2}{a^2 y^2} = \frac{a^2 \cos^2\varphi}{b^2 \sin^2\varphi} \tag{4}$$

Nun hat man in (1) und (4) zwei Gleichungen, welche nach x^2 und y^2 aufgelöst werden können; ehe wir jedoch dieses thun, wollen wir durchaus statt zweier Halbaxen a und b nur *eine* Halbaxe a, und dazu die Excentricität einführen, nämlich nach (7) § 32. S. 206:

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \tag{5}$$

Damit kann man (1) und (4) so umformen:

$$x^2 (1 - e^2) + y^2 = a^2 (1 - e^2) \tag{6}$$

$$x^2 (1 - e^2)^2 \sin^2\varphi - y^2 \cos^2\varphi = 0 \tag{7}$$

Wenn man die erste dieser zwei Gleichungen mit $\cos^2\varphi$ multipliziert, und dann beide Gleichungen addiert, so bekommt man:

$$x^2 (1 - e^2) (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - e^2 \sin^2\varphi) = a^2 (1 - e^2) \cos^2\varphi$$

$$x^2 = \frac{a^2 \cos^2\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi} \tag{8}$$

Wenn man in ähnlicher Weise die zwei Gleichungen (6) und (7) dazu benützt, um x^2 zu eliminieren, so bekommt man:

$$y^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \tag{9}$$

In den Formeln (8) und (9) ist der Nenner $1 - e^2 \sin^2 \varphi$ gemeinschaftlich. Dieser Nenner, oder auch dessen Quadratwurzel, wird uns noch öfter beschäftigen, weshalb dafür ein stehendes Zeichen eingeführt werden soll, nämlich:

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = W \tag{10}$$

und damit hat man aus (8) und (9):

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \qquad y = \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi}{W} \tag{11}$$

Nach diesem gehen wir über zur Bestimmung der *Krümmungs-Halbmesser* des Ellipsoids, und zwar zuerst des Krümmungs-Halbmessers der Meridian-Ellipse, den wir mit M bezeichnen wollen. Die analytische Geometrie bietet hiezu die Formel:

$$M = \frac{\left(1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}} \tag{12}$$

Den hiezu nötigen ersten Differential-Quotienten haben wir bereits in (3) gebraucht, nämlich:

$$\frac{d y}{d x} = - \operatorname{cotg} \varphi \quad , \quad 1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \tag{13}$$

Die zweite Ableitung hievon giebt zunächst:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d \varphi}{d x} \tag{14}$$

und hiezu hat man nach (10) und (11):

$$\frac{d W}{d \varphi} = \frac{- e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{W}$$

$$\frac{d x}{d \varphi} = \frac{a}{W^2} \left(- \sin \varphi \, W - \cos \varphi \frac{d W}{d \varphi}\right) = - \frac{a}{W^3} \sin \varphi (1 - e^2)$$

Setzt man dieses in (14) ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{1}{\sin^3 \varphi} \frac{W^3}{a (1 - e^2)} \tag{15}$$

Nun kann man aus (13) und (15) die Formel (12) zusammen setzen, und bekommt mit Weglassung des für uns bedeutungslosen Vorzeichens:

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{W^3} \tag{16}$$

Dieses ist der erste Haupt-Krümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids; der zweite Haupt-Krümmungs-Halbmesser, welcher sich auf die Krümmung quer zum Meridian, also von West nach Ost bezieht, kann ohne weitere Rechnung durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung gefunden werden (nach *Helmert* „Höhere Geodäsie“ I, S. 56):

Wir betrachten in Fig. 1. (S. 208) zuerst den Parallelkreis PP' für die Breite

[illegible] dass alle in diesem Parallelkreis gezogenen Flächen-Normalen sich in [illegible] S der Axe schneiden.

[illegible] Querkrümmungs-Bogen, welcher in P rechtwinklig zum Meridian ist, muss [illegible] Parallelkreis PP' in P berühren, und deswegen sind zwei einander [illegible] nahe liegende Gerade PS auch Normalen des Querkrümmungs-Bogens in P. [illegible] der Schnittpunkt zweier einander unendlich naher Normalen einer Kurve als [illegible]ungs-Mittelpunkt der Kurve gilt, so ist PS der Krümmungs-Halbmesser des [illegible]krümmungs-Bogens, oder kurz, es ist $PS = N$ der Querkrümmungs-Halbmesser [illegible] Umdrehungs-Ellipsoids in dem Punkte P.

Indem wir die Länge dieses Querkrümmungs-Halbmessers nun mit N bezeichnen, haben wir nach Fig. 1. und nach Gleichung (11):

$$\frac{x}{\cos\varphi} = N = \frac{a}{W} \tag{17}$$

Nachdem wir so die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N nach (16) und (17) bestimmt haben, wollen wir als zunächst wichtig, ihren Quotienten betrachten, d. h.:

$$\frac{N}{M} = \frac{W^2}{1-e^2} = V^2 \tag{18}$$

Wenn man hier die Bedeutung von W nach (10) und auch e'^2 nach (6) § 32. S. 206 einführt, so erhält man:

$$\frac{W^2}{1-e^2} = \frac{1-e^2 \sin^2\varphi}{1-e^2} = \frac{1-e^2+e^2\cos^2\varphi}{1-e^2} = 1+e'^2\cos^2\varphi = V^2 \tag{19}$$

Den so bestimmten Wert V^2 bzw. V werden wir auch sonst noch öfter benützen, namentlich an Stelle des früher zuerst angenommenen W, und bemerken als Beziehung zwischen W und V:

$$W = V\sqrt{1-e^2} \tag{20}$$

Setzt man dieses nebst c von (10) § 32. S. 206 in die Ausdrücke (16) und (17) für N und M, so erhält man:

$$N = \frac{c}{V} \qquad M = \frac{c}{V^3} \tag{21}$$

Der Quotient $N : M = V^2$ ist in der Geodäsie sehr wichtig, denn je näher dieser Quotient gleich 1 ist, desto mehr ist es gestattet, die Erde unter der betreffenden Breite als eine *Kugel* zu betrachten. Zur Gewinnung einer Übersicht wollen wir einige Werte hiefür ausrechnen:

$\varphi = 0°$ $\quad \frac{N}{M} = 1{,}0067 = V^2$
.. 30° 1,0050
.. 45° 1,0034
.. 60° 1,0017
.. 90° 1,0000

Die Werte V^2 sind von 1 ziemlich verschieden, unter 45° um etwa $^1/_3$ %; und nur in der Nähe der Erdpole ($\varphi = 90°$) wäre in Hinsicht auf die Krümmungs-Verhältnisse ein sehr günstiges Feld für Geodäsie.

Trotzdem giebt es sehr viele Fälle, wo es sich nur um kleine Korrektionen *zweiter* Ordnung handelt, in welchen der Quotient $N : M$ doch hinreichend $= 1$ gesetzt, d. h. die Erde als Kugel behandelt werden darf.

In solchen Fällen nimmt man einen Mittelwert der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N an, am einfachsten das geometrische Mittel:

$$r = \sqrt{M\,N} = \frac{c}{V^2} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2\varphi} \tag{22}$$

Dieser Wert r heisst der *mittlere Krümmungs-Halbmesser* für die betreffende Breite φ.

Will man r statt durch V^2 durch das frühere W^2 ausdrücken, so hat man:

$$r = \sqrt{M\,N} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1 - e^2 \sin^2\varphi} \tag{22a}$$

Tafel-Berechnung für die Krümmungs-Halbmesser.

Einzelne Werte $\log W$, $\log V$, und damit $\log M$ u. s. w. lassen sich geradezu nach den betreffenden geschlossenen Formeln ausrechnen; die Werte W oder V werden aber so oft gebraucht, dass es sich wohl lohnt, ein für allemal Tabellen hiefür zu berechnen, und dann empfiehlt es sich auch, *Reihen*-Entwicklungen anzuwenden.

Nehmen wir zuerst $W^2 = 1 - e^2 \sin^2\varphi$, so bekommt man dafür nach (13) § 30. S. 198 die logarithmische Reihe:

$$\log\frac{1}{W^2} = \mu\, e^2 \sin^2\varphi + \frac{\mu\, e^4}{2}\sin^4\varphi + \frac{\mu\, e^6}{3}\sin^6\varphi + \frac{\mu\, e^8}{4}\sin^8\varphi + \dots \tag{23}$$

wo $\mu = 0{,}43429\dots$ der logarithmische Modulus ist. Die Ausrechnung der Coëfficienten mit dem *Bessel*schen Werte e nach § 32. S. 207 giebt für Einheiten der 7. Logarithmen-Decimale:

$$\log \mu\, e^2 = 4{\cdot}462\,1947{\cdot}350 \quad , \quad \log\frac{\mu\, e^4}{2} = 1{\cdot}985\,5751{\cdot}6 \tag{23a}$$

$$\log\frac{\mu\, e^6}{3} = 9{\cdot}633\,8942 - 10 \; , \; \log\frac{\mu\, e^8}{4} = 7{\cdot}333\,366 - 10 \; , \; \log\frac{\mu\, e^{10}}{5} = 5{\cdot}0609 - 10 \tag{23b}$$

Setzt man hier $\varphi = 90°$, so hat man eine Rechenprobe, nämlich:

$$-\log(1 - e^2) = 0.002\,8986{\cdot}4303 + 96{\cdot}7336 + 0{\cdot}4304 + 0{\cdot}0022 + 0{\cdot}00001$$
$$= 0.002\,9083{\cdot}5965$$
$$\log(1 - e^2) = 9.997\,0916{\cdot}4035 - 10$$

Dieses stimmt hinreichend mit $\log(1 - e^2)$ nach § 32. S. 207.

Die Reihe (23) mit den Coëfficienten (23a) und (23b) konvergiert immer, und wie das vorstehende Beispiel mit $\varphi = 90°$ zeigt, braucht man auch am Ende des Quadranten nicht mehr als 4 Glieder, um sogar noch die zehnte Logarithmenstelle richtig zu haben, während am Anfange des Quadranten mit $\varphi = 0°$, $10°$ u. s. w. weniger Glieder genügen.

Für grössere Werte φ empfiehlt sich mehr als die vorstehende Reihe für $\log W^2$, eine entsprechende Reihe für $\log V^2$, nämlich:

$$\log V^2 = \mu\, e'^2 \cos^2\varphi - \frac{\mu\, e'^4}{2}\cos^4\varphi + \frac{\mu\, e'^6}{3}\cos^6\varphi - \frac{\mu\, e'^8}{4}\cos^8\varphi \dots \tag{24}$$

mit den Coëfficienten-Logarithmen für Einheiten der 7. Logarithmen-Decimale:

$$\log \mu\, e'^2 = 4{\cdot}465\,1030{\cdot}946 \quad , \quad \log\frac{\mu\, e'^4}{2} = 1{\cdot}991\,3918{\cdot}8$$
$$\log\frac{\mu\, e'^6}{3} = 9{\cdot}642\,6194 \; , \; \log\frac{\mu\, e'^8}{4} = 7{\cdot}344\,999 \; , \; \log\frac{\mu\, e'^{10}}{5} = 5{\cdot}0754 \tag{24a}$$

log W und *log V* stehen nach (20) in der sehr einfachen Beziehung:

$$log\ W - log\ V = log\sqrt{1-e^2} = 9.998\ 5458{\cdot}202,$$

man kann daher stets *log W* aus dem dazu gehörigen *log V* leicht ableiten und umgekehrt.

Man kann diese Reihen auch noch auf eine andere Form bringen, indem statt der Potenzen von $sin\,\varphi$ die *cos* der Vielfachen von φ einsetzt, nämlich nach (33) § 30. S. 200:

$$sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\,2\varphi \quad , \quad sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos\,2\varphi + \frac{1}{8}cos\,4\varphi \text{ u. s. w.}$$

Führt man dieses bis $sin^8\varphi$ ein und ordnet nach $cos\,2\varphi$, $cos\,4\varphi$ u. s. w., so erhält man aus (23):

$$-log\ W = A + B\,cos\,2\varphi + C\,cos\,4\varphi + D\,cos\,6\varphi + E\,cos\,8\varphi \tag{25}$$

$$A = 7264{\cdot}8126\,, B = -7270{\cdot}8923\,, C = 6{\cdot}08633\,, D = -0{\cdot}00679\,, E = 0{\cdot}00001$$

Wenn man hier $\varphi = 45° + (\varphi - 45°)$ setzt, um die Zählung von der Mittelbreite 45° an zu haben, so erhält man:

$$-log\ W = 7264{\cdot}8126 + 7270{\cdot}8923\,sin\,2(\varphi - 45°) - 6{\cdot}0863\,cos\,4(\varphi - 45°)$$
$$- 0{\cdot}0068\,sin\,6(\varphi - 45°)$$

Diese Form (25) ist insofern günstiger als die frühere Form (23) oder (24), als man damit in *einer* Rechnung stets die Bestandteile für *zwei* Werte φ erhält, welche symmetrisch gegen 45° liegen, z. B. $\varphi = 30°$ und $\varphi = 60°$ geben mit $\varphi - 45° = \mp 15°$:

$$\varphi = 30°,\ -log\ W = 7264{\cdot}8126 - 3635{\cdot}4462 - 3{\cdot}0432 + 0{\cdot}0068 = 3626{\cdot}3300$$
$$\varphi = 60°,\ -log\ W = 7264{\cdot}8126 + 3635{\cdot}4462 - 3{\cdot}0432 - 0{\cdot}0068 = 10897{\cdot}2088$$

also für $\varphi = 30°$ $log\ W = 9{\cdot}999\ 6373{\cdot}6700$
" " $\varphi = 60°$ $log\ W = 9{\cdot}998\ 9102{\cdot}7912$

Sobald einmal Näherungs-Werte von *log W* oder *log V* vorhanden sind, kann man die aufeinander folgenden Differenzen für eine Tabellen-Berechnung sehr gut durch eine Differential-Formel erhalten, z. B. für *log W*:

$$d\,log\ W = -\frac{\mu}{2}\frac{e^2\,sin\,2\varphi}{W^2}\frac{d\varphi}{\varrho} \tag{26}$$

Will man die Differenzen von 10′ zu 10′ haben, so ist $d\varphi = 10'$ und $\varrho = 3434{,}747$ zu nehmen und damit wird:

$$(\varDelta\,log\ W)_{10'} = [1.624\ 8909]\,\frac{sin^2\varphi}{W^2}$$

wobei die eckig geklammerte Zahl den Coëfficienten-Logarithmus bedeutet. Will man hiernach z. B. die Differenz $\varDelta\,log\ W$ zwischen $\varphi = 40°\,0'$ und $\varphi = 40°\,10'$ scharf berechnen, so nimmt man $2\varphi = 80°\,10'$ und $log\ W^2 = (log\ W_{40°} + log\ W_{40°\,10'})$, wozu letztere Werte bereits genähert vorhanden sein müssen; man berechnet so $\varDelta\,log\ W = 41{\cdot}655$, was mit 41·7 auf S. [12] der Tafel unseres Anhangs genügend stimmt.

Um hier auf diese in unserem Anhange Seite [2] bis [23] mitgeteilte Tafel der Werte W, V^2, M, N u. s. w. näher einzugehen, haben wir anzugeben, dass zuerst *log W* oder *log* V^2 nach den Reihen (25), (23) und (24) berechnet wurden für alle Werte $\varphi = 1°, 2°, 3° \ldots 89°, 90°$. Dann wurde nach der Formel (26) von 10′ zu 10′ interpoliert, unter Benützung anderer schon vorhandener Näherungs-Werte. Diese ganze Rechnung ist ursprünglich bis auf 0·001 genau angelegt; wegen der zahlreichen

Fehlerhäufungen kann jedoch die letzte angesetzte Stelle 0·1 doch nicht unbedingt verbürgt werden, denn dazu wäre von vornherein Rechnung auf 0·0001 mindestens nötig. Von 72°—90° haben wir nur noch 7. Decimalen (ohne 0·1) angegeben.

Ausser den Grundfunktionen W bzw. V haben wir nun in der Tafel Seite [2] bis [23] des Anhangs noch einige andere Funktionen berechnet, nämlich *log* [1], *log* [2], *log M*, *log N*, *log r*, deren Bedeutungen wir hier zusammenstellen:

Übersicht der Bezeichnungen in der Hilfstafel Seite [2] bis [23] unseres Anhangs.

φ = Geographische Breite

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$ oder $= \frac{c}{V^3}$ Meridian-Krümmungs-Halbmesser

$N = \frac{a}{W}$ oder $= \frac{c}{V}$ Querkrümmungs-Halbmesser

$r = \sqrt{MN}$ mittlerer Krümmungs-Halbmesser

$[1] = \frac{\varrho''}{M}$ Meridian-Krümmungs-Coëfficient

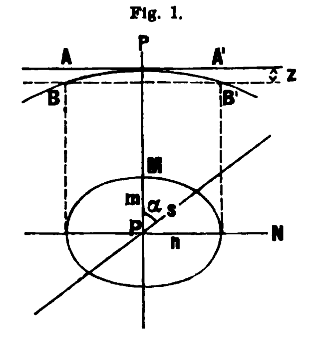
$[2] = \frac{\varrho''}{N}$ Querkrümmungs-Coëfficient.

§ 34. Krümmungs-Halbmesser für beliebiges Azimut.

Nachdem der Meridian-Krümmungs-Halbmesser M und der Querkrümmungs-Halbmesser N bestimmt sind, kann man auch den Krümmungs-Halbmesser R für irgend welches Azimut α leicht angeben, wenn man den *Euler*schen Satz als bekannt voraussetzt, nämlich:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \tag{1}$$

Fig. 1.



Dieser Satz wird in der analytischen Geometrie bewiesen, und wir wollen hier eine geometrisch anschauliche Begründung des Satzes geben, welche durch einige Nebenbetrachtungen auch zum strengen Beweise entwickelt werden kann.

In Fig. 1. sei P ein Punkt des Ellipsoids mit einer Berührungs-Ebene $A\,A'$ und einer Schnitt-Ebene $B\,B'$ parallel $A\,A'$.

Die Ebene $B\,B'$ giebt eine Schnitt-Ellipse, welche im unteren Teile von Fig. 1. dargestellt ist mit ihren Hauptaxen $P\,M$, $P\,N$ und einer dritten Richtung im Azimute α. Wenn nun der Abstand der beiden Ebenen $A\,A'$ und $B\,B'$ sehr *klein* ist, $= z$, so lässt sich die Ordinate z durch die Krümmungs-Halbmesser M, R, N, welche nach den drei betrachteten Richtungen stattfinden, dreifach ausdrücken, in bekannter Näherung (welche z. B. auch für die Erdkrümmung bei trigonometrischer Höhenmessung angewendet wird), nämlich:

$$z = \frac{m^2}{2\,M} = \frac{s^2}{2\,R} = \frac{n^2}{2\,N} \tag{2}$$

Dabei besteht für die Schnitt-Ellipse mit den Halbaxen m und n die Gleichung:

$$\frac{(s\cos\alpha)^2}{m^2} + \frac{(s\sin\alpha)^2}{n^2} = 1 \tag{3}$$

Durch Verbindung von (2) und (3) erhält man den bereits oben (1) geschriebenen *Euler* schen Satz.

Setzt man hier die Ausdrücke für M und N nach (21) § 33. S. 210 ein, nämlich:

$$M = \frac{c}{V^3} \text{ und } N = \frac{c}{V}$$

so giebt (1):

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{c} V^3 + \frac{\sin^2\alpha}{c} V = \frac{V}{c}(\cos^2\alpha\,(1 + e'^2\cos^2\varphi) + \sin^2\alpha)$$

$$R = \frac{c}{V}\,\frac{1}{1 + e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha} \text{ oder } = \frac{N}{1 + e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha} \tag{4}$$

Die zweite hier angewendete Form für R führt auch zu einer bequemen logarithmischen Näherungs-Formel; in erster Näherung hat man:

$$\log(1 + e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha) = \mu e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha + \ldots$$

also:

$$\log R - \log N = -\mu e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha + \ldots \tag{5}$$

Setzt man hier $\alpha = 0$, so geht R in den Meridian-Krümmungs-Halbmesser M über, also:

$$\log M - \log N = -\mu e'^2\cos^2\varphi + \ldots \tag{6}$$

oder $\log M - \log N = \log V^2$ (nach (18) § 33. S. 210)

Damit geben (5) und (6):

$$\log R - \log N = (\log V^2)\cos^2\alpha \tag{7}$$

und in gleicher Weise findet man auch:

$$\log R - \log M = -(\log V^2)\sin^2\alpha \tag{8}$$

Zu einem Beispiele wollen wir folgendes nehmen:

Zu einer trigonometrischen Höhenmessung zwischen dem Polytechnikum in Karlsruhe und dem trigonometrischen Punkte Hornisgrinde im Schwarzwald soll der Erdkrümmungs-Halbmesser in der fraglichen Sicht berechnet werden. Die Mittelbreite beider Punkte ist $\varphi = 48°\,48'\,26{,}6''$ und das mittlere Azimut $\alpha = 18°\,55'\,3{,}0''$. Mit diesen Werten findet man nach der strengen Formel (4):

$$\log R = 6.804\,3345$$

dagegen nach der Näherungsformel (7) oder (8)

$$\log R = 6.804\,3347$$

Die Näherungsformel (7) oder (8) giebt also hier den Wert $\log R$ nahezu auf 7 Stellen richtig; doch kann der Fehler auch etwas grösser werden. Um dieses besser beurteilen zu können, entwickeln wir die Formel (4) bis e'^4 und finden:

$$\left.\begin{aligned}\log R &= \log N - \mu e'^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha + \mu\frac{e'^4}{2}\cos^4\varphi\cos^4\alpha\\ &= \log N - [4\cdot465\,1031]\cos^2\varphi\cos^2\alpha + [1\cdot99139]\cos^4\varphi\cos^4\alpha\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wo die Zahlen in eckigen Klammern Coefficienten-Logarithmen bedeuten.

Man kann dieses auch auf folgende Form bringen:

$$log\ R = log\ N - cos^2\alpha\ (log\ V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} cos^4\varphi\ sin^2\alpha\ cos^2\alpha \qquad (10)$$

oder

$$log\ R = log\ M + sin^2\alpha\ (log\ V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} cos^4\varphi\ sin^2\alpha\ cos^2\alpha \qquad (11)$$

Nach diesen Formeln (9)—(11) ist die folgende Tafel berechnet worden.

Krümmungs-Halbmesser R für verschiedene Breiten φ und verschiedene Azimute α. Die Tafel giebt $log\ R$ für Meter.

Breite φ	Azimut α						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	6.80 1735	6.80 1929	6.80 2460	6.80 3187	6.80 3915	6.80 4448	6.80 4643
10°	1866	2055	2570	3274	3980	4498	4687
20°	2244	2416	2885	3527	4169	4641	4813
30°	2823	2969	3368	3913	4459	4860	5006
35°	3167	3298	3655	4143	4632	4990	5121
40°	3534	3648	3961	4388	4815	5128	5243
45°	3913	4010	4276	4641	5005	5272	5369
50°	4292	4372	4592	4893	5194	5415	5496
55°	4659	4723	4899	5138	5378	5554	5618
60°	5004	5053	5186	5369	5551	5684	5733
65°	5316	5353	5446	5577	5707	5803	5837
70°	5586	5609	5671	5756	5842	5904	5927
80°	5966	5972	5988	6010	6032	6048	6054
90°	6098	6098	6098	6098	6098	6098	6098

Hieraus kann man jeden Wert $log\ R$ für beliebiges φ und α durch Interpolation auf 5 Stellen genau finden.

Innerhalb der Breiten $\varphi = 36°$ und $64°$ ist eine ausführlichere Tafel für $log\ R$ berechnet worden von *Bremiker*, und veröffentlicht in dessen „Studien über höhere Geodäsie", Berlin 1869, S. 74—79; diese *Bremiker*sche Tafel giebt $log\ R$ für Toisen, 6stellig mit Intervall von 1° bei φ und α.

Ferner wird eine Tafel für $log\ R$ mit Intervall $\Delta\alpha = 10°$ gegeben von *Albrecht*, „Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig 1879, S. 201.

Änderung der Erdkrümmung nach Breite und Azimut.

Wenn man das vorstehende Übersichtstäfelchen in Bezug auf die Änderungen betrachtet, welche der Krümmungs-Halbmesser R in der Breite und im Azimut erfährt, so bemerkt man, dass für *gleiche* Änderungen $\Delta\varphi$ oder $\Delta\alpha$ die Änderungen $\Delta\ log\ R$ von nahe gleicher Grössenordnung sind, und das zeigt auch die Differentiierung von $log\ R$ oder von R nach φ und nach α, die beiden Differentiierungen von R nach φ und nach α geben Grössen von der Ordnung e'^2.

Allein wenn man überlegt, welche Änderungen von R vorkommen auf einem räumlich begrenzten Vermessungsgebiete der Erde, so wird die Vergleichung der Einflüsse von φ und α ganz anders, denn auf beschränktem Gebiete der Erde ist die Breite φ nahezu konstant, dagegen trotzdem das Azimut α innerhalb seiner äussersten Grenzen 0° und 90° veränderlich.

Auf beschränktem Vermessungsgebiete sind daher die Änderungen im Azimut viel einflussreicher als die Änderungen der Breite, und man kann in solchem Falle sagen, dass die Erdkrümmungsänderungen, welche von Breitenänderung $\Delta\varphi$ herrühren, nur Grössen zweiter Ordnung sind im Vergleich mit den vom Azimut α abhängigen Krümmungs-Aenderungen.

§ 35. Rektifikation der Meridian-Ellipse.

Der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die Breite φ ist nach (16) § 33. S. 209:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

Die Länge eines Meridianbogens sei m, also dm dessen Differential, und dieses ist bekanntlich:

$$dm = M\,d\varphi \tag{1a}$$

also:

$$m = \int M\,d\varphi = a(1-e^2)\int \frac{d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

Dieses ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung; davon ist jedoch bei der Rektifikation für geodätische Zwecke nicht die Rede, indem hier Reihenentwicklungen angewendet werden, die nach Umständen bei weniger oder mehr Gliedern abgebrochen werden.

I. Integration nur bis e^2 einschliesslich.

Wenn man nur bis e^2 einschliesslich entwickeln will, so schreibt man die zu integrierende Funktion (2) kurz so:

$$F = \frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = (1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}\,e^2\sin^2\varphi + e^4\ldots \tag{3}$$

hier ist nach bekannter goniometrischer Formel:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \tag{4}$$

und es ist:

$$\int \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \tag{5}$$

Damit wird das allgemeine Integral in (2):

$$\int F\,d\varphi = \left(1 + \frac{3}{4}\,e^2\right)\varphi - \frac{3}{8}\,e^2\sin 2\varphi \tag{6}$$

Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 ist daher:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F\,d\varphi = \left(1 + \frac{3}{4}\,e^2\right)(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{3}{8}\,(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)$$

oder im zweiten Gliede goniometrisch umgewandelt:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F\,d\varphi = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{4}e^2 \sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_2+\varphi_1) \qquad (7)$$

folglich der Meridianbogen m selbst zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 nach (2) und (7):

$$m = a(1-e^2)\left(\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{4}e^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_2+\varphi_1)\right) \qquad (8)$$

Wenn man hier die Sinus-Reihe anwendet, nämlich:

$$\sin(\varphi_2-\varphi_1) = (\varphi_2-\varphi_1) - \frac{(\varphi_2-\varphi_1)^3}{6} + \ldots$$

so erhält man:

$$m = a(\varphi_2-\varphi_1)(1-e^2)\left(1+\frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2\cos(\varphi_2+\varphi_1) + \frac{1}{8}e^2(\varphi_2-\varphi_1)^2\cos(\varphi_2+\varphi_1)\right) \qquad (9)$$

Obgleich in diesem Ausdrucke alle Glieder von der Ordnung e^4 und darüber vernachlässigt sind, kann man doch zu vielen Zwecken davon Gebrauch machen; ja man kann noch mit einem kleinen weiteren Opfer an Genauigkeit einen sehr praktischen Satz ableiten, der sich auf den Meridian-Krümmungs-Halbmesser der *Mittel*breite $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ bezieht. Dieser Meridian-Krümmungs-Halbmesser ist nach (1):

$$M' = \frac{a(1-e^2)}{\left(1-e^2\sin^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dieses ebenfalls bis auf e^2 einschliesslich entwickelt, giebt:

$$M' = a(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2\sin^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

und mit Anwendung der Formel (4):

$$M' = a(1-e^2)\left(1+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}e^2\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

Nimmt man nun diesen Krümmungs-Halbmesser M' als *Kreisbogen*-Halbmesser zu einem Centriwinkel $\varphi_2-\varphi_1$, so erhält man einen entsprechenden Meridianbogen:

$$m' = M'(\varphi_2-\varphi_1) = a(\varphi_2-\varphi_1)(1-e^2)\left(\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)-\frac{3}{4}e^2\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right) \qquad (10)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem früheren (9), so findet man völlige Übereinstimmung in den ersten Gliedern, man hat also auch sofort die Differenz:

$$m'-m = -a(\varphi_2-\varphi_1)(1-e^2)\frac{e^2}{8}(\varphi_2-\varphi_1)^2\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

oder genähert, zugleich mit Zufügung der nötigen ϱ:

$$m'-m = -a\frac{e^2}{8}\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varrho}\right)^3\cos(\varphi_1+\varphi_2) \qquad (11)$$

Dieses ist der Fehler der begangen wird, wenn man, nach (10), einen Ellipsen-Meridian-Bogen als *Kreis*bogen behandelt, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die *Mittel*breite $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ ist.

Zunächst sieht man aus (11), dass der Fehler $m' - m$ verschwindet, wenn $\varphi_1 + \varphi_2 = 90°$, d. h. wenn die Mittelbreite $= 45°$ ist (vorbehältlich der vernachlässigten Glieder von der Ordnung e^4).

Im übrigen berechnet man nach (11) zur Übersicht folgende Fehlertabelle für $(\varphi_2 - \varphi_1) = 1°$:

Mittelbreite φ	Fehler $m' - m$	Fehler $m' - m$	Mittelbreite φ
0°	$-0{,}028^m$	$+0{,}028^m$	90°
15°	$-0{,}024^m$	$+0{,}024^m$	75°
30°	$-0{,}014^m$	$+0{,}014^m$	60°
45°	$\mp 0{,}000$		45°

(12)

Wenn man also z. B. unter der Mittelbreite $\varphi = 30°$ einen Meridianbogen von 1° Weite ($\varphi_2 - \varphi_1 = 1°$) mit dem Krümmungs-Halbmesser der Mittelbreite als Kreisbogen berechnet, so begeht man einen Fehler von nur $-0{,}014^m$, d. h. man bekommt nur 14^{mm} zu wenig, und in der Gegend von 45° beträgt der Fehler noch erheblich weniger. Hiernach ist dieses Mittelbreiten-Verfahren für viele Zwecke brauchbar; man muss aber beachten, dass bei grösseren Weiten $\varphi_2 - \varphi_1$ der Fehler sehr rasch wächst, weil er der *dritten* Potenz $(\varphi_2 - \varphi_1)^3$ proportional ist.

Ein Hilfstäfelchen von ähnlicher Art wie (12), jedoch ausführlicher und genauer, werden wir später auf S. 223 wieder finden.

II. Integration bis e^4 einschliesslich.

Will man einen Schritt weiter gehen, so hat man statt (3) nach dem *Taylor*schen Satze:

$$F = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 \varphi \tag{13}$$

hiezu als bekannte goniometrische Formeln:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \qquad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$

dieses giebt auch $\sin^4 \varphi$, nämlich:

$$\sin^4 \varphi = (\sin^2 \varphi)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \cos^2 2\varphi \tag{13a}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4\varphi$$

$$\sin^4 \varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi.$$

Wenn man hiernach $\sin^2 \varphi$ und $\sin^4 \varphi$ in (13) einsetzt und nach $\cos 2\varphi$ und $\cos 4\varphi$ ordnet, so erhält man:

$$F = \left(1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4\right) - \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4\right) \cos 2\varphi + \frac{15}{64} e^4 \cos 4\varphi$$

das allgemeine Integral hievon ist:

$$\int F \, d\varphi = \left(1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4\right) \varphi - \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4\right) \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{15}{64} \frac{e^4}{4} \sin 4\varphi \tag{14}$$

Wenn man die Grenzen φ_1 und φ_2 einführt, und wenn man zugleich die goniometrischen Formeln berücksichtigt:

$$\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1 = 2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_2 + \varphi_1)$$
$$\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1 = 2 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) \cos 2(\varphi_2 + \varphi_1)$$

so erhält man aus (14) das bestimmte Integral:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F\,d\varphi = \left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4\right)(\varphi_2 - \varphi_1) - \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4\right)\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\cos(\varphi_2 + \varphi_1)$$
$$- \frac{15}{128}e^4 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1)\cos 2(\varphi_2 + \varphi_1) \quad (15)$$

Wenn man auf die Bedeutung von F nach (13) und (2) zurückgreift, so findet man:

$$\text{Meridianbogen } m = a(1 - e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F\,d\varphi \quad (16)$$

Der Meridianbogen m ist also durch (15) und (16) bestimmt.

Als besonderen Fall wollen wir den ganzen Quadranten des Meridians nehmen, und haben hiefür aus (16) und (15) mit $\varphi_1 = 0°$ und $\varphi_2 = 90°$, bzw. $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$:

$$\text{Meridianquadrant } Q = a\frac{\pi}{2}(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + e^6 \ldots\right) \quad (17)$$

$$Q = a\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 + e^6 \ldots\right) \quad (18)$$

Wir wollen noch das Excentricitätsquadrat e^2 durch die Abplattung α ersetzen, nämlich nach (8) § 32. S. 206:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Setzt man dieses in (17) und ordnet nach Potenzen von α, so erhält man:

$$Q = a\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) \quad (19)$$

Von dem Klammerfaktor kann man auch den Logarithmus entwickeln, wodurch man findet:

$$\log\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) = \mu\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) - \frac{\mu}{2}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 = -\mu\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

Die Formel (19) haben wir schon in unserer Einleitung S. 7 bei Gelegenheit der älteren Gradmessungen erwähnt, und um für solche Fälle leicht den Quadranten aus der grossen Achse und der Abplattung α oder umgekehrt berechnen zu können, haben wir zu (19) folgendes Hilfstäfelchen gebildet.

Abplattung α	$\log\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$	+	Abplattung α	$\log\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$	+
1 : 280	0.195 3440		1 : 300	0.195 3957	
		137			119
1 : 285	0.195 3577		1 : 305	0.195 4076	
		131			115
1 : 290	0.195 3708		1 : 310	0.195 4191	
		127			112
1 : 295	0.195 3835		1 : 315	0.195 4303	
		122			107
1 : 300	0.195 3957		1 : 320	0.195 4410	

Integration bis e^8 einschliesslich.

Man kann das im vorstehenden angewendete Verfahren beliebig weit fortsetzen; es besteht im allgemeinen darin, dass man die zu integrierende Funktion $(1-e^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}$ nach Potenzen von $e^2 \sin^2\varphi$ entwickelt und dann die Potenzen $\sin^2\varphi$, $\sin^4\varphi$, $\sin^6\varphi$ u. s. w. in $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 6\varphi$ u. s. w. ausdrückt und dadurch integrierbar macht.

Man könnte auch die Umwandlung der Potenzen $\sin^4\varphi$, $\sin^6\varphi$ u. s. w. in $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 6\varphi$ u. s. w. successive goniometrisch machen, wie mit $\sin^4\varphi$ bei (18a) geschehen ist; indessen für weitere Ausdehnung hat man die auf den *Moivre*schen Satz gegründeten allgemeinen Formeln, welche wir schon in (33) § 30. S. 200 zu solchem Gebrauche zusammengestellt haben.

In diesem Sinne greifen wir nochmals auf (2) und (3) zurück und entwickeln nach dem binomischen Satz:

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1+\frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi+\frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,e^4\sin^4\varphi+\frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,e^6\sin^6\varphi$$
$$+\frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{9}{8}\,e^8\sin^8\varphi+\ldots \quad (20)$$

Nach (33) S. 220 ist hier zu setzen:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi$$
$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi$$
$$\sin^6\varphi = \frac{5}{16}-\frac{15}{32}\cos 2\varphi+\frac{3}{16}\cos 4\varphi-\frac{1}{32}\cos 6\varphi$$
$$\sin^8\varphi = \frac{35}{128}-\frac{7}{16}\cos 2\varphi+\frac{7}{32}\cos 4\varphi-\frac{1}{16}\cos 6\varphi+\frac{1}{128}\cos 8\varphi$$

Setzt man diese Ausdrücke in (20) ein und ordnet nach $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w., so bekommt man:

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = A - B\cos 2\varphi + C\cos 4\varphi - D\cos 6\varphi + E\cos 8\varphi - \ldots \quad (21)$$

wobei die Coëfficienten A, B u. s. w. folgende sind:

$$A = 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11025}{16384}e^8+\ldots = 1{,}005\,037\,306\,031$$
$$B = \frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2205}{2048}e^8+\ldots = 0{,}005\,047\,849\,181$$
$$C = \frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2205}{4096}e^8+\ldots = 0{,}000\,010\,563\,780$$
$$D = \frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2048}e^8+\ldots = 0{,}000\,000\,020\,630$$
$$E = \frac{315}{16384}e^8+\ldots = 0{,}000\,000\,000\,038$$

Die zugleich hier beigefügten Zahlenwerte sind mit der *Bessel*schen Excentricität berechnet. Die Reihe für A enthält die Weiter-Entwicklung der früheren Formel (17).

Die Reihe (21) lässt sich integrieren, wie früher (13), und giebt mit Zusetzung des Faktors $a\ (1-e^2)$ sofort den Meridianbogen vom Äquator ($\varphi = 0$) bis zur Breite φ:

$$m\Big]_0^\varphi = a(1-e^2)\left(\frac{A\varphi}{\varrho} - \frac{B}{2}\sin 2\varphi + \frac{C}{4}\sin 4\varphi - \frac{D}{6}\sin 6\varphi + \frac{E}{8}\sin 8\varphi - \ldots\right) \quad (22)$$

Wenn man die schon bei (21) angegebenen Coëfficienten hier einsetzt, so bekommt man:

$$m\Big]_0^\varphi = \left.\begin{matrix} 30{,}866\,83879\,\varphi'' - 15988{,}63835 \sin 2\varphi + 16{,}7299 \sin 4\varphi \\ - 0{,}02178 \sin 6\varphi \quad + 0{,}00003 \sin 8\varphi \end{matrix}\right\} \quad (23)$$

Die Logarithmen der Coëfficienten sind bzw.:

$$\left.\begin{matrix} 1.489\,4921{\cdot}536 & 4.203\,8114{\cdot}8 & 1.223\,494 \\ & 8.33815-10 & 5.478-10 \end{matrix}\right\} \quad (23\text{a})$$

Dabei ist im ersten Glied φ in Sekunden zu nehmen; will man hier φ in Graden nehmen, so hat man:

$$m\Big]_0^\varphi \left.\begin{matrix} = 111\,120{,}61965\,\varphi^\circ - 15988{,}63835 \sin 2\varphi + \ldots \\ \log = 5.045\,7946.544 \qquad 4.203\,8114{\cdot}8 \end{matrix}\right\} \quad (24)$$

im übrigen dieselben Glieder wie bei (23) bzw. (23a).

Diese Formel (24) giebt auch die Länge des Erdmeridianquadranten, indem $\varphi = 90^\circ$ gesetzt, und die folgenden Glieder wegen $\sin 2\varphi = 0$ u. s. w. fortgelassen werden. Auf diese Weise findet man:

$$\text{Meridian-Quadrant} \quad Q = 10\,000\,855{,}768 \text{ Meter} \quad (25)$$

Die Einführung beliebiger Grenzen lässt sich in (22) ebenso wie früher bei (14) und (15) machen, und giebt den Meridianbogen zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2:

$$\begin{aligned} m\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = a(1-e^2)\Big(A(\varphi_2-\varphi_1) &- B\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_2+\varphi_1) \\ &+ \frac{C}{2}\sin 2(\varphi_2-\varphi_1)\cos 2(\varphi_2+\varphi_1) \\ &- \frac{D}{3}\sin 3(\varphi_2-\varphi_1)\cos 3(\varphi_2+\varphi_1) \\ &+ \frac{E}{4}\sin 4(\varphi_2-\varphi_1)\cos 4(\varphi_2+\varphi_1) + \ldots\Big) \end{aligned} \quad (26)$$

Auch hier wollen wir die Coëfficienten ausrechnen und dabei $\varphi_2 - \varphi_1 = 1^\circ$ sowie $\varphi_2 + \varphi_1 = 2\varphi$ setzen, d. h. wir wollen den Meridianbogen m_1 für 1° Weite mit der Mittelbreite φ berechnen und haben:

$$\left.\begin{matrix} m_1 = 111\,120{,}61965 - 558{,}0804\cos 2\varphi + 1{,}1677\cos 4\varphi - 0{,}0023\cos 6\varphi \\ \text{Coëfficienten-Logarithmen: } 2.746\,6967{\cdot}9 \qquad 0.067344 \qquad 7.3580 \end{matrix}\right\} \quad (27)$$

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir den Punkt *Celle* betrachten (welcher einer der 40 preussischen Kataster-Coordinaten-Nullpunkte ist). Derselbe hat die Breite $\varphi = 52^\circ\ 37'\ 32{,}6709''$; setzt man dieses in (23) (wobei teilweise mit 10 stelligen Logarithmen zu rechnen ist), so bekommt man den Meridianbogen vom Äquator bis zu dem Punkte Celle:

$$\begin{aligned} m\Big]_0^{\text{Celle}} &= 5\,847\,805{,}047 - 15\,425{,}526 - 8{,}492 + 0{,}015 \\ &= 5\,832\,371{,}044 \end{aligned} \quad (28)$$

Denselben Wert kann man auch aus der Hilfstafel Seite [16] des Anhangs durch Interpolation finden, wie wir schon beispielshalber in (8) § 31. S. 204 gezeigt haben.

*III. Reihenentwicklung nach dem Maclaurin*schen *Satz.*

Während die bisher behandelte Rektifikation durch *Integrieren* bewerkstelligt wurde, kann man auch durch fortgesetztes *Differentiieren* und Reihenentwicklung nach dem *Maclaurin*schen Satze eine gute Formel für die Meridianbogenlänge bekommen, namentlich wenn man dabei das Prinzip der *Mittel*breite anwendet (das wir schon in (39), (40) und ff. im § 30. S. 201 erwähnt haben).

Wir betrachten einen Meridianbogen m, welcher zwischen den Breiten $\varphi - \frac{\varDelta\varphi}{2}$ und $\varphi + \frac{\varDelta\varphi}{2}$ liegt, wo also φ die Mittelbreite und $\varDelta\varphi$ die Weite ist. Der Bogen m wird dadurch ebenfalls in zwei Teile m_1 und m_2 zerlegt, für deren nördlichen m_1 nach dem *Maclaurin*schen Satze eine Reihe gelten wird:

$$m_1 = \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)\frac{\varDelta\varphi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{\varDelta\varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3m}{d\varphi^3}\right)\left(\frac{\varDelta\varphi}{2}\right)^3 + \ldots \qquad (29)$$

eine entsprechende Reihe gilt für den südlichen Teil m_2, nämlich:

$$-m_2 = -\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)\frac{\varDelta\varphi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{\varDelta\varphi}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3m}{d\varphi^3}\right)\left(\frac{\varDelta\varphi}{2}\right)^3 + \ldots \qquad (30)$$

durch Subtraktion findet man hieraus:

$$m_1 + m_2 = m = \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)\varDelta\varphi + \left(\frac{d^3m}{d\varphi^3}\right)\frac{\varDelta\varphi^3}{24} \qquad (31)$$

Nun wissen wir von (1a) S. 216:

$$\frac{dm}{d\varphi} = M = \frac{c}{V^3} = \frac{c}{(1 + e'^2 \cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Wenn man diese Funktion zweimal ableitet, so findet man:

$$\frac{d^2m}{d\varphi^2} = \frac{3ce'^2 \sin\varphi\cos\varphi}{V^5}$$

$$\frac{d^3m}{d\varphi^3} = \frac{3ce'^2}{V^3}\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{V^2} + \frac{5e'^2 \sin^2\varphi\cos^2\varphi}{V^4}\right)$$

Damit kann man die Formel (31) zusammensetzen, wodurch man findet:

$$m = M\varDelta\varphi\left\{1 + \frac{\varDelta\varphi^2 e'^2}{8V^2}\left(\cos 2\varphi + \frac{5}{4}\frac{e'^2}{V^2}\sin^2 2\varphi\right)\right\} \qquad (32)$$

Zur Zahlenrechnung hat man ϱ zuzusetzen, und zugleich wollen wir das Korrektionsglied abtrennen, d. h. schreiben:

$$m = \frac{M\varDelta\varphi}{\varrho} + g\,\varDelta\varphi^3, \text{ wo } g = \frac{Me'^2}{8V^2\varrho^3}\left(\cos 2\varphi + \frac{5}{4}\frac{e'^2}{V^2}\sin 2\varphi\right)$$

Die hiernach berechneten Werte g und die entsprechenden Winkelkorrektionen $\gamma = \frac{g}{M}\varrho$, welche man zur umgekehrten Berechnung von $\varDelta\varphi$ aus m braucht, sind in nachfolgender Tabelle mitgeteilt.

Korrektions-Glieder g und γ für Meridian-Bogen-Rektificierung mit dem Krümmungs-Halbmesser der Mittelbreite φ.

φ	g	γ	φ	g	γ	φ	g	γ
	+	—					—	+
0°	0,0281^m	0,00091″	45°	+0,00024^m	−0,000008″	55°	0,0095^m	0,00031″
5°	0,0277	0,00090	46°	−0,00075	+0,000024	60°	0,0140	0,00045
10°	0,0264	0,00086	47°	−0,00174	+0,000056	65°	0,0182	0,00059
			48°	−0,00273	+0,000088			
15°	0,0244	0,00079	49°	−0,00372	+0,000120	70°	0,0217	0,00070
20°	0,0217	0,00070				75°	0,0247	0,00080
25°	0,0183	0,00059	50°	−0,00470	+0,000152	80°	0,0268	0,00086
			51°	−0,00567	+0,000184			
30°	0,0143	0,00046	52°	−0,00664	+0,000215	85°	0,0281	0,00091
35°	0,0099	0,00032	53°	−0,00761	+0,000246	90°	0,0286	0,00092
40°	0,0051	0,00017	54°	−0,00856	+0,000277			
45°	0,0002	0,00001	55°	−0,00951	+0,000308			

Diese Werte g sind im wesentlichen dasselbe, was die früher bei (12) angegebenen Beträge $m - m'$, d. h. die negativen Fehler.

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir den Meridianbogen zwischen den Breiten 47° und 53°, also 6° Weite mit der Mittelbreite $\varphi = 50°$ berechnen, man hat zuerst nach der Tafel des Anhangs, S. [14] und [15] $log\ M = 6.804\,2916{\cdot}0$ oder sofort $log\,\frac{\varrho''}{M} = log\,[1] = 8.510\,1335{\cdot}3$ was mit $6° = 21\,600''$ das Hauptglied giebt:

$$m' = \frac{21600}{[1]} = 667\,298{,}611^m$$

und dazu kommt noch nach dem vorstehenden Korrektionstäfelchen für $\varphi = 50°$ und $\Delta\varphi = 6°$ der Betrag:

$$-0{,}00470 \times 6^3 = -1{,}015^m.$$

Dieses zum vorigen hinzugefügt giebt:

$$m = 667\,298{,}611^m - 1{,}015^m = 667\,297{,}596^m.$$

Die Genauigkeit dieser Berechnung ist sehr gross, denn das nächste vernachlässigte Glied ist nur von der Ordnung $\frac{M}{160}\,\Delta\varphi^5\,e'^2\,cos\,2\varphi$, was für einen Breitenunterschied von 10° zwischen 45° und 55° nur 7^{mm} ausmacht, jedoch wegen des Faktors $cos\,2\varphi$ erheblicher wird, wenn die Mittelbreite φ weit von 45° abliegt.

Anhang zu §. 35. Parallelkreisbögen.

Im Anschluss an die in diesem § 35. behandelten Meridianbögen erwähnen wir hier auch noch kurz die Parallelkreisbögen; jedoch ist für diese keine besondere Entwicklung nötig.

Wenn N der Quer-Krümmungs-Halbmesser für die Breite φ, oder die Normalen-

länge nach der untenstehenden Fig. 1. ist, so ist für die Breite φ der Parallelkreis-Halbmesser $= N \cos \varphi$, also für einen Längenunterschied λ der Parallelkreisbogen:

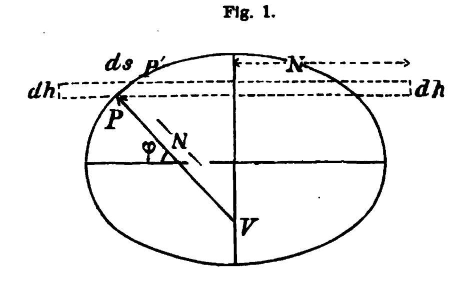
$$p = N \cos \varphi \frac{\lambda}{\varrho}.$$

Hiernach sind unsere Parallelkreisbögen in der Tafel Seite [28] des Anhangs berechnet.

§ 36. Bestimmung der Oberfläche des Erd-Ellipsoids.

Bei den geodätischen Messungen und Berechnungen im engeren Sinne hat man kein Bedürfnis, die Oberflächen einzelner Zonen des Ellipsoids in der nachher zu behandelnden Weise zu kennen; jedoch besteht für Kartographie und Geographie im allgemeinen ein solches Bedürfnis, weshalb wir die Flächenberechnung hier anschliessen.

Fig. 1.



Die Oberfläche einer schmalen Zone des Umdrehungs-Ellipsoids zwischen den Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ wird nach einem elementar-stereometrischen Satze erhalten als krumme Oberfläche eines *Cylinders*, dessen Höhe gleich der Höhe der genannten Zone ist, und dessen Halbmesser gleich der Länge der Flächennormalen N ist.

Mit Bezug auf Fig. 1. hat man daher:

Zonen-Flächen-Element $dZ = 2N\pi \times dh$:

Es ist aber: $dh = ds \cos \varphi$

$ds = M d\varphi$ (wo M der Meridian-Krümmungs-Halbmesser ist).

Also: $$dZ = 2MN\pi \cos \varphi \, d\varphi \tag{1}$$

oder auch: $$dZ = 2r^2 \pi \cos \varphi \, d\varphi \tag{2}$$

wo $r = \sqrt{MN}$ der mittlere Krümmungs-Halbmesser ist.

Setzt man hiefür nach (22a) § 33. S. 211 seinen Wert und zugleich $a^2(1-e^2) = b^2$, so wird:

$$dZ = 2b^2 \pi \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi \tag{3}$$

Dieses ist das Flächen-Differential einer Zone des Ellipsoids zwischen den Breiten φ und $\varphi + d\varphi$, also die Zonenfläche selbst, allgemein:

$$Z = 2b^2 \pi \int \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi \tag{4}$$

Hier kann man entwickeln:

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-2} = 1 + \left(\frac{-2}{1}\right) e^2 \sin^2 \varphi + \left(\frac{-2}{1}\frac{-3}{2}\right) e^4 \sin^4 \varphi + .$$
$$= 1 + 2e^2 \sin^2 \varphi + 3e^4 \sin^4 \varphi + 4e^6 \sin^6 \varphi + 5e^8 \sin^8 \varphi + \ldots$$

Die zu integrierende Funktion ist also nach (4):

$$\frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2} = \cos \varphi + 2e^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 3e^4 \cos \varphi \sin^4 \varphi + 4e^6 \cos \varphi \sin^6 \varphi + \ldots$$

Diese Glieder lassen sich einzeln unmittelbar integrieren, denn es ist allgemein:

$$\int \cos\varphi \sin^n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1}\varphi$$

also, mit mehrfacher Anwendung dieses Integrals:

$$\int \frac{\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} d\varphi = \sin\varphi + \frac{2}{3} e^2 \sin^3\varphi + \frac{3}{5} e^4 \sin^5\varphi + \frac{4}{7} e^6 \sin^7\varphi + \dots$$

Wenn man also auf (4) zurückgreift, und die Grenzen 0 und φ einführt, so erhält man die Zonenfläche vom Äquator bis zur Breite φ:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = 2b^2\pi \sin\varphi\left(1 + \frac{2}{3}e^2\sin^2\varphi + \frac{3}{5}e^4\sin^4\varphi + \frac{4}{7}e^6\sin^6\varphi + \frac{5}{9}e^8\sin^8\varphi + \dots\right) \quad (5)$$

Hieraus findet man auch die Zone zwischen den zwei Breiten φ_1 und φ_2, indem man die vorstehende Funktion (5) für $\varphi = \varphi_1$ und für $\varphi = \varphi_2$ bildet, und beides subtrahiert:

$$Z\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 2b^2\pi\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 + \frac{2}{3}e^3(\sin^2\varphi_2 - \sin^3\varphi_1) + \frac{3}{5}e^4(\sin^5\varphi_2 - \sin^5\varphi_1) + \dots\right) \quad (6)$$

Hier kann man nach (33) § 30. S. 200 setzen:

$$\sin^3\varphi_2 = \frac{3}{4}\sin\varphi_2 - \frac{1}{4}\sin 3\varphi_2$$

$$\sin^5\varphi_2 = \frac{5}{8}\sin\varphi_2 - \frac{5}{16}\sin 3\varphi_2 + \frac{1}{16}\sin 5\varphi_2 \quad \text{u. s. w.}$$

folglich:

$$\sin^3\varphi_2 - \sin^3\varphi_1 = \frac{3}{4}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) - \frac{1}{4}(\sin 3\varphi_2 - \sin 3\varphi_1)$$

$$\sin^5\varphi_2 - \sin^5\varphi_1 = \frac{5}{8}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) - \frac{5}{16}\sin(3\varphi_2 - \sin 3\varphi_1) + \frac{1}{16}(\sin 5\varphi_2 - \sin 5\varphi_1)$$

Zugleich ist goniometrisch:

$$\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 = 2\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}$$

$$\sin 3\varphi_2 - \sin 3\varphi_1 = 2\sin 3\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos 3\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}$$

$$\sin 5\varphi_2 - \sin 5\varphi_1 = 2\sin 5\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos 5\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}$$

Setzt man all dieses in (6), und ordnet nach den Funktionen $\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$, $\sin 3\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}$ u. s. w., so bekommt man:

$$\begin{aligned} Z\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 4b^2\pi\Bigg\{ & \sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} \\ & + \frac{2}{3}e^2\left(\frac{3}{4}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} - \frac{1}{4}\sin 3\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos 3\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right) \\ & + \frac{3}{5}e^4\left(\frac{5}{8}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2} - \frac{5}{16}\sin 3\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos 3\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right. \\ & \left. + \frac{1}{16}\sin 5\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cos 5\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right) + \dots \Bigg\} \end{aligned}$$

$$Z\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 4\,b^2\pi \Big\{ \Big(1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \ldots\Big) \sin\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$$
$$- \Big(\frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \ldots\Big) \sin 3\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos 3\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$$
$$+ \Big(\frac{3}{80}e^4 + \ldots\Big) \sin 5\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos 5\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \ldots\ldots \Big\} \qquad (7)$$

Wir haben diese Entwicklung in aller Ausführlichkeit bis e^4 hier geschrieben, die Weiter-Entwicklung bietet keine Schwierigkeit, wir wollen deren Ergebnis bis e^8 hersetzen, dabei aber zur Abkürzung schreiben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varDelta\varphi \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi$$

Damit wird die Zonenfläche von der Weite $\varDelta\varphi$ und mit der Mittelbreite φ:

$$Z = 4\,b^2\pi \Big\{ A\cos\varphi\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} - B\cos 3\varphi\sin 3\frac{\varDelta\varphi}{2}$$
$$+ C\cos 5\varphi\sin 5\frac{\varDelta\varphi}{2} - D\cos 7\varphi\sin 7\frac{\varDelta\varphi}{2}$$
$$+ E\cos 9\varphi\sin 9\frac{\varDelta\varphi}{2} - \ldots\ldots \quad \ldots \Big\} \qquad (8)$$

Dabei haben die Coëfficienten A, B u. s. w. folgende Bedeutungen und Zahlenwerte für *Bessel*sches e^2:

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8 + \ldots = 1{,}003\,353\,984\,792 \\
B &= \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{3}{16}e^6 + \frac{35}{192}e^8 + \ldots = 0{,}001\,120\,804\,092 \\
C &= \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \frac{5}{64}e^8 + \ldots = 0{,}000\,001\,689\,260 \\
D &= \frac{1}{112}e^6 + \frac{5}{256}e^8 + \ldots = 0{,}000\,000\,002\,694 \\
E &= \frac{5}{2304}e^8 + \ldots = 0{,}000\,000\,000\,004
\end{aligned} \qquad (9)$$

Fläche einer Grad-Abteilung.

Die Formel (8) mit dem Coëfficienten (9) giebt mit $\varDelta\varphi = 1°$ die Fläche eines Ringes von 1° Breite, der um die ganze Erde herumgeht, d. h. 360° Länge hat. Häufiger als die Fläche dieses ganzen Ringes braucht man den 360sten Teil derselben, d. h. eine „*Grad-Abteilung*“, oder ein Trapez, welches durch zwei Meridiane und durch zwei Parallelkreise, beide im Abstande von je 1°, begrenzt ist.

Die krumme Oberfläche einer solchen Grad-Abteilung mit der Mittelbreite φ ist also:

$$G = \frac{b^2\pi}{90} \Big\{ A\sin 30'\cos\varphi - B\sin 1°\,30'\cos 3\varphi + C\sin 2°\,30'\cos 5\varphi$$
$$- D\sin 3°\,30'\cos 7\varphi + E\sin 5°\,30'\cos 9\varphi - \ldots \Big\} \qquad (10)$$

Wenn man hier alles Konstante ausrechnet, so findet man für Quadratkilometer

$$\left.\begin{array}{lll} G = 12347{,}58347 \; \cos\varphi & (\log \text{ Coëff.} = 4.091\,5819{\cdot}705) \\ \quad - \; 41{,}37468 \; \cos 3\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"} = 1.616\,7346{\cdot}5\;) \\ \quad + \; 0{,}103911 \; \cos 5\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"} = 9.016\,662 - 10) \\ \quad - \; 0{,}000232 \; \cos 7\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"} = 6.365\,28 \; - 10) \\ \quad + \; 0, \ldots \; \cos 9\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"} = 3.678 \quad - 10) \end{array}\right\} \qquad (10\text{a})$$

Die Messtischblätter der Preussischen Topographie im Massstab 1 : 25 000 haben in der Breite $\Delta\varphi = 6'$ und in der Länge $10'$, und hiefür wird:

$$G' = \frac{b^2\pi}{540}\left\{A \sin 3' \cos\varphi - B \sin 9' \cos 3\varphi + C \sin 15' \cos 5\varphi - D \sin 21' \cos 7\varphi\right\} \qquad (11)$$

oder mit ausgerechneten Coëfficienten, für Quadratkilometer:

$$G' = 205{,}79564 \cos\varphi - 0{,}689656 \cos 3\varphi + 0{,}001732 \cos 5\varphi - 0{,}0000039 \cos 7\varphi \qquad (12)$$

Die Logarithmen dieser Coëfficienten sind:

2.313 4361·8   9.838 6325   7.238 647   4.5874   (12a)

Anmerkung zu § 36.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung die Integration (4) sofort in einer Reihe behandelt, weil wir dadurch am kürzesten zu den Formeln (8), (10) und (11) geführt worden sind, welche zum praktischen Rechnen die bequemsten sind.

Indessen kann man die Integration von (4) auch in geschlossener Form, streng, ausführen; und um zu zeigen, dass man auf diesem Wege zwar eine mathematisch elegantere Formel erhält, welche aber für die numerische Anwendung unbequemer ist als unsere bereits entwickelten Reihen, soll die strenge Integration hier angegeben werden.

Nach (4) ist der allgemeine Ausdruck für die Zonenfläche:

$$Z = 2\,b^2\pi \int \frac{\cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2}\, d\varphi \qquad (13)$$

Zu dieser Integration hat die Integralrechnung eine Umformung, welche wir später als Einführung der reduzierten Breite ψ für weitere geodätische Zwecke kennen lernen werden, welche jedoch hier nur als algebraisches Hilfsmittel auftritt. Es wird nämlich ein Winkel ψ eingeführt, entsprechend der Gleichung:

$$\tang \psi = \tang \varphi \sqrt{1 - e^2} \qquad (14)$$

damit wird (13) auf folgende Form gebracht:

$$Z = \frac{2\,b^2\pi}{\sqrt{1-e^2}} \int \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\psi}}{\sqrt{1 - e^2}} \cos\psi \, d\psi \qquad (15)$$

Setzt man hier weiter $\sin\psi = \xi$, also $\cos\psi\, d\psi = d\xi$, und $\dfrac{e^2}{1 - e^2} = e'^2$, so hat man eine Integration von der Form:

$$\int \sqrt{1 + e'^2 \xi^2}\, d\xi = \frac{\xi}{2}\sqrt{1 + e'^2 \xi^2} + \frac{1}{2\,e'}\, l\left(\xi + \frac{1}{e'}\sqrt{1 + e'^2 \xi^2}\right)$$

Wenn man nach der Integration wieder auf die Veränderliche ψ zurückgeht, und zugleich die Integrations-Grenzen einführt, so erhält man die Zonenfläche:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = \frac{b^2}{\sqrt{1 - e^2}}\,\pi \left\{\sin\psi \sqrt{1 + e'^2 \sin^2\psi} + \frac{1}{e'}\, l\left(e' \sin\psi + \sqrt{1 + e'^2 \sin^2\psi}\right)\right\}$$

Wenn man endlich nach (14) von der reduzierten Breite wieder zur geographischen Breite φ zurückkehrt, so erhält man:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = b^2 \pi \left\{ \frac{\sin \varphi}{W^2} + \frac{1}{e}\, l \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{W}\right) \right\} \qquad (16)$$

Dieses ist der gesuchte *geschlossene* Ausdruck, welcher dasselbe bedeutet wie die frühere Reihe (5); und da der geschlossene Ausdruck (16) selbst zur Rechnung unbequem ist, kann man denselben auch in eine Reihe entwickeln, nämlich:

$$\frac{1}{W^2} = 1 + e^2 \sin^2 \varphi + e^4 \sin^4 \varphi + e^6 \sin^6 \varphi + \ldots$$

$$l\left(\frac{1 + e \sin \varphi}{W}\right) = e \sin \varphi + \frac{e^3}{3} \sin^3 \varphi + \frac{e^5}{5} \sin^5 \varphi + \frac{e^7}{7} \sin^7 \varphi$$

und damit geht (16) leicht in das frühere (5) über.

Man hat also durch Reihen-Entwicklung *nach* der Integration auf einem Umweg dasselbe erhalten, was die Reihen-Entwicklung *vor* der Integration auf kürzestem Wege gegeben hat.

Ausser zum klaren Erkennen dieses Verhältnisses mag indessen die strenge Integration mit der Formel (16) in einzelnen Fällen Dienste leisten, z. B. mit $\varphi = 90°$ giebt dieselbe die Gesamtoberfläche des Erd-Ellipsoids, nach einer kleinen Umformung:

$$2Z\Big]_0^{90} = E = 2 a^2 \pi \left\{ 1 + \frac{1 - e^2}{2e} \frac{1}{\mu} \log \frac{1 + e}{1 - e} \right\}$$

Dieses muss übereinstimmen mit der Formel (5), wenn man daselbst $\varphi = 90°$ setzt, wodurch man erhält:

$$E = 4 b^2 \pi \left(1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8 + \ldots\right) \qquad (17)$$

Die Ausrechnung giebt nach beiden Formeln übereinstimmend:

$$E = 509\,950\,714{,}2 \text{ Quadrat-Kilometer} \qquad (18)$$

Denkt man sich nun eine Kugel vom Halbmesser f, welche gleiche Oberfläche E haben soll, so bestimmt sich f dadurch:

$$f = \sqrt{\frac{E}{4\pi}} = 6\,370\,289{,}511^{m} \qquad (19)$$

§ 37. Mittlerer Halbmesser der Erde als Kugel.

Die letzte Betrachtung leitet uns noch über zu einer Frage, welche kaum geodätischer Natur ist, welche aber in diesem Zusammenhange wohl zu stellen ist, nämlich welchen Halbmesser man einer *Kugel* zuteilen soll, welche zu manchen Näherungsberechnungen u. s. w. der ellipsoidischen Erde substituiert werden kann.

Der nächste Gedanke ist, das arithmetische Mittel der drei Halbaxen des Ellipsoids zu diesem Zwecke zu benützen, d. h. zu setzen:

$$\frac{a + a + b}{3} = r \qquad (1)$$

Die Ausrechnung giebt:

$$\left.\begin{aligned} a &= 6\,377\,397{,}155^{m} \\ a &= 6\,377\,397{,}155 \\ b &= 6\,356\,078{,}963 \end{aligned}\right\} \frac{a + a + b}{3} = 6\,370\,291{,}091^{m} \qquad (2)$$

Zur Vergleichung mit dem folgenden kann man auch den Wert r nach (1) in eine Reihe entwickeln, nämlich:

$$r = \frac{2a + a\sqrt{1-e^2}}{3} = \frac{a}{3}\left(2 + 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \ldots\right)$$

$$r = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{24}e^4 - \frac{1}{48}e^6\right) \tag{3}$$

Nach diesem kann man die am Schlusse des vorigen § 36. S. 228 eingeführte Kugel betrachten, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleiche Oberfläche E hat. Aus der Reihe für E ((17) S. 228) folgt, dass der Halbmesser f der fraglichen Kugel sein muss:

$$f = a\sqrt{1-e^2}\sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \ldots}$$

$$f = a\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16}\right)\left(1 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{11}{45}e^4 + \frac{193}{945}e^6\right)$$

$$f = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6\right) \tag{4}$$

Die Vergleichung mit (3) giebt:

$$f = r\left(1 - \frac{1}{180}r^4 - \frac{17}{7560}r^6\right) \tag{5}$$

Die Ausrechnung hiernach giebt:

$$f = 6\,370\,291{,}091^m - 1{,}577^m - 0{,}004^m = 6\,370\,289{,}510^m \tag{6}$$

Dieses stimmt genügend mit dem früher auf zwei anderen Wegen berechneten Werte (19) § 36. S. 228.

Als dritter Mittelwert bietet sich der Halbmesser k derjenigen Kugel, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleichen körperlichen Inhalt hat.

Der Inhalt des Umdrehungs-Ellipsoids wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man eine Kugel mit dem Äquator-Halbmesser a, also mit dem Inhalt $\frac{4}{3}\pi a^3$, in der Richtung der Umdrehungsaxe im Verhältnis $b : a$ zusammengedrückt denkt, d. h. es ist:

$$\text{Körperinhalt des Erd-Ellipsoids} = \frac{b}{a}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Wenn eine Kugel vom Halbmesser k denselben Inhalt haben soll, so muss sein:

$$k^3 = a^2 b \qquad \text{oder} \qquad k = \sqrt[3]{a^2 b} = a\sqrt[6]{1-e^2} \tag{7}$$

Dieses kann man entwickeln:

$$k = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{5}{72}e^4 - \frac{55}{1296}e^6\right) \tag{8}$$

Nimmt man wieder das arithmetische Mittel r der 3 Halbaxen nach (3) zur Vergleichung, und entwickelt, so erhält man:

$$k = r\left(1 - \frac{1}{36}e^4 - \frac{17}{648}e^6\right) \tag{9}$$

Die Ausrechnung giebt:

$$k = 6\,370\,291{,}091^m - 7{,}8828^m - 0{,}0497^m = 6\,370\,283{,}158^m \tag{10}$$

Dieses ist auch in Übereinstimmung mit einer unmittelbaren Ausrechnung nach (7).

Zur Übersicht stellen wir nochmals die drei gefundenen Werte zusammen:

1) Arithmetisches Mittel $\frac{a+a+b}{3} = r = 6\,370\,291{,}091^m$

2) Halbmesser für gleiche Oberfläche $f = 6\,370\,289{,}510^m$

3) Halbmesser für gleichen Inhalt $\sqrt[3]{a^2 b} = k = 6\,370\,283{,}158^m$

Wie man sieht, sind diese Werte nahezu gleich, und für viele Zwecke auch gleich geeignet.

Im Anschluss hieran sind noch einige Untersuchungen zu erwähnen, welche sich auf verschiedene Mittelwerte von Erdhalbmessern in Hinsicht auf Krümmung beziehen:

Dienger, Abbildung krummer Oberflächen, Braunschweig 1858, S. 41.

Grunert. Über die Normalschnitte des Ellipsoids u. s. w., *Grunerts* Archiv der Mathematik u. Physik, 40. Teil 1863, S. 259—354, insbesondere S. 312 und: Wichtiger allgemeiner Satz von den Flächen, *Grunerts* Archiv 41. Teil 1864, S. 241—296, insbesondere S. 292.

Helmert. Die mathem. u. physikal. Theorieen der höheren Geodäsie I. Leipzig 1880, S. 63—68.

Czuber. Mittelwerte, die Krümmung ebener Kurven und Krümmungsflächen betreffend, *Grunert-Hoppes* Archiv der Math. u. Ph. Zweite Reihe. 6. Teil 1888, S. 294—304.

§ 38. Hilfstafeln zu geodätischen Berechnungen mit den *Bessel*schen Erddimensionen.

Auf die *Bessel*schen Angaben für die Erddimensionen sind schon zahlreiche Tabellen-Berechnungen gegründet worden, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

Encke. Über die Dimensionen des Erdkörpers nebst Tafeln nach *Bessels* Bestimmung. Berl. astr. Jahrb. für 1852 S. 318—381 und Separatabdruck: *Enckes* astr. Abhandlungen 2. Band, Berlin 1866. Diese *Encke*schen Tafeln sind zunächst für astronomische Parallelaxenberechnungen bestimmt, und geben daher zuerst die *geocentrische* Breite und den *geocentrischen* Halbmesser (entsprechend γ und OP in unserer Fig. 1. S. 205), d. h. Grössen, welche in der Geodäsie selten gebraucht werden. Ausserdem giebt *Encke* auch Zahlenwerte für geodätischen Gebrauch, namentlich Tafel II, Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ, mit Intervall $\Delta\varphi = 10'$ von $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 90°$, in Toisen-Maas, auf 0,001 Toise.

Steinhauser. Neue Berechnung der Dimensionen des Erdsphäroids. *Petermanns* geogr. Mitteilungen 1858 S. 465—468.

Bremiker. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Dezimalstellen. S. 520—524.

Bremiker. Studien über höhere Geodäsie. Berlin 1869. S. 70—81.

Börsch. Anleitung zur Berechnung der rechtwinkligen Coordinaten u. s. w. Cassel 1869 und Tafeln für geodätische Berechnungen zwischen den geographischen Breiten von 35° und 71°. Cassel 1869. Zweite Auflage Anleitung mit Tafeln. Cassel 1885.

Projektions tables for the use of the United States navy, Bureau of navigation. Washington, Governement printing office, 1869.

Wagner. Die Dimensionen des Erdsphäroids nach *Bessels* Elementen. Geographisches Jahrbuch, herausgegeben von *Behm*. III. Band. Gotha 1870. S. I—LXI.

F. G. Gauss. Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. Berlin 1876. Zweiter Teil.

Schreiber. Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878. Im Selbstverlage; zu beziehen durch die Königliche Hofbuchhandlung von *E. S. Mittler & Sohn*, Kochstrasse 69. 70. *log* [1]

und *log* [2] von $\varphi = 47° \; 0'$ bis $57° \; 0'$ mit Intervall $\Delta\varphi = 1'$ auf 0·1 genau. Entsprechende Tafeln für zweite Ordnung 7stellig und für dritte Ordnung 6stellig.

Albrecht. Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, nebst kurzer Anleitung zur Ausführung derselben, von Prof. Dr. *Th. Albrecht*, Sektionschef im Königl. Preuss. Geodätischen Institut. Zweite Auflage. Berlin 1879. S. 197—213.

Helmert. Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie. I. Teil. Leipzig 1880. Anhang S. 621—631 giebt $\log W = \log\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}$ von $\varphi = 47° \; 0'$ bis $57° \; 0'$ mit Intervall $\Delta\varphi = 5'$ auf 0·0001, d. h. 11stellig, ferner *log W* 8stellig (auf 0·1 genau), durch den ganzen Quadranten mit $\Delta\varphi = 10'$.

Biek-Tillo. Russische Übersetzung von *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Auflage, übersetzt von *A. Biek*, Oberlehrer der Geodäsie am Messinstitut des Grossfürsten Constantin. Moskau 1881. Buchhändler *N. J. Mamontowa.* Diese Übersetzung giebt, an Stelle der Tafel S. 424—427 des Originals, nun ihrerseits auf S. 652—665 eine von dem Obersten des Russischen Generalstabs *A. A. Tillo* berechnete Tafel der Coëfficienten für die *Gauss*schen Mittelbreiten-Formeln; insbesondere *log* [1] und *log* [2] für $\varphi = 34° \; 0'$ bis $\varphi = 70° \; 0'$ mit $\Delta\varphi = 10'$, auf 0.1 genau. Es ist jedoch hiebei eine andere Längeneinheit als die *Bessel*sche zu Grunde gelegt, denn die russischen *log* [1] und *log* [2] haben gegen unsere mit *Bessel*schen Erddimensionen berechneten *log* [1] und *log* [2] eine konstante Differenz von 371·6, welche zu berücksichtigen ist.

Rehm. Mitteilungen des K. K. militär-geographischen Instituts, herausgegeben auf Befehl des K. K. Reichs-Kriegs-Ministeriums. III. Band, 1883. Wien 1883. Im Selbstverlage des K. K. milit.-geogr. Instituts. S. 137—177. Tafeln der Krümmungs-Halbmesser des *Bessel*schen Erdsphäroids für die Breiten von $\varphi = 40' \; 0'$ bis $51° \; 30'$ mit Intervall $\Delta\varphi' = 1'$ auf 0·0001, d. h. auf 11 Logarithmenstellen genau.

Schols. Geodetische Formules en Tafels, ten gebruike bij de Triangulatie van het eiland Sumatra. Utrecht, J. van Boekhoven, 1884. Diese Tafeln geben von $\varphi = 0° \; 0'$ bis $6° \; 0'$ die Krümmungs-Halbmesser auf 0·1 genau, nebst weiteren Zahlenwerten.

*Dr. Hermann Wagner*s Tafeln der Dimensionen des Erdsphäroids, auf Minuten-Dekaden erweitert von *A. Steinhauser*, K. K. Regierungsrat. Wien 1885. Eduard Hölzel.

Helmert. Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft 1. Formeln und Tafeln u. s. w. Berlin, Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei. 1886. Tafeln im Anhang S. 6—26; hievon giebt S. 18—24 für $\varphi = 30°$ bis $71°$ 8stellige Werte *log* [1] und *log* [2], welche bzw. die dekadischen Ergänzungen unserer *log* [2] und *log* [1] sind.

Im Anhange unseres Buches, S. [2] und folgende, sind zahlreiche Hilfstafeln mitgeteilt, welche grösstenteils für diesen Zweck von uns neu und unabhängig berechnet, oder wenigstens vor der teilweisen Entlehnung gründlich revidiert worden sind.

Über unsere grosse Haupttafel Seite [2]—[23] ist der Berechnungs-Nachweis bereits in § 33. S. 212—213 gegeben; doch wurde die *Helmert*sche 10stellige Tafel für *log W* von 47° bis 57°, sowie die Tafeln von *Rehm* und *Schols* nur von 1° zu 1° nachgerechnet, im übrigen als durch ihre eigenen Differenzen interpoliert angenommen.

Die Tafel Seite [24]—[25] für die Längen- und Breitengrade und für die Grad-Abteilungsflächen ist zunächst nach *Bremiker* und *Wagner* angesetzt, dann aber eingehend nachgerechnet; die hiebei gefundenen wenigen Fehler sind in dem geographischen Jahrbuch von *Behm*, VI. Band, 1876, S. 703 mitgeteilt.

Die Meridianbogen-Tafel Seite [26] ist nur ein ergänzter Auszug aus der grösseren Tafel von *F. G. Gauss.*

Kapitel IV.

Sphärische Dreiecksberechnung.

§ 39. Wahl eines Kugelhalbmessers.

Die Dreiecke einer Haupt-Triangulierung werden in der Regel als *sphärische* Dreiecke berechnet, indem man als zugehörigen Kugelhalbmesser den *mittleren* Krümmungs-Halbmesser nach der schon früher (in (22) § 33. S. 211) gegebenen Definition nimmt, nämlich:

$$r = \sqrt{MN} = \frac{a\,(1-e^2)}{1-e^2\,sin^2\,\varphi} \qquad \text{oder} \qquad = \frac{c}{1+e'^2\,cos^2\,\varphi} \tag{1}$$

d. h. es ist r das *geometrische* Mittel der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N des Ellipsoids in der Breite φ, wobei φ als *Mittel*breite, etwa für den Schwerpunkt des Dreiecks genommen wird.

Dieser durch die Gleichung (1) bestimmte Wert r bietet sich von selbst als bequemster dar, wenn man für *logarithmische* Rechnung überhaupt einen Mittelwert aus $log\ M$ und $log\ N$ haben will, denn es ist dann:

$$log\ r = \frac{log\ M + log\ N}{2} \tag{2}$$

Für diese Wahl spricht auch der von *Grunert* (vgl. die Litteraturangaben am Schlusse von § 37. S. 230) gefundenen Satz, dass der mittlere Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ zugleich das *arithmetische* Mittel aller Normalschnitts-Krümmungshalb messer R in einem Punkte ist.

Man hat nämlich die Summe aller Werte R nach (1) § 34. S. 213:

$$[R] = \int_0^{2\pi} \frac{MN}{M\,sin^2\,\alpha + N\,cos^2\,\alpha}\,d\alpha$$

und die Anzahl derselben ist entsprechend $n = 2\pi$, also der Mittelwert:

$$\frac{[R]}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{MN}{M\,sin^2\,\alpha + N\,cos^2\,\alpha}\,d\alpha$$

Zur Integration führt man eine neue Veränderliche ein:

$$\sqrt{\frac{M}{N}}\,tang\,\alpha = v, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{\frac{M}{N}}\,\frac{d\alpha}{cos^2\,\alpha} = dv$$

wodurch die Integration sich reduziert auf:

$$\int \frac{dv}{1+v^2} = arc\ tang\ v$$

Und setzt man noch die Grenzen ein, so findet man:

$$\frac{[R]}{n} = \sqrt{MN} = r \tag{3}$$

Als weitere Begründung der Annahme von $r = \sqrt{MN}$ kann auch die Differential-Formel für die Ellipsoidfläche (2) § 36. S. 224 dienen, in welcher derselbe Wert r vorkommt.

Indessen liegt die beste Begründung der *sphärischen* Dreiecks-Berechnung mit irgend einem nach Gutdünken angenommenen Kugel-Halbmesser r zunächst in dem Umstande, dass man bei den Dreiecks-Berechnungen meist nur einen Näherungswert von $\frac{1}{r^2}$ auf wenige Stellen genau braucht, so dass es augenscheinlich ziemlich gleichgültig ist, welchen der verschiedenen überhaupt in Frage kommenden Halbmesser-Werten man nimmt, und deswegen nimmt man sich auch oft nicht die Mühe, für jedes Dreieck einen besonderen, der jeweiligen Breite φ entsprechenden Wert r zu berechnen, sondern man nimmt oft sogar für ganze Triangulierungsgebiete einen *konstanten* Kugel-Halbmesser r an. (Bestimmteres hierüber wird sich erst später mit der Theorie der geodätischen Linie sagen lassen.)

§ 40. Der sphärische Excess.

Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets grösser als 180°; der Überschuss der Winkelsumme über 180° heisst der *sphärische Excess.* Bezeichnen wir die Winkel mit α, β, γ und den sphärischen Excess mit ε, so haben wir also die Gleichung:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180° \tag{1}$$

Wenn die drei Winkel α, β, γ gemessen sind, so findet man hiernach auch den Excess ε, jedoch offenbar mit den Messungsfehlern der α, β, γ behaftet; es ist deswegen erwünscht, eine unabhängige scharfe Bestimmung von ε zu haben, welche von den kleinen Messungsfehlern der Winkel α, β, γ unabhängig ist, und im Gegenteil dazu dienen soll, diese Winkel α, β, γ in ihrer Summe zu kontrollieren.

Eine solche unabhängige Bestimmung des Excesses ε erhält man durch den Satz, dass der Excess der *Dreiecksfläche* F proportional ist, nämlich:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2}\,\varrho \tag{2}$$

Man kann diesen Satz mit Hilfe der sphärischen Zweiecke beweisen, und wegen der Wichtigkeit desselben setzen wir den bekannten elementaren Beweis des Satzes hier her:

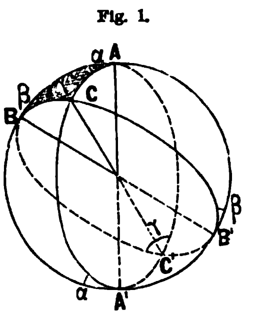
Unter *Zwei-Eck* versteht man die Fläche zwischen zwei grössten Kreisen, z. B. nach Fig. 1. die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } ACA'BA = (\alpha\,,\,\alpha)$$

da nun die Gesamt-Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$ ist, so ist offenbar die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } (\alpha\,,\,\alpha) = \frac{\alpha}{360}\,(4\pi r^2)$$

Fig. 1.



Wenden wir entsprechende Zeichen auch für die beiden anderen in dem Dreieck ABC zusammenstossenden Zwei-Ecke an, so haben wir:

$$\text{Zwei-Eck } (\beta\,,\,\beta) = \frac{\beta}{360}\,(4\pi r^2)$$

$$\text{Zwei-Eck } (\gamma\,,\,\gamma) = \frac{\gamma}{360}\,(4\pi r^2)$$

folglich die Summe:

$$(\alpha\,,\,\alpha) + (\beta\,,\,\beta) + (\gamma\,,\,\gamma) = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{360}\,(4\pi r^2) \tag{a}$$

Indem man nun die Fläche F des sphärischen Dreiecks ABC einführt, hat man nach dem Anblick von Fig. 1.:

$$(\alpha\,,\,\alpha) = F + A'BC$$
$$(\beta\,,\,\beta) = F + B'AC$$
$$(\gamma\,,\,\gamma) = F + C'AB$$

$$(\alpha\,,\,\alpha) + (\beta\,,\,\beta) + (\gamma\,,\,\gamma) = 3F + A'BC + B'AC + C'AB$$

Nun ist aber das auf der jenseitigen Kugelfläche von Fig. 1. liegende Dreieck $C'AB$ flächengleich mit seinem diesseits liegenden Scheiteldreieck $CA'B'$; man hat also nun, indem man zugleich $3F = 2F + F$ schreibt:

$$(\alpha\,,\,\alpha) + (\beta\,,\,\beta) + (\gamma\,,\,\gamma) = 2F + F + A'BC + B'AC + CA'B'$$

Die 4 letzten Glieder dieser Gleichung geben zusammen die halbe Kugelfläche $= 2\pi r^2$, es ist also:

$$(\alpha\,,\,\alpha) + (\beta\,,\,\beta) + (\gamma\,,\,\gamma) = 2F + 2\pi r^2 \qquad \text{(b)}$$

Nun geben die Gleichungen (a) und (b) zusammen:

$$F = (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)\,\frac{\pi}{180^\circ}\,r^2 \qquad \text{(c)}$$

Wenn man also die Bezeichnung ε nach (1) anwendet, so hat man aus (c), wenn man zugleich $\frac{180^\circ}{\pi} = \varrho$ schreibt, dieselbe Gleichung wie (2), nämlich:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \varepsilon = \frac{F}{r^2}\,\varrho \qquad \text{(d)}$$

Unter F ist streng genommen die *krumme* (kugelförmige) Oberfläche des Dreiecks zu verstehen, indessen kann man statt dessen mit genügender Annäherung auch die Fläche $\triangle$ eines *ebenen* Dreiecks benützen, das aus den Seiten des sphärischen Dreieks berechnet wird, d. h. man hat:

$$\text{Näherung} \quad \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}\,\varrho \qquad (3)$$

Fig. 2.
(Massstab 1 : 2 000 000.)

Zu einem Zahlenbeispiele wollen wir das hannoversche Dreieck benützen, welches in den klassischen Abhandlungen von *Gauss* mehrfach als Beispiel dient, nämlich das in Fig. 2. dargestellte Dreieck:

Inselsberg — Hohehagen — Brocken*).

Es sei gegeben:

die Seite Inselsberg—Brocken $b = 105\,972{,}85^m$ (4)

ferner die Dreieckswinkel, genähert, und die geographischen Breiten φ der Eckpunkte, ebenfalls genähert:

Punkt	Dreiecks-Winkel	Geogr. Breite
Inselsberg .	$\alpha = 40^\circ\ 39'\ 30''\ (25'')$	$50^\circ\ 51'\ 9''$
Hohehagen .	$\beta = 86\ \ 13\ \ 59\ \ (54'')$	51 28 31
Brocken . .	$\gamma = 53\ \ 6\ \ 46\ \ (41'')$	51 48 2
	Summe $180^\circ\ 0'\ 15''\ (0'')$	$\varphi = 51^\circ\ 22'\ 34''$ Mittel (5)

Die auf 1″ genau angegebenen Dreieckswinkel geben die Summe 180° 0′ 15″, d. h. einen Überschuss von 15″

*) Die Seiten und Winkel dieses Dreiecks werden an verschiedenen Stellen nicht übereinstimmend angegeben: *Gauss*, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie erste Abhandlung, 1843, Art. 14. und zweite Abhandlung 1846, Art. 35. *Gerling*, Beiträge zur Geographie Kurhessens 1839, S. 183. Generalbericht der europ. Gradm. für 1865, S. 48—50. Unsere Berechnung hat aus diesen verschiedenen Angaben eine willkürliche Auswahl getroffen, zum Zweck eines formellen Rechenbeispiels.

über 180°. Ohne zu wissen, ob das der sphärische Excess ist, oder von Messungs-Fehlern herrührt, verteilen wir, um wenigstens vorläufig eine in sich übereinstimmende ebene Dreiecks-Berechnung zu haben, diese 15″ auf die drei Mittel und erhalten dadurch die oben bei (5) in Klammern beigesetzten Sekundenwerte (25″), (54″), (41″) für die drei Winkel.

Mit diesen Winkeln und der schon bei (4) angegebenen Basisseite b macht man eine genäherte vorläufige Dreiecks-Berechnung nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie:

$$a = \frac{b}{\sin\beta}\sin\alpha \quad , \quad c = \frac{b}{\sin\beta}\sin\gamma$$

Dabei rechnet man nur etwa mit 5- oder 6-stelligen Logarithmen:

$\log b$	5.025 195	$\log b$	5.025 195
$Erg. \log \sin\beta$	0.000 940	$Erg. \log\sin\beta$	0.000 940
$\log\sin\alpha$	9.813 933	$\log\sin\gamma$	9.902 983
$\log a$	4.840 068	$\log c$	4.929 118

Man hat also nun zusammen:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = 40^\circ\ 39'\ 25'' & \log a = 4.840\,068 \\ \beta = 86^\circ\ 13'\ 54'' & \log b = 5.025\,195 \\ \gamma = 53^\circ\ \ 6'\ 41'' & \log c = 4.929\,118 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Nun kann man auch die Dreiecksfläche dreifach berechnen, denn es ist bekanntlich:

$$\text{Dreiecksfläche } \triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$\log a$	4.840 068	oder	$\log a$	4.840 068
$\log b$	5.025 195		$\log c$	4.929 118
$\log\sin\gamma$	9.902 983 — 10		$\log\sin\beta$	9.999 060 — 10
$\log 0{,}5$	9.698 970 — 10		$\log 0{,}5$	9.698 970 — 10
$\log\triangle$	9.467 216		$\log\triangle$	9.467 216 (7)

Nach diesem braucht man den mittleren Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite des Dreiecks. Diese Mittelbreite wurde schon unter (5) angegeben $\varphi = 51^\circ\ 22'\ 34''$, und damit entnimmt man aus der Tafel Seite [14] des Anhanges durch Interpolation den Wert $\log r$ oder auch sofort:

$\log\frac{1}{r^2}$	6.390 076 — 20	
hiezu $\log\varrho$	5.314 425	
und von (7) $\log\triangle$	9.467 216	
$\log\varepsilon$	1.171 717	$\varepsilon = 14{,}850''$ (8)

Damit sind die oben unter (5) gegebenen Winkel, insofern sie nur auf 1″ genau angesetzt sind, in ihrer Summe bestätigt. Die genaueren Winkel und die genauere Berechnung der Dreiecksseiten werden wir in § 41. — § 42. kennen lernen.

Zu der einfachen Excess-Berechnung, welche im vorstehenden Beispiele in aller Ausführlichkeit gegeben ist, kann man noch einige Bemerkungen machen. Für ein Dreieck mit den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ ist der Excess:

$$\varepsilon = \frac{\varrho}{2r^2}ab\sin\gamma \qquad (9)$$

und deswegen schreibt man für häufigeren Gebrauch die Logarithmen von $\frac{\varrho}{2\,r^2}$ tabellarisch heraus; zur Übersicht stellen wir zusammen:

$$\begin{array}{cc} \varphi & \log \frac{\varrho}{2\,r^2} \\ 45^\circ & 1.40411 - 10 \\ 50^\circ & 1.40361 - 10 \\ 55^\circ & 1.40312 - 10 \end{array} \qquad (9a)$$

Man kann solche Werte stets durch unsere Hilfstafel von Seite [2]—[23] des Anhangs finden, man kann aber auch den konstanten Logarithmus der in (9) gebraucht wird, durch eine besondere Reihe entwickeln, nämlich:

$$\begin{aligned} \log \frac{\varrho}{2\,r^2} = 1.407\,0165{\cdot}697 &- [4{\cdot}763\,2247{\cdot}31 - 10] \sin^2 \varphi \\ &- [2{\cdot}286\,6051 - 10] \sin^4 \varphi \\ &- [9{\cdot}93492 - 10] \sin^6 \varphi \\ &- [7{\cdot}63439 - 10] \sin^8 \varphi \end{aligned} \qquad (10)$$

Dabei bedeutet [...] die Logarithmen der Coëfficienten. Dieses ist im Anschluss an unsere Reihen in § 33. S. 211 berechnet, und stimmt auch mit der Reihe, welche angegeben ist in dem Werke „die königl. preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, zweiter Teil, zweite Abteilung, Berlin 1874, S. 607“.

Zur weiteren Übersicht der Verhältnisse kann man auch berechnen:

Fläche des Dreiecks	Sphärischer Excess
1 Quadrat-Kilometer	$\varepsilon = 0{,}00507''$
1 Quadrat-Meile	$\varepsilon = 0{,}279$
gleichseitiges Dreieck mit Seiten von $1^\circ = 15$ geogr. Meilen $= 111^{km}$	$\varepsilon = 27''$

Die letzte Annahme eines Dreiecks von 111^{km} Seite ist wohl das äusserste für Landes-Vermessungen; schon das *Gauss*sche Dreieck Inselsberg-Hohehagen-Brocken, das wir bei (8) als Beispiel benützten, mit rund $\varepsilon = 15''$, ist eines der grössten deutschen Dreiecke, das wir deswegen auch schon in der Zusammenstellung Seite 24 erwähnt haben.

Die grössten Dreiecke, welche die Geodäsie bis heute überhaupt kennt, nämlich die auf Seite 25 dargestellten Verbindungsdreiecke zwischen Spanien und Algier über das mittelländische Meer hinweg, haben sphärische (bzw. sphäroidische) Excesse von bzw. rund: 54″, 1′ 11″, 44″, 1′ 0″. (Zeitschr. f. Verm. 1882, S. 306.)

§ 41. Der *Legendre*sche Satz.

Wir betrachten ein geodätisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ, wie in Fig. 1. dargestellt ist.

Fig. 1.
Sphärisches Dreieck.

Fig. 2.
Ebenes Dreieck.

Wenn das sphärische Dreieck auf einer Kugel vom Halbmesser r liegt, so entsprechen den Seiten a b c gewisse Erd-Centriwinkel, wie aus folgender Übersicht zu ersehen ist:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{Seiten-Längen (in Metermass} \ldots\ldots & a, & b, & c \\
\text{Erd-Centriwinkel in analytischem Mass} \ldots & \frac{a}{r}, & \frac{b}{r}, & \frac{c}{r} \\
\text{,, \quad ,, \quad ,, geometrischem Mass} \ldots & \frac{a}{r}\varrho, & \frac{b}{r}\varrho, & \frac{c}{r}\varrho
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Man könnte nun mit diesen Erd-Centriwinkeln und den Winkeln α, β, γ, welche die Bögen a, b, c auf der Kugelfläche unter sich bilden, das sphärische Dreieck nach den bekannten strengen Formeln der sphärischen Trigonometrie auflösen; man thut das aber im allgemeinen nicht, weil die Erd-Centriwinkel sehr *klein* sind, und deswegen sich viel bequemer in Reihen-Entwicklungen und Näherungs-Formeln behandeln lassen.

Die älteste und beliebteste dieser Verfahrungsarten ist der von *Legendre* in Paris im Jahre 1787 gefundene und nach ihm benannte Satz, welcher heisst:

Ein kleines sphärisches Dreieck kann näherungsweise wie ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten berechnet werden, wenn man als Winkel des ebenen Dreiecks die um je ein Drittel des sphärischen Excesses verminderten Winkel des sphärischen Dreiecks nimmt.

Diesem Satze entspricht das oben in Fig. 2. gezeichnete *ebene* Dreieck, das dieselben Seiten a, b, c wie das sphärische Dreieck Fig. 1. hat, und dessen Winkel α', β', γ' zunächst noch unbestimmt gelassen, sich nachher bzw. $\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3}$, $\beta' = \beta - \frac{\varepsilon}{3}$, $\gamma' = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}$ ergeben werden.

Um dieses zu beweisen, schreiben wir für das sphärische Dreieck den Cosinus-Satz an:

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha$$

oder
$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

Nun werden alle kleinen Winkel nach Potenzen entwickelt (vgl. die Reihen-Formeln für $\sin x$ und $\cos x$ (30) und (31) § 30. S. 199, nämlich bis zur 4. Potenz einschliesslich:

$$\cos\alpha = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)}$$

Wenn man die hier vorkommenden Klammern ausmultipliziert, dabei immer die Glieder von höherer als der 4. Ordnung vernachlässigt, so hat man:

$$\left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right) = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4} - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{b^2c^2}{4r^4} + \frac{c^4}{24r^4}$$
$$= 1 - \frac{b^2 + c^2}{2r^2} + \frac{b^4 + c^4}{24r^4} + \frac{b^2c^2}{4r^4}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}+\frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4}-\frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}$$

Der Nenner $\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$ wird hinreichend genähert dadurch berücksichtigt, dass man statt dessen in dem Zähler einen Faktor $\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$ zusetzt, d. h.:

$$\cos\alpha = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\,\frac{b^2+c^2}{6r^2} \qquad (2)$$

Nun giebt das *ebene* Dreieck Fig. 2. nach dem Cosinus-Satz:

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha' \quad \text{oder} \quad \cos\alpha' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad (3)$$

Dieses mit (2) zusammen giebt:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc}+\frac{b^4+c^4+2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{12r^2bc}$$

Die beiden Teile zusammen gefasst und etwas umgeformt, geben:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24r^2bc} \qquad (4)$$

Der Zähler in diesem Ausdrucke rechts steht nun in sehr naher Verwandtschaft zu dem Inhalte $\triangle$ des ebenen Dreiecks. Es ist bekanntlich:

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

wo $s = \frac{a+b+c}{2}$, also $s-a = \frac{-a+b+c}{2}$ u. s. w., folglich:

$$\triangle^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

Hiebei ist: $(a+b+c)(-a+b+c) = -a^2+b^2+c^2+2bc$

$(a-b+c)(\ a+b-c) = \ a^2-b^2-c^2+2bc$

Folglich:

$$16\triangle^2 = (-a^2+b^2+c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc)$$

$$16\triangle^2 = -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 \qquad (5)$$

Man hat also aus (4) und (5):

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -\frac{16\triangle^2}{24r^2bc} \qquad (6)$$

Nun ist aber in erster Näherung:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -(\alpha-\alpha')\sin\alpha' + \ldots \qquad (7)$$

was man entweder geradezu als Differential-Formel nach (47) § 30. S. 202 einsehen, oder etwa auch goniometrisch so begründen kann:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -2\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}$$

d. h. wenn α und α' sehr nahe gleich sind:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -(\alpha-\alpha')\sin\alpha' \qquad (7a)$$

Setzt man dieses (7) bzw. (7a) in (6), so erhält man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3} \frac{\triangle^2}{r^2 b c \sin \alpha'} \tag{8}$$

Es ist aber auch andererseits:

$$b c \sin \alpha' = 2 \triangle \tag{9}$$

und damit wird (8):

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{3} \frac{\triangle}{r^2} \text{ bzw. } \alpha - \alpha' = \frac{1}{3} \frac{\triangle}{r^2} \varrho \tag{10}$$

Die erste hier in (10) geschriebene Form gilt für analytisches Mass, die zweite für geometrisches Mass.

Oder wenn man nach (3) § 40. S. 234 den sphärischen Excess ε einführt, hat man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{3} \varepsilon \tag{11 a}$$

und entsprechend: $$\beta - \beta' = \frac{1}{3} \varepsilon \tag{11 b}$$

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{3} \varepsilon \tag{11 c}$$

Summe: $$\alpha + \beta + \gamma - 180° = \varepsilon \tag{12}$$

Damit ist der oben in Worten ausgesprochene Satz bewiesen.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir wieder das klassische Dreieck, das wir schon im vorigen § 40. S. 234 benützt haben, nämlich nun mit scharfen Winkel-Werten:

	sphärisch	eben (Leg.-Satz.)	
Inselsberg	α = 40° 39′ 30,380″	α' = 40° 39′ 25,430″	
Hohehagen	β = 86 13 58,840	β' = 86 13 53,890	(13)
Brocken	γ = 53 6 45,630	γ' = 53 6 40,680	
Summe:	180° 0′ 14,850″	180° 0′ 0,000″	

$$\varepsilon = 14,850''$$

$$\frac{\varepsilon}{3} = 4,950''$$

Die eine gegebene Seite sei $b = 105\,972,850^m$. (14)

Damit macht man eine Berechnung, wie wenn das Dreieck eben wäre, wieder nach dem Sinus-Satze der ebenen Trigonometrie (vgl. (6) § 40. S. 235), diesesmal aber scharf mit 7—8stelligen Logarithmen, weshalb wir die ganze Rechnung hersetzen wollen:

log b	5.025 1946·1		*log b*	5.025 1946·1
log sin β′	9.999 0600·0	oder	*Erg. log sin β′*	0.000 9400·0
log (b : sin β′)	5.026 1346·1		*log (b : sin β′)*	5.026 1346·1
log sin α′	9.813 9344·8		*log sin γ′*	9.902 9830·6
log a	4.840 0690·9		*log c*	4.929 1176·7

$a = 69194,105^m$ $c = 84941,060^m$ (15)

Bemerkung über die Schärfe der Rechnung.

Das vorstehende Beispiel ist mit 3 Dezimalen der Sekunde, d. h. auf 0,001″ genau gerechnet. Es geschieht dieses häufig, wenn auch die Messungen selbst viel

weniger sicher sind. Hiebei soll die letzte Dezimale keine selbständige Bedeutung haben, sondern nur die vorletzte Dezimale vor Abrundungs-Fehlern schützen. Namentlich bei langen Ausgleichungs-Rechnungen kann man genötigt sein, von vorn herein auf 0,001″ genau zu rechnen, wenn man am Schlusse 0,01″ noch sicher haben will, bei kürzeren trigonometrischen Berechnungen genügt 0,01″ als letzte Rechenstelle.

Entsprechende Genauigkeit ist bei der logarithmischen Rechnung anzuwenden. Unsere Zahlen-Beispiele sind meist 8stellig, d. h. mit 0.000 0000·1 als letzter logarithmischer Rechenstelle geführt; die letzte Stelle 0·1 ist teils mit Hilfe des 10stelligen „Thesaurus logarithnorum", teils auch nur durch Benützung der Abrundungs-Merkmale in der *Schrön*schen Logarithmen-Tafel erhalten, und dient dann (ebenso wie 0,001″ bei den Winkeln) nur als Sicherung für die vorhergehende 7 Stelle.

§ 42. Die Additamenten-Methode.

Ein zweites Näherungs-Verfahren zur Berechnung sphärischer Dreiecke, deren Seiten im Vergleich zu dem Kugel-Halbmesser klein sind, ist am Anfang dieses Jahrhunderts zuerst in Bayern eingeführt, und dann auch bei den übrigen süddeutschen Landes-Vermessungen allgemein angewendet worden. Das Verfahren wurde allgemein mit dem Namen „*Additamenten-Methode*" bezeichnet, weil kleine Korrektions-Grössen häufig zu den Logarithmen addiert (allerdings umgekehrt auch subtrahiert) werden.

Während beim *Legendre*schen Satz ein ebenes Hilfsdreieck benützt wurde, dessen Seiten denen des sphärischen Dreiecks gleich sind, und dessen Winkel verschieden von den Winkeln des sphärischen Dreiecks angenommen werden mussten, gehen wir nun umgekehrt darauf aus, ein ebenes Hilfsdreieck zu suchen, welches zwei Winkel mit dem sphärischen Dreieck gemein, dafür aber andere Seiten hat. Mit Beziehung auf Fig. 1. und Fig. 2. denken wir uns ein sphärisches Dreieck gegeben mit den Seiten a und b und den Gegenwinkeln α und β, und konstruieren hiezu ein ebenes Hilfsdreieck, welches dieselben Winkel α und β hat wie das sphärische Dreieck, aber damit notwendig andere Seiten a', b' haben muss.

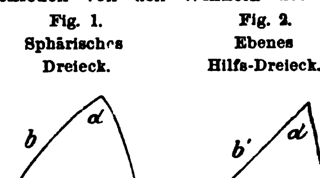


Fig. 1. Sphärisches Dreieck. Fig. 2. Ebenes Hilfs-Dreieck.

Nach dem Sinus-Satze für das sphärische Dreieck und nach dem Sinus-Satze für das ebene Dreieck haben wir die zwei Gleichungen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a'}{b'} \tag{1}$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} + \ldots}{b - \frac{b^3}{6r^3} + \ldots} \tag{2}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a - \frac{a^3}{6r^2} + \ldots}{b - \frac{b^3}{6r^2} + \ldots} \tag{3}$$

Diese Gleichung ist befriedigt, wenn man setzt:

$$a' = a - \frac{a^3}{6\,r^2} \quad \text{und} \quad b' = b - \frac{b^3}{6\,r^2}$$

oder allgemein für irgend eine Dreiecks-Seite s hat man:

$$s' = s - \frac{s^3}{6\,r^2} \tag{4}$$

Der so bestimmte Wert $\frac{s^3}{6\,r^2}$ ist das lineare Additament für die Seite s, und wenn man den Halbmesser r kennt, kann man eine Tafel der Werte $\frac{s^3}{6\,r^2}$ berechnen, z. B. für die Mittelbreite $\varphi = 50°$ hat man:

$$log\, r = 6.804\,894 \qquad log \frac{s}{6\,r^2} = 5.612\,062$$

Damit ist zur Übersicht folgendes berechnet:

$$\left.\begin{array}{lllllllll} s & = 10\,000^m & 20\,000^m & 30\,000^m & 40\,000^m & 50\,000^m & 60\,000^m & 80\,000^m & 100\,000^m \\ \frac{s^3}{6\,r^2} & = \quad 0{,}004^m & 0{,}033^m & 0{,}111^m & 0{,}262^m & 0{,}512^m & 0{,}884^m & 2{,}096^m & 4{,}093^m \end{array}\right\} \tag{5}$$

Wenn also z. B. eine Dreiecksseite $s = 40\,000^m$ vorliegt, so wird das zugehörige $s' = 40\,000 - 0{,}262 = 39\,999{,}738^m$, und darauf könnte man eine Dreiecks-Berechnung mit sphärischen Winkeln gründen, welche nun ganz die Form einer ebenen Rechnung hat.

Indessen thut man dieses in dieser Form gewöhnlich nicht geradezu, sondern da man doch logarithmisch rechnet, bringt man auch die Additamente in *logarithmische* Form.

Um diese logarithmische Form zu bekommen, gehen wir nochmals auf (1) und (3) zurück und finden als allgemeine Beziehung zwischen einer Dreiecks-Seite s und der mit Sinus-Additament reduzierten Seite s' folgendes:

$$s' = r\, sin \frac{s}{r}\,, \text{ oder } \frac{s'}{r} = sin \frac{s}{r} \tag{6}$$

also logarithmisch:

$$log \frac{s'}{r} = log\, sin \frac{s}{r} = log \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6\,r^3} + \frac{s^5}{120\,r^5} - \ldots \right) \tag{7}$$

Dabei haben wir noch die 5. Ordnung in der Reihe beibehalten, um nachher beurteilen zu können, ob das Glied 5. Ordnung noch von Einfluss ist.

Entwickelt man den letzten Ausdruck nach der logarithmischen Reihe, so erhält man:

$$log\, sin \frac{s}{r} = log \frac{s}{r} + log \left(1 - \frac{s^2}{6\,r^2} + \frac{s^4}{120\,r^4}\right)$$

$$log\, sin \frac{s}{r} = log \frac{s}{r} + \mu \left(- \frac{s^2}{6\,r^2} + \frac{s^4}{120\,r^4}\right) - \frac{\mu}{2} \left(- \frac{s^2}{6\,r^2} + \ldots\right)^2$$

$$log\, sin \frac{s}{r} = log \frac{s}{r} - \frac{\mu\, s^2}{6\,r^2} - \frac{\mu}{180} \frac{s^4}{r^4}$$

Oder wenn man wieder s' nach (6) benützt:

$$log\, s - log\, s' = \frac{\mu\, s^2}{6\,r^2} + \frac{\mu}{180} \frac{s^4}{r^4} \tag{8}$$

Für die Mittelbreite $\varphi = 50°$ hat man hiefür (nach Seite [14] des Anhangs):

$$log \frac{\mu}{6\,r^2} = 5.24985 - 20 \qquad log \frac{\mu}{180\,r^4} = 0.16294 - 40$$

oder für Einheiten der 7. Logarithmen-Decimale:

$$log \frac{\mu}{6\,r^2} = 2{\cdot}24985 - 10 \qquad log \frac{\mu}{180\,r^4} = 7{\cdot}16294 - 30$$

Für $s = 100\,000^m$ oder $log\,s = 5.00000$ giebt dieses:

$$\frac{\mu}{6\,r^2}\,s^2 = 0.000\,0177{\cdot}8 \qquad \frac{\mu}{180\,r^4}\,s^4 = 0.000\,0000{\cdot}001$$

Daraus folgt, dass für gewöhnliche Dreiecks-Seiten das zweite Glied der Formel (8) unmerklich ist, und dass man deswegen bei dem ersten Gliede von (8) stehen bleiben kann.

Indem wir das logarithmische Additament mit A bezeichnen, schreiben wir mit Weglassung des zweiten Gliedes, zur Zusammenfassung:

$$A = log\,s - log\,s'$$

oder $A = log \frac{s}{r} - log\,sin \frac{s}{r} = \frac{\mu}{6\,r^2}\,s^2$ wo $log \frac{\mu}{6\,r^2} = 2{\cdot}249\,846 - 10$ für $\varphi = 50°$ (9)

Damit ist die Hilfstafel auf Seite [30] des Anhangs berechnet, und zwar in zweifacher Form, I. als Funktion von $log\,s$, mit der Annahme $log\,r = 6.804\,894$ für $\varphi = 50°$ und II. als Funktion von $log \frac{s}{r}$.

Die erste Tafel I., d. h. der obere Teil von Seite [30], ist die bequemere für Dreiecks-Berechnung, weil man geradezu mit $log\,s$ (für s in Metern) einzugehen hat, während man im Falle II., d. h. im unteren Teile von Seite [30], zuvor $log \frac{s}{r}$ bilden muss, das man sonst nicht braucht. Die Tafel II. ist aber andererseits allgemeiner brauchbar, weil sie nicht wie I. an eine bestimmte Annahme für den Halbmesser r gebunden ist, und weil sie auch noch für anderes Mass als Meter (z. B. Fusse, Toisen, Ruten u. s. w. bei älteren Triangulierungen) anwendbar ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das Dreieck des vorigen § 41. S. 234:

Inselsberg	$\alpha = 40°\,39'\,30{,}380''$		
Hohehagen	$\beta = 86\;\;13\;\;58{,}840$		(10)
Brocken	$\gamma = 53\;\;\;6\;\;45{,}630$		
	$180°\;\;0'\,14{,}850''$		

Basis $b = 105\,972{,}850^m$ $\qquad log\,b = 5.025\,1946{\cdot}1$ (11)

Hiezu braucht man das logarithmische Additament, das aus der Hilfstafel I. von Seite [30] des Anhangs für $log\,s = 5.0252$ durch Interpolation $= 199{\cdot}7$ entnommen werden kann. Da jedoch jene Hilfstafel I. Seite [30] für die Mittelbreite $\varphi = 50°$ gilt, während unser Dreieck die Mittelbreite $\varphi = 51°\,22{,}6'$ hat, mit $log\,r = 6.804962$, und da unsere Dreiecks-Seiten sehr gross sind, so berechnen wir diesesmal das Additament A besonders:

$\log b^2$	10.05039
$\log \frac{\mu}{6 r^2}$	2.24971
$\log A_b$	2.30010 $A_b = 199{\cdot}57$ (12)

Dieses ist nur ein klein wenig verschieden von dem aus der Tafel entnommenen 199·7.

Nun hat man eine logarithmische Berechnung im wesentlichen wie in der Ebene, nämlich nach (10), (11), (12):

$\log b$	5.025 1946·1			
Logar. Additament	— 199·6			
$\log b'$	5.025 1746·5		$\log b'$	5.025 1746·5
$\log \sin \beta$	9.999 0606·9	oder	$Erg. \log \sin \beta$	0.000 9393·1
$\log (b' : \sin \beta)$	5.026 1139·6			5.026 1139·6
$\log \sin \alpha$	9.813 9466·1		$\log \sin \gamma$	9.902 9908·8
$\log a'$	4.840 0605·7		$\log b'$	4.929 1048·4
Logar. Additament	+ 85·1		Logar. Add.	+ 128·2 (13)
$\log a$	4.840 0690·8		$\log c$	4.929 1176·6

$a = 69\,194{,}105^m$ $\qquad$ $b = 84\,941{,}060^m$ (14)

Dieses stimmt hinreichend mit (15) § 41. S. 239.

Die soeben bei (13) gebrauchten Additamente entnimmt man wieder aus der Hilfstafel I. von Seite [30] des Anhangs, oder, wenn man die letzte Stelle ganz scharf haben will, berechnet man dieselben ebenso wie vorher bei (12).

Vergleicht man die Rechnung nach dieser Additamenten-Methode mit der Rechnung nach dem *Legendre*schen Satze, in Hinsicht auf Bequemlichkeit, Übersichtlichkeit und dergl., so wird man etwa sagen können:

Der *Legendre*sche Satz empfiehlt sich bei einem einzelnen Dreieck oder bei seltener Anwendung, durch seine Unabhängigkeit von allen besonderen Hilfen, denn den Excess ε muss man der Winkelprobe wegen bei dem anderen Verfahren doch auch kennen, und der *Legendre*sche Satz selbst, d. h. die Verteilung $\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ ist immer im Gedächtnis.

Dagegen bei ganzen Dreiecks-Netzen, mit vielen zusammenhängend zu rechnenden Dreiecken, ist die Additamenten-Methode vorteilhafter. Man reduziert zunächst nur den Logarithmus der Basis des Netzes ($\log b' = \log b - A_b$), dann rechnet man das ganze Dreiecks-Netz mit den sphärischen Winkeln durch und erhält dadurch allerdings lauter reduzierte Werte $\log a'$, $\log c'$ u. s. w., die man dann aber nachher alle auf einmal mit der Additamenten-Tafel auf $\log a$, $\log c$ u. s. w. reduzieren kann.

Ein Vorteil des Additamenten-Verfahrens besteht auch darin, dass man nur *eine* Tabelle der Dreiecks-Winkel α, β, γ ... führen muss, während für den *Legendre*schen Satz eine *zweite* Tabelle der α', β', γ' nötig ist, welche nicht nur die Akten vermehrt, sondern auch Veranlassung zu Irrtümern geben kann, wenn nachher zur Coordinaten-Berechnung u. dgl. wieder die sphärischen Winkel selbst gebraucht werden.

Zusammenhang zwischen dem Legendreschen Satze und der Additamenten-Methode.

Diese beiden Rechnungs-Arten beruhen auf Reihen-Entwicklungen sphärischer Formeln bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, und es muss deshalb möglich sein, beide Rechnungen in ihren Formeln gegenseitig auseinander abzuleiten, was wir nun noch zeigen wollen:

Mit Annahme der bisherigen Bezeichnungen hat man nach dem *Legendre*schen Satze:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha}{\sin\beta - \frac{\varepsilon}{3}\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{cotg}\alpha\right)}{\sin\beta\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{cotg}\beta\right)} \tag{15}$$

Nun ist $\varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}$, und wenn man in den Korrektions-Gliedern ebene und sphärische Winkel vertauscht, so hat man:

$$2\,b\,c\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$
$$b\,c\sin\alpha = 2\,\triangle$$

also $$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\,\triangle}\,, \quad \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\triangle}{3\,r^2} \tag{16}$$

$$\frac{\varepsilon}{3}\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{cotg}\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\,r^2}$$

Damit giebt (15):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}\,\frac{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2}\right)}{\left(1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\,r^2}\right)} = \frac{a}{b}\left(1 + \frac{1}{12\,r^2}(2\,b^2 - 2\,a^2)\right)$$

Dieses kann man auch so schreiben:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{a^2}{6\,r^2}\right)\left(1 + \frac{b^2}{6\,r^2}\right) = \frac{a}{b}\,\frac{1 - \frac{a^2}{6\,r^2}}{1 - \frac{b^2}{6\,r^2}}$$

Dieses stimmt nach (1), (3) § 42. S. 240 mit der Additamenten-Methode überein; es ist also der oben angegebene Zusammenhang bewiesen.

Die „Additamenten-Methode" wurde in Bayern eingeführt durch *Soldner*. Weiteres hierüber findet man in dem amtlichen Werke: „Die Bayerische Landes-Vermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, herausgegeben von der K. Steuer-Kataster-Kommission in Gemeinschaft mit dem topogr. Bureau des Generalstabs". München 1873, S. 263 u. ff. (auf S. 262 u. ff. Abdruck einer Abhandlung, welche *Soldner* am 5. Mai 1810 der bayerischen Kataster-Kommission übergeben hat). Vgl. auch: *Bohnenberger*, „De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis". Tubingae 1826, § 11.

Ausführlichere Additamenten-Tafeln als unsere Tafel Seite [30] des Anhangs sind:

Bremiker, Studien über höhere Geodäsie, Berlin 1869. Anhang Tafel III., Reduktion von Bogen auf Sehne, d. h. $\frac{1}{4}$ A, wenn A der Wert unserer Tafel II. Seite [30].

Bremiker, Tafel zur Verwandlung von Log. Bogen in Log. Tangente. Wissenschaftliche Begründung der Rechnungs-Methoden des Centralbureaus der Europäischen Gradmessung, als Manuskript gedruckt. Beilage zum Generalbericht d. Europ. Gr. für 1870 (giebt $T = 2\,A$).

F. G. Gauss, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, Berlin 1876, zweiter Teil, S. 39—48.

Bremiker und *Schrön*. Auch die Zahlen S, welche in der *Bremiker*schen und *Schrön*schen 7-stelligen Logarithmentafel am Fuss jeder Seite der Logarithmen der natürlichen Zahlen angegeben sind, stehen in einfacher Beziehung zu unseren Additamenten. Es ist nämlich dieses S:

$$S = \log \frac{1}{\varrho''} - A = \log \sin 1'' - A$$

z. B. in *Schrön* S. 29 findet man für 0° 36′ 0″ $S = 4.685\,5669{\cdot}3$. Dabei ist $\log \frac{1}{\varrho''} = 4.685\,5748{\cdot}7$ und unsere Tafel II. auf Seite [80] giebt für den Centriwinkel 0° 36′ 0″ den Wert $A = 79{\cdot}4$, was die Differenz der beiden soeben geschriebenen Zahlen ist. Für die Zahlen T der Logarithmentafeln gilt die entsprechende Gleichung:

$$T = \log \frac{1}{\varrho''} + 2\,A = \log \sin 1'' + 2\,A$$

§ 43. Verschiedene sphärische Aufgaben.

Nachdem wir die Reduktion eines sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Hilfsdreieck in zweifacher Weise kennen gelernt haben, können wir auch andere Aufgaben als die zuerst behandelte Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und allen Winkeln lösen.

Wir wollen hier noch die Bestimmung eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel und dann die sphärisch-pothenotische Aufgabe vornehmen.

I. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach dem Legendreschen Satz.

Wenn zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind, so kann man daraus sofort den Excess ε berechnen:

$$\varepsilon = b\,c \sin \alpha \frac{\varrho}{2\,r^2} \tag{1}$$

Damit hat man auch die Summe der beiden andern Winkeln β und γ:

$$\beta + \gamma = 180° + \varepsilon - \alpha \tag{2}$$

Betrachtet man nun das *Legendre*sche ebene Hilfsdreieck und berücksichtigt, dass:

$$\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \beta - \gamma$$

so findet man nach den *Gauss*schen Gleichungen der ebenen Trigonometrie:

$$\tan g \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b - c) \cos \frac{\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon}{2}}{(b + c) \sin \frac{\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon}{2}} = \frac{Z}{N} \tag{3}$$

$$a = \frac{Z}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \tag{4}$$

Aus (2) und (4) hat man also $\beta + \gamma$ und $\beta - \gamma$, folglich auch β und γ und mit Probe a aus (4), womit die Aufgabe gelöst ist.

II. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach der Additamenten-Methode.

Wenn b und c *logarithmisch* gegeben sind, so ist folgende Rechnung bequemer als die vorige:

Für ein *ebenes* Dreieck mit den Seiten b' und c' und den Winkeln β und γ hat man, mit Einführung eines Hilfswinkels μ folgendes:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b'}{c'} = \frac{1}{\operatorname{tang}\mu}$$

$$\frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{1 - \operatorname{tang}\mu}{1 + \operatorname{tang}\mu}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta - \gamma}{2} = \operatorname{tang}\frac{\beta + \gamma}{2}\operatorname{cotg}(\mu + 45^\circ)$$

Für das *sphärische* Dreieck setzen wir entsprechend:

$$\log b' = \log b - A_b \quad , \quad \log c' = \log c - A_c$$

wobei A_b und A_c die Additamente von b und c sind. Man rechnet nun den Hilfswinkel μ nach der Formel:

$$\operatorname{cotg}\mu = \frac{b'}{c'} \tag{5}$$

dann bestimmt man den sphärischen Excess ε durch eine vorläufige Dreiecks-Berechnung, und hat dann:

$$\beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon - \alpha$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta - \gamma}{2} = \operatorname{tang}\frac{\beta + \gamma}{2}\operatorname{cotg}(\mu + 45^\circ) \tag{6}$$

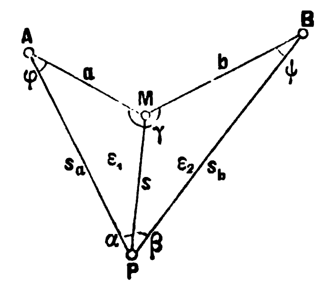
Aus $\frac{\beta + \gamma}{2}$ und $\frac{\beta - \gamma}{2}$ erhält man β und γ.

Die dritte Seite a kann man sodann sowohl nach dem *Legendre*schen Satz als auch nach der Additamenten-Methode bestimmen.

III. Sphärisch pothenotische Aufgabe.

Wir nehmen in Fig. 1. dieselben Berechnungen wie früher für die ebene pothenotische Aufgabe in Band II S. 240, und haben auch nur wenig an der früheren Rechnung zu ändern.

Fig. 1.
Pothenotische Aufgabe.



Drei Punkte A, M, B sind gegenseitig festgelegt durch die Seiten $AM = a$, $MB = b$ und den Winkel $BMA = \gamma$; ein Punkt P soll durch Messung der Winkel α und β gegen A, M, B festgelegt werden.

Man löst diese Aufgabe zunächst vorläufig genähert auf, indem man die Figur als eben behandelt (d. h. man rechnet zuerst nach Band II S. 240—242). Dann hat man so viel Anhalt, um die sphärischen Excesse ε_1 und ε_2 der beiden Dreiecke PAM und PMB zu berechnen, damit ist auch die Summe $\varphi + \varphi$ bestimmt, nämlich:

$$\varphi + \psi = 360^\circ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\alpha + \beta + \gamma) \tag{7}$$

Mit den logarithmischen Additamenten A_a und A_b berechnet man:

$$log\, a - A_a = log\, a' \quad \text{und} \quad log\, b - A_b = log\, b'$$

dann lässt sich die Rechnung wie für ein ebenes Viereck weiterführen; man setzt:

$$\frac{a'}{sin\, \alpha} : \frac{b'}{sin\, \beta} = tang\, \mu$$

und findet:

$$tang\, \frac{\varphi - \psi}{2} = tang\, \frac{\varphi + \psi}{2} cotg\, (\mu + 45°) \qquad (8)$$

Nachdem somit durch (7) und (8) die beiden Winkel φ und ψ bestimmt sind, können alle Dreiecks-Seiten nach dem *Legendre*schen Satze oder nach der Additamenten-Methode weiter berechnet werden.

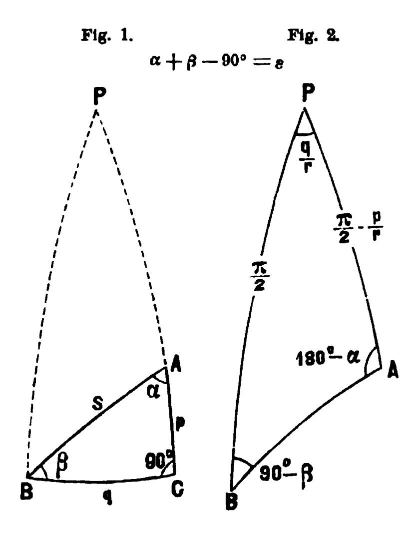
§ 44. Sphärisch-trigonometrische Reihen-Entwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{r^4}$ einschliesslich.

Der *Legendre*sche Satz und die Additamenten-Methode beruhen auf sphärisch-trigonometrischen Reihen-Entwicklungen, die wir beim *Legendre*schen Satze (§ 41.) nur bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau im Schluss-Ergebnis behandelt haben. Bei der Additamenten-Methode haben wir in (8) § 42. S. 241 noch ein Glied von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ hinzugenommen, weil sich das ohne besondere Mühe nebenbei ergab; und es hat sich gezeigt, dass dieses höhere Glied bei den praktischen Berechnungen mit Dreiecks-Seiten bis 100 000^m und darüber unmerklich ist.

Obgleich dadurch die Wahrscheinlichkeit nahe gelegt wird, dass auch in den übrigen verwandten Entwicklungen die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ genügen, müssen wir doch, um ein sicheres Urteil zu haben, die höheren Glieder kennen lernen.

Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, dass eine sehr weit und fein geführte *sphärische* Berechnung für die Geodäsie zunächst wenig reellen Wert hat, solange die sphärische Berechnungs-Art überhaupt nicht strenger begründet wird als dieses in unserem § 39. S. 233 geschehen ist; denn statt höhere Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ zu berücksichtigen, wobei $r = \sqrt{MN}$ sich aus den beiden Haupt-Krümmungshalbmessern M und N berechnet, sollte man vorher daran denken, den Einfluss der *Ungleichheit* von M und N und die von der geographischen Breite abhändigen Änderungen der Krümmungen zu untersuchen.

Dieses können wir erst später thun, und wenn wir jetzt die höheren Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ untersuchen, so hat das zunächst den Sinn, dass wir uns überzeugen, ob die Entwicklungen bis $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, hinreichend sind, um die *geschlossenen* sphärischen Formeln, welche man ja auch anwenden könnte, zu ersetzen, und zweitens sollen durch die nachfolgenden Entwicklungen unsere späteren Entwicklungen mit der geodätischen Linie zweckmässig vorbereitet werden.



I. Der sphärische Excess.

Wir betrachten in Fig. 1. das rechtwinklige sphärische Dreieck ABC mit der Hypotenuse s, mit den Katheten p und q und mit den Winkeln 90°, β und α. Da einer der Winkel = 90° ist, ist der sphärische Excess:

$$\varepsilon = \alpha + \beta - 90^\circ \tag{1}$$

Wir ergänzen das Dreieck ABC zu einem gleichschenkligen rechtseitigen Dreiecke BPC, so dass BP und CP Quadranten werden, und der Winkel oben bei P der Kathete q entspricht. Dieses haben wir in Fig. 2. noch deutlicher ausgedrückt, indem die zwei Seiten $BP = \frac{\pi}{2}$ und $AP = \frac{\pi}{2} - \frac{p}{r}$, sowie der Winkel bei $P = \frac{q}{r}$, alle diese in analytischem Masse, eingeschrieben sind, während der Winkel bei B sich $= 90^\circ - \beta$ und der Winkel bei A sich $= 180^\circ - \alpha$, in geometrischem Masse findet. *)

Wendet man auf das Ergänzungs-Dreieck ABP Fig. 2., eine der *Gauss*schen bzw. *Neper*schen Gleichungen, (13) S. 196, an, so findet man:

$$tang\,\frac{(180^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta)}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p}{r}\right)\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{p}{r}\right)\right)}\,cotg\,\frac{q}{2r}$$

$$tang\,\frac{180^\circ - (\alpha + \beta - 90^\circ)}{2} = \frac{\cos\frac{p}{2r}}{\sin\frac{p}{2r}}\,cotg\,\frac{q}{2r}$$

Also wegen (1), wenn man zugleich Zähler und Nenner umstellt:

$$tang\,\frac{\varepsilon}{2} = tang\,\frac{p}{2r}\,tang\,\frac{q}{2r} \tag{2}$$

Die Anwendung der Tangenten-Reihe (19) S. 199, giebt hiefür, wenn man nur bis zur 4. Ordnung geht:

---

*) Wir unterscheiden geometrisches und analytisches Mass $\left(\text{z. B. der Quadrant} = 90^\circ \text{ oder } = \frac{\pi}{2} \text{ vgl. (16) S. 198}\right)$ entsprechend den Bedeutungen, in welchen die Winkel hauptsächlich gebraucht werden; wenn jedoch in derselben Entwicklung die Bedeutung sich ändert, z. B. zuerst $\varepsilon = \alpha + \beta - 90^\circ$ geometrisch, nachher in der Reihen-Entwicklung $\varepsilon = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$ analytisch zu denken ist, so soll dieses ohne Änderung der Bezeichnung, nötigenfalls in Worten bemerkt, oder auch, als gewissermassen selbstverständlich, dem Leser überlassen werden.

$$\frac{\varepsilon}{2} + \cdots = \left(\frac{p}{2r} + \frac{p^3}{24r^3} + \cdots\right)\left(\frac{q}{2r} + \frac{q^3}{24r^3} + \cdots\right)$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{pq}{4r^2} + \frac{pq^3 + p^3q}{48r^4}$$

$$\varepsilon = \frac{pq}{2r^2} + \frac{pq}{24r^4}(p^2 + q^2) \qquad (3)$$

Wir wollen für dieselbe Formel noch eine *zweite* Entwicklung angeben, welche zwar nicht so unmittelbar vor sich geht, wie die vorstehende Entwicklung (2) — (3), welche aber dafür keine besondere Figur wie Figur 2. verlangt, und auch wegen der dabei auftretenden strengen Formel (4) erwünscht ist.

Das rechtwinklige Dreieck ABC Fig. 1. giebt:

$$cotg\,\alpha\; cotg\,\beta = \cos\frac{s}{r} = 1 - 2\sin^2\frac{s}{2r}$$

$$2\sin^2\frac{s}{2r} = 1 - cotg\,\alpha\; cotg\,\beta = \frac{\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$2\sin^2\frac{s}{2r} = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\varepsilon\sin^2\frac{s}{r}}{\sin\frac{p}{r}\sin\frac{q}{r}}$$

oder

$$\sin\varepsilon = \frac{\sin\frac{p}{r}\sin\frac{q}{r}}{2\cos^2\frac{s}{2}} \qquad (4)$$

Wenn man dieses entwickelt, und in den Gliedern zweiter Ordnung $s^2 = p^2 + q^2$ setzt, so bekommt man wieder die Formel (3).

II. Die Katheten-Formeln.

Fig. 3.

Das rechtwinklige sphärische Dreieck Fig. 3 giebt nach (3) S. 194:

$$\sin\frac{q}{r} = \sin\frac{s}{r}\sin\alpha \quad , \quad tang\frac{p}{r} = tang\frac{s}{r}\cos\alpha$$

oder entwickelt:

$$q - \frac{q^3}{6r^2} = \left(s - \frac{s^3}{6r^2}\right)\sin\alpha \quad , \quad p + \frac{p^3}{3r^2} = \left(s + \frac{s^3}{3r^2}\right)\cos\alpha \qquad (5)$$

Um diese Gleichungen nach q bzw. nach p aufzulösen, benützt man zunächst die ersten Näherungen:

$$q = s\sin\alpha + \frac{1}{r^2}\cdots \qquad p = s\cos\alpha + \frac{1}{r^2}\cdots$$

$$\frac{q^3}{6r^2} = \frac{s^3\sin^3\alpha}{6r^2} + \frac{1}{r^4}\cdots \qquad \frac{p^3}{3r^2} = \frac{s^3\cos^3\alpha}{3r^2} + \frac{1}{r^4}\cdots$$

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6r^2}\sin\alpha + \frac{s^3}{6r^2}\sin^3\alpha \qquad p = s\cos\alpha + \frac{s^3}{3r^2}\cos\alpha - \frac{s^3}{3r^2}\cos^3\alpha$$

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6r^2}\sin\alpha\cos^2\alpha \qquad p = s\cos\alpha + \frac{s^3}{3r^2}\sin^2\alpha\cos\alpha \qquad (6)$$

Wir werden diese Entwicklungen noch um ein Glied weiter treiben, wollen dieses aber nur noch an der Formel für q ausführlich zeigen. Statt (5) hat man dann:

$$q - \frac{q^3}{6\,r^2} + \frac{q^5}{120\,r^4} = \left(s - \frac{s^3}{6\,r^2} + \frac{s^5}{120\,r^4}\right) \sin\alpha \tag{7}$$

hiezu hat man nach (6):

$$q^3 = s^3 \sin^3\alpha - \frac{3}{6}\frac{s^5}{r^2} \sin^3\alpha\cos^2\alpha + \ldots$$

$$q^5 = s^5 \sin^5\alpha + \ldots$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke für q^3 und q^5 in (7) einsetzt, so bekommt man:

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6\,r^2}\sin\alpha + \frac{s^5}{120\,r^4}\sin\alpha$$

$$+ \frac{s^3}{6\,r^2}\sin^3\alpha - \frac{s^5}{12\,r^4}\sin^3\alpha\cos^2\alpha$$

$$- \frac{s^5}{120\,r^4}\sin^5\alpha$$

Wenn man dieses ordnet und berücksichtigt, dass:

$$s^4 = s^4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$$

so findet man:

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6\,r^2}\sin\alpha\cos^2\alpha - \frac{s^5}{120\,r^4}\sin\alpha\cos^2\alpha\,(8\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \tag{8}$$

Dieses ist die Weiterentwicklung der ersten Formel der Gruppe (6); die Weiterentwicklung der zweiten Formel der Gruppe (6) wird ebenso gemacht und giebt:

$$p = s\cos\alpha + \frac{s^3}{3\,r^2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \frac{s^5}{15\,r^4}\sin^2\alpha\cos\alpha\,(2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \tag{9}$$

Umkehrung der Reihen (8) und (9).

Man kann die Reihen (8) und (9) auch umkehren, d. h. man kann $s\sin\alpha$ und $s\cos\alpha$ in Potenzen von q und p ausdrücken. (Man könnte hiezu das allgemeine Verfahren anwenden, das wir in § 30. S. 202—203 angedeutet haben; wir ziehen es aber hier vor, ohne alle Vorbereitungs-Hilfsmittel zu verfahren.)

Jedenfalls hat man in erster Näherung aus (8) und (9):

$$s\sin\alpha = q + \ldots \qquad s\cos\alpha = p + \ldots$$

folglich sofort in zweiter Näherung aus (8) und (9):

$$s\sin\alpha = q + \frac{q\,p^2}{6\,r^2} + \ldots \qquad s\cos\alpha = p - \frac{q^2\,p}{3\,r^2} + \ldots$$

folglich zum Einsetzen in die höheren Glieder von (8) und (9):

$$s^2\sin^2\alpha = q^2 + \frac{q^2\,p^2}{3\,r^2} + \ldots \qquad s^2\cos^2\alpha = p^2 - 2\,\frac{q^2\,p^2}{3\,r^2} + \ldots$$

$$s^3\sin^2\alpha\cos\alpha = \left(q^2 + \frac{q^2\,p^2}{3\,r^2}\right)\left(p - \frac{q^2\,p}{3\,r^2}\right) = q^2\,p + \frac{q^2\,p^3}{3\,r^2} - \frac{q^4\,p}{3\,r^2} + \ldots$$

$$s^3\sin\alpha\cos^2\alpha = \left(q + \frac{q\,p^2}{6\,r^2}\right)\left(p^2 - 2\,\frac{q^2\,p^2}{3\,r^2}\right) = q\,p^2 + \frac{q\,p^4}{6\,r^2} - 2\,\frac{q^3\,p^2}{3\,r^2} + \ldots$$

Setzt man dieses in (8) so bekommt man:

$$s \sin \alpha = q + \frac{q p^2}{6 r^2} + \frac{q p^4}{36 r^4} - \frac{q^3 p^2}{9 r^4} - \frac{1}{120 r^4} (q p^4 - 8 q^3 p^2) + \dots$$

Dieses giebt geordnet:

$$s \sin \alpha = q + \frac{q p^2}{6 r^2} - \frac{q p^2}{360 r^4} (16 q^2 - 7 p^2) \tag{10}$$

und auf gleiche Weise bekommt man aus (9):

$$s \cos \alpha = p - \frac{q^2 p}{3 r^2} - \frac{q^2 p}{45 r^4} (q^2 + 2 p^2) \tag{11}$$

III. Die Hypotenusen-Formel.

Aus den soeben gewonnenen Formeln (10) und (11) kann man auch eine Formel für s^2 herstellen, indem man $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ quadriert und addiert. Wenn man dabei die höheren Glieder wie bisher vernachlässigt, so bekommt man:

$$s^2 \sin^2 \alpha = q^2 + \frac{q^2 p^4}{36 r^4} + \frac{q^2 p^2}{3 r^2} + \frac{q^2 p^2}{180 r^4} (-16 q^2 + 7 p^2)$$

$$s^2 \cos^2 \alpha = p^2 + \frac{q^4 p^2}{9 r^4} - 2 \frac{q^2 p^2}{3 r^2} - 2 \frac{q^2 p^2}{45 r^4} (q^2 + 2 p^2)$$

Wenn man dieses zusammennimmt und ordnet, so findet man:

$$s^2 = q^2 + p^2 - \frac{q^2 p^2}{3 r^2} - \frac{q^2 p^2 (q^2 + p^2)}{45 r^4} \tag{12}$$

Man kann diese Formel auch unmittelbar finden durch Entwicklung von

$$\cos \frac{s}{r} = \cos \frac{q}{r} \cos \frac{p}{r}.$$

IV. Der erweiterte Legendresche Satz.

Nach Andeutung von Fig. 4. verbinden wir zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke zu einem allgemeinen sphärischen Dreieck ABC, indem die beiden Katheten q und q' nun die Seite $CB = a$ bilden, zu welcher die gemeinschaftliche Kathete p als Höhe gehört.

Fig. 4.

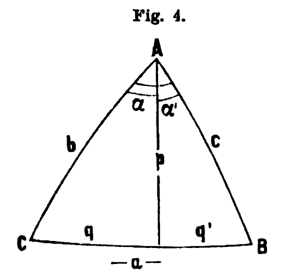
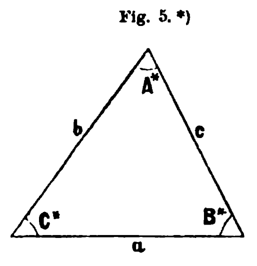


Fig. 5. *)



*) Die Winkel A^*, B^*, C^* des ebenen Dreiecks, deren Summe $A^* + B^* + C^* = 180°$ ist, entsprechen den Winkeln α', β', γ' in der früheren Fig. 2. § 41. S. 236.

Der Dreiecks-Winkel A setzt sich nun aus den beiden Winkeln α und α' der beiden rechtwinkligen Dreiecke so zusammen:

$$A = \alpha + \alpha', \quad \text{also} \quad \cos A = \cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' \qquad (13)$$

Nun hat man nach (11):

$$b\cos\alpha = p - \frac{p\,q^2}{3\,r^2} - \frac{p\,q^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q^2) \qquad (14)$$

$$c\cos\alpha' = p - \frac{p\,q'^2}{3\,r^2} - \frac{p\,q'^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q'^2) \qquad (15)$$

$$b\sin\alpha = q + \frac{p^2\,q}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q^2) \qquad (16)$$

$$c\sin\alpha' = q' + \frac{p^2\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q'^2) \qquad (17)$$

Wenn man (14) und (15) multipliziert, dabei die höheren Glieder vernachlässigt, und dann nach gleichen Potenzen ordnet, so bekommt man:

$$\begin{aligned} b\,c\cos\alpha\cos\alpha' = p^2 &- \frac{p^2\,q^2}{3\,r^2} - \frac{p^2\,q^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q^2) \\ &- \frac{p^2\,q'^2}{3\,r^2} + \frac{p^2\,q^2\,q'^2}{9\,r^4} \\ &- \frac{p^2\,q'^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q'^2) \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise findet man auch aus (16) und (17):

$$\begin{aligned} b\,c\sin\alpha\sin\alpha' = q\,q' &+ \frac{p^2\,q\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q^2) \\ &+ \frac{p^2\,q\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^4\,q\,q'}{36\,r^4} \\ &+ \frac{p^2\,q\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q'^2) \end{aligned}$$

Diese beiden Ausdrücke zusammen geben:

$$b\,c(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') = b\,c\cos(\alpha+\alpha') = bc\cos A - p^2 - q\,q' - \frac{p^2}{3\,r^2}(q^2 + q'^2 + qq')$$

$$- \frac{p^2}{360\,r^4}(16\,p^2\,q^2 + 16\,p^2\,q'^2 + 24\,p^2\,q\,q' + 8\,q^4 + 8\,q'^4 - 40\,q^2\,q'^2 - 16\,q^3\,q' - 16\,q'^3\,q) \qquad (18)$$

Nun hat man nach der Hypotenusen-Formel (12):

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= p^2 + q^2 - \frac{p^2\,q^2}{3\,r^2} - \frac{p^2\,q^2}{45\,r^4}(p^2 + q^2) \\ c^2 &= p^2 + q'^2 - \frac{p^2\,q'^2}{3\,r^2} - \frac{p^2\,q'^2}{45\,r^4}(p^2 + q'^2) \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

und unmittelbar $\quad a^2 = (q + q')^2 = q^2 + 2\,q\,q' + q'^2 \qquad (20)$

Zugleich wird in Fig. 5. ein *ebenes* Dreieck eingeführt, dessen Seiten a, b, c gleich sind den Seiten des sphärischen Dreiecks, und dessen Winkel A^*, B^*, C^* bestimmt werden sollen. Für das ebene Dreieck hat man bekanntlich die Gleichung:

$$2\,b\,c\cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$$

und wenn man hier die Werte (19) und (20) einsetzt, so bekommt man:

$$bc\cos A^* = p^2 - qq' - \frac{p^2}{6r^2}(q^2+q'^2) - \frac{p^2}{90r^4}(p^2q^2+p^2q'^2+q^4+q'^4) \quad (21)$$

Dieses (21) wird mit dem früheren (18) verglichen, wodurch man nach einiger algebraischer Umformung finden wird:

$$bc(\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2}{6r^2}(q+q')^2 + \frac{p^2(q+q')^2}{90r^4}(3p^2+(q+q')^2-8qq') \quad (22)$$

Das hier vorkommende Produkt $p(q+q')$ steht in naher Beziehung zu $bc \sin A$, denn wir haben aus (16) und (15) mit Weglassung der letzten Glieder:

$$bc\sin\alpha\cos\alpha' = pq + \frac{p^3q}{3r^2} - \frac{pqq'^2}{3r^2}$$

Entsprechend geben auch (14) und (17):

$$bc\cos\alpha\sin\alpha' = pq' + \frac{p^3q'}{6r^2} - \frac{pq^2q'}{3r^2}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen giebt:

$$bc(\sin\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha\sin\alpha') = bc\sin A = p(q+q') + \frac{p(q+q')}{6r^2}(p^2-2qq')$$

also:

$$p(q+q') = bc\sin A\left(1-\frac{1}{6r^2}(p^2-2qq')\right) \quad (23)$$

Das Ziel dieser Entwicklung ist die kleine Winkel-Differenz zwischen A und A^*, und wir wollen deshalb setzen:

$$A - A^* = x \quad (24)$$

folglich in erster Näherung:

$$\cos A = \cos(A^*+x) = \cos A^* - x\sin A^* + \ldots \quad (25)$$

Setzt man dem entsprechend $\cos A^* - \cos A = x\sin A^*$ in (22), und berücksichtigt (23) genähert, mit $A = A^*$, so erhält man:

$$x = \frac{p}{6r^2}(q+q') \quad (26)$$

Damit entwickelt man eine zweite Annäherung:

$$A = A^* + \frac{p}{6r^2}(q+q') \quad , \quad \sin A = \sin A^* + \frac{p}{6r^2}(q+q')\cos A^* + \ldots$$

$$\sin A = \sin A^*\left(1+\frac{p}{6r^2}(q+q')\operatorname{cotg} A^*\right) \quad (26a)$$

oder mit Ersetzung von $\operatorname{cotg} A^*$ aus (21) und (23) genähert:

$$\operatorname{cotg} A^* = \frac{p^2-qq'}{p(q+q')}$$

Dieses in (26a) gesetzt giebt:

$$\sin A = \sin A^*\left(1+\frac{1}{6r^2}(p^2-qq')\right) \quad (27)$$

Damit kann man in (23) die Funktion $\sin A$ durch $\sin A^*$ ersetzen, und dadurch bekommt man:

$$p(q+q') = bc\sin A^*\left(1+\frac{1}{6r^2}(p^2-qq')-\frac{1}{6r^2}(p^2-2qq')\right)$$

$$p(q+q') = bc\sin A^*\left(1+\frac{1}{6r^2}qq'\right) = 2\triangle\left(1+\frac{1}{6r^2}qq'\right) \quad (28)$$

Hier haben wir die Fläche $\triangle$ des ebenen Dreiecks eingeführt, nämlich:

$$\frac{b\,c\,\sin A^*}{2} = \triangle \tag{29}$$

Nun gehen wir zum zweiten Male auf (22) zurück, und bilden durch Einsetzung von (28):

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3}\,\frac{\triangle^2}{r^2}\left(1 + \frac{q\,q'}{3\,r^2}\right) + \frac{4}{90}\,\frac{\triangle^2}{r^2}\left(\frac{3\,p^2 + (q+q')^2 - 8\,q\,q'}{r^2}\right)$$

Hier ist nach Fig. 4. zu berücksichtigen:

$$p^2 + q^2 = b^2 \quad , \quad p^2 + q'^2 = c^2 \quad \text{und} \quad (q+q')^2 = a^2$$

womit man finden wird:

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3}\,\frac{\triangle^2}{r^2} + \frac{2}{90}\,\frac{\triangle^2}{r^2}\left(\frac{3\,b^2 + 3\,c^2 - a^2}{r^2}\right) \tag{30}$$

Nun wird die frühere Entwicklung (25) noch um ein Glied weiter geführt, nämlich mit $A - A^* = x$:

$$\cos A = \cos(A^* + x) = \cos A^* - x \sin A^* - \frac{x^2}{2} \cos A^*$$

$$\cos A - \cos A^* = -\sin A^* \left(x + \frac{x^2}{2} \operatorname{cotg} A^*\right)$$

Dieses in (30) gesetzt, zugleich mit Rücksicht auf (29) giebt:

$$x + \frac{x^2}{2} \operatorname{cotg} A^* = \frac{\triangle}{3\,r^2} + \frac{1}{90}\,\frac{\triangle}{r^4}\,(3\,b^2 + 3\,c^2 - a^2) \tag{30a}$$

Die erste Näherung für x ist:

$$x = \frac{\triangle}{3\,r^2} + \frac{1}{r^4} \cdots$$

Dazu hat man aus dem ebenen Dreieck:

$$\cos A^* = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \qquad \sin A^* = \frac{2\triangle}{b\,c}$$

alsd

$$\frac{x^2}{2} \operatorname{cotg} A^* = \frac{\triangle^2}{9\,r^4}\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\triangle} = \frac{\triangle}{72\,r^4}\,(b^2 + c^2 - a^2)$$

Dieses in (30a) gesetzt giebt:

$$x = \frac{\triangle}{3\,r^2} + \frac{\triangle}{360\,r^4}\,(7\,b^2 + 7\,c^2 + a^2) \tag{31}$$

Hiebei ist die Winkelreduktion $A - A^* = x$ in analytischem Masse dargestellt; um auf Sekunden überzugehen, muss man den Faktor ϱ zusetzen. Thut man dieses und schreibt zugleich auch die zwei anderen entsprechenden Formeln für $B - B^*$ und $C - C^*$, so hat man:

$$x = A - A^* = \frac{\triangle}{3\,r^2}\,\varrho + \frac{\triangle}{360\,r^4}\,\varrho\,(a^2 + 7\,b^2 + 7\,c^2) \tag{31a}$$

$$y = B - B^* = \frac{\triangle}{3\,r^2}\,\varrho + \frac{\triangle}{360\,r^4}\,\varrho\,(7\,a^2 + b^2 + 7\,c^2) \tag{32a}$$

$$z = C - C^* = \frac{\triangle}{3\,r^2}\,\varrho + \frac{\triangle}{360\,r^4}\,\varrho\,(7\,a^2 + 7\,b^2 + c^2) \tag{33a}$$

$$\text{Summa} \quad \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}\,\varrho + \frac{\triangle}{24\,r^4}\,\varrho\,(a^2 + b^2 + c^2) \tag{34}$$

Unter $\triangle$ ist hier die Fläche des *ebenen* Dreiecks verstanden, das aus den drei Seiten *a*, *b*, *c* konstruiert werden kann, und die vorstehenden Formeln sind immer nur Näherungs-Formeln, weil noch höhere Glieder vernachlässigt sind. Wenn man dagegen die *kugel*förmige Oberfläche *F* des *sphärischen* Dreiecks benützt, so hat man die schon früher in (2) § 40. S. 233 aufgestellte strenge Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2}\varrho \tag{35}$$

Durch Vergleichung von (35) und (34) hat man auch eine Vergleichung zwischen *F* und $\triangle$, nämlich:

$$F = \triangle\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24\,r^2}\right) \tag{36}$$

Hiefür kann man auch noch eine andere Form finden, indem man nach (31 a) schreibt:

$$\sin A = \sin A^* + \frac{\triangle}{3\,r^2}\cos A^* = \sin A^*\left(1 + \frac{\triangle}{3\,r^2}\operatorname{cotg} A^*\right)$$

Nimmt man hiezu die einfachen Beziehungen, $2\,b\,c\cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$ und $2\triangle = b\,c\sin A^*$, so findet man:

$$\frac{\sin A}{\sin A^*} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2}$$

dieses auch auf die beiden andern Winkel angewendet giebt für (36):

$$F = \triangle\sqrt{\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A^* \sin B^* \sin C^*}} \tag{37}$$

Von ähnlicher Bedeutung wie (36) ist auch die aus (34) folgende Gleichung:

$$\frac{\triangle}{r^2} = \varepsilon\left(1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24\,r^2}\right) \tag{38}$$

Setzt man dieses noch in (31 a), (31 b), (31 c), so wird überall $\triangle$ durch ε ersetzt und man hat:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{-2\,a^2 + b^2 + c^2}{r^2}\right) \tag{39 a}$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{a^2 - 2\,b^2 + c^2}{r^2}\right) \tag{39 b}$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{a^2 + b^2 - 2\,c^2}{r^2}\right) \tag{39 c}$$

Summe $\varepsilon = \varepsilon$ (Probe) (40)

Endlich kann man hier noch eine kleine Form-Veränderung vornehmen dadurch, dass man den Mittelwert m^2 von a^2, b^2 und c^2 einführt, nämlich:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = m^2 \tag{41}$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\,\frac{m^2 - a^2}{r^2} \tag{42 a}$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\,\frac{m^2 - b^2}{r^2} \tag{42 b}$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\,\frac{m^2 - c^2}{r^2} \tag{42 c}$$

Für ein gleichseitiges Dreieck verschwinden die zweiten Glieder, was auch an sich klar ist.

Nimmt man ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit den Katheten a und a, also $c^2 = 2\,a^2$, so wird:

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\,r^2} \quad , \quad 3\,m^2 = a^2 + a^2 + 2\,a^2 \quad , \quad m^2 = \frac{4}{3}\,a^2.$$

Setzt man $a = 100\,000^m$, so werden die zweiten Glieder in (42a), (42b) und (42c) bzw.:

$$+\frac{a^4}{40\,r^4}\,\varrho = +\,0{,}0003''$$

$$+\frac{a^4}{40\,r^4}\,\varrho = +\,0{,}0003''$$

$$-\frac{a^4}{20\,r^4}\,\varrho = -\,0{,}0006''$$

Zu einer Anwendung der vorstehenden Formeln auf ein Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das klassische Dreieck Inselsberg, Hohehagen, Brocken, das wir schon mehrfach, in § 40.—42 benützt haben.

Mit Zugrundlegung der hier als vorläufig zu betrachtenden Berechnungen § 41. S. 239 erhalten wir:

$$\log r = 6.804\,9621 \quad , \quad \log \triangle = 9.467\,2168 \quad , \quad \log F = 9.467\,2271$$

und dann nach (31a), (31b), (31c):

$$\begin{aligned} A - A^* &= 4{,}949\,900'' + 0{,}000\,136'' = 4{,}950\,036'' \\ B - B^* &= 4{,}949\,900 \ \ + 0{,}000\,096 \ \ = 4{,}949\,996 \\ C - C^* &= 4{,}949\,900 \ \ + 0{,}000\,121 \ \ = 4{,}950\,021 \\ \hline \varepsilon &= 14{,}849\,700'' + 0{,}000\,353'' = 14{,}850\,053'' \end{aligned}$$

Dasselbe bekommt man auch nach den Formeln (42a), (42b), (42c), nämlich:

$$\begin{aligned} A - A^* &= 4{,}950\,018'' + 0{,}000\,018'' = 4{,}950\,036'' \\ B - B^* &= 4{,}950\,018 \ \ - 0{,}000\,021 \ \ = 4{,}949\,997 \\ C - C^* &= 4{,}950\,018 \ \ + 0{,}000\,003 \ \ = 4{,}950\,021 \\ \hline \varepsilon &= 14{,}850\,054'' + 0{,}000\,000'' = 14{,}850\,054'' \end{aligned}$$

Damit hat man folgende sphärische und ebene Winkel:

Inselsberg	$A =$	40° 39′ 30,380 000″		$A^* =$	40° 39′ 25,429 964″
Hohehagen	$B =$	86 13 58,840 000		$B^* =$	86 13 53,890 004
Brocken	$C =$	53 6 45,630 053		$C^* =$	53 6 40,680 032
Summe		180° 0′ 14,850 053″			180° 0′ 0,000 000″

Wenn man mit diesen Winkeln die frühere Berechnung (13)—(15) S. 239 wiederholt, so muss man mindestens 10stellig rechnen, um den Unterschied noch wahrnehmbar zu machen; indessen auch in den 10stelligen Logarithmen ist der Unterschied höchstens eine letzte Stelle, d. h. = 0·001, und z. B. an der Dreiecks-Seite $a = 69194{,}105^m$ bringt die neue schärfere Rechnung nur einen Unterschied von $0{,}00002^m$ oder $0{,}02^{mm}$.

Da das benützte Dreieck eines der grössten in der deutschen Geodäsie ist, können wir hiernach mit Ruhe die höheren Glieder vernachlässigen.

Zum Schlusse dieser Entwicklungen wollen wir noch eine Übersichts-Tabelle berechnen für die Werte des Korrektions-Gliedes 4. Ordnung zum *Legendre*schen Satze, d. h. nach (42a) für das Glied:

$$\varDelta A_4 = \frac{\varepsilon}{60\, r^2}(m^2 - a^2) \quad , \quad \text{wo } m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Die beiden Faktoren ε und $(m^2 - a^2)$ desselben sind von einander unabhängig; der Excess ε misst die Fläche des Dreiecks und der Faktor $(m^2 - a^2)$ ist ein Mass für die Unsymmetrie und Ungleichseitigkeit des Dreiecks. Wenn ein Dreieck sehr lang aber schmal ist, so kann ε klein und $(m^2 - a^2)$ gross sein; wenn ein Dreieck sehr gross und nahezu gleichseitig ist, so wird ε gross und $(m^2 - a^2)$ klein; man kann also alle denkbaren Fälle am besten umfassen durch eine Tabelle für $\varDelta A_4$ mit zwei unabhängigen Eingängen ε und $m^2 - a^2$, wie im folgenden gegeben wird:

Winkel-Korrektion 4. Ordnung, $\varDelta A_4$, zum Legendreschen Satz.

Unsymmetrie des Dreiecks		Sphärischer Excess ε des Dreiecks					
$\sqrt{m^2 - a^2}$	$m^2 - a^2$	$\varepsilon = 10''$	$\varepsilon = 20''$	$\varepsilon = 50''$	$\varepsilon = 100''$	$\varepsilon = 200''$	$\varepsilon = 300''$
10^{km}	100^{qkm}	0,00000″	0,00000″	0,00000″	0,00000″	0,00001	0,00001″
20	400	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00003	0,00005
50	2 500	0,00001	0,00002	0,00005	0,00010	0,00021	0,00031
100	10 000	0,00004	0,00008	0,00021	0,00041	0,00082	0,00123
200	40 000	0,00016	0,00033	0,00081	0,00164	0,00329	0,00493
400	160 000	0,00066	0,00131	0,00325	0,00657	0,01314	0,01972

Indem wir noch eine allgemeinere Betrachtung über das Fehler-Glied des *Legendre*schen Satzes anstellen, schreiben wir nach (39a) mit Zuziehung des Ausdrucks $\triangle$ nach (5) § 41. S. 238:

$$\varDelta A_4 = \frac{b^2 + c^2 - 2\, a^2}{720\, r^4} \sqrt{a^2 (2\, b^2 + 2\, c^2 - a^2) - (b - c)^2}$$

Wenn hier $b = c$, also das Dreieck gleichschenklig genommen wird, so fällt $(b - c)^2$ fort, und der Ausdruck wird ein Maximum in Hinsicht auf das Verhältnis zwischen b und c. Indem man den an der Seite a anliegenden Winkel β einführt, kann man, mit $c = b$, das Fehler-Glied zweifach ausdrücken:

$$\varDelta A_4 = \frac{a^4}{1440\, r^4} \frac{1 - 4 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} \operatorname{tang} \beta \tag{a}$$

oder

$$\varDelta' A_4 = \frac{b^4}{180\, r^4} (1 - 4 \cos^2 \beta) \sin 2\, \beta \tag{b}$$

Im Falle (a) entsteht ein Maximum mit $\beta = 45°$ und im Falle (b) entstehen Maxima mit $\beta = 26° 49'$ und $\beta = 73° 44'$ und daraus folgt:

$$(\beta = 45°), \qquad (\varDelta A_4)\, max = 0{,}001\,389\, \frac{a^4}{r^4}$$

$$(\beta = 73° 44'), \quad (\varDelta' A_4)\, max = 0{,}002\,050\, \frac{b^4}{r^4}$$

Setzt man hier bzw. a oder $b = 100\,000$ Meter, so wird das betreffende Fehler-Glied $= 0{,}000\,017''$ oder $0{,}000\,026''$.

Man sieht hieraus, dass bei messbaren Dreiecken die Korrektion 4. Ordnung immer zu vernachlässigen ist.

Der einfache *Legendre*sche Satz mit Entwicklung bis $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, erschien in den Pariser „Mémoires de l'académie des sciences", Jahrgang 1787, und hat inzwischen zahlreiche Beweisformen gefunden.

Die Entwicklung bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ ist zuerst von *Buzengeiger* gegeben, in der „Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von *Lindenau* und *Bohnenberger*, 6. Band, S. 264—270, Tübingen 1818". Dieses wird auch von *Bessel* zitiert in „Astr. Nachr. 19. Band, 1841, S. 103". *Baeyer*, „Das Messen auf der sphäroidischen Erd-Oberfläche, Berlin 1862", giebt auf S. 70—74 den *Legendre*schen Satz „mit einer Erweiterung nach *Bessel*", wovon in unserer vorigen Auflage, 1878, § 26. S. 126—130 entlehnt war.

Unsere neue Behandlungsweise (im vorstehenden § 44.) ist hervorgerufen durch die entsprechenden Entwicklungen für Dreiecke mit geodätischen Linien in *Gauss*' „Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. 24—28". Wir betrachten unseren § 44. als Vorbereitung für unsere späteren analogen Entwicklungen für Dreiecke auf dem Ellipsoid.

Über den Maximal-Einfluss der sphärischen Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ giebt schon *Baeyer* (Messen auf d. sphär. Oberfl. S. 73—74) eine Erörterung.

In unserer vorigen Auflage, 1878, S. 131, hatten wir eine solche Untersuchung mit der Nebenbedingung konstanter Dreiecks-Fläche. *Helmert* untersucht in seinen math. u. phys. Theor. d. h. G. I. § 16 den Maximal-Einfluss der höheren Glieder mit der Nebenbedingung, dass die Quadratsumme der Seiten, d. h. $a^2 + b^2 + c^2 = 3\,m^2$ konstant sei.

Kapitel V.

Sphärische Coordinaten.

§ 45. Übersicht der Coordinaten-Systeme.

Wir betrachten in der Folge die Erde als Kugel von gegebenem Halbmesser.

Bei dieser Betrachtungsweise werden manche Formeln und Rechen-Verfahren gefunden werden $\left(\text{mit kleinen Gliedern von der Ordnung } \frac{1}{r^2}\right)$, welche man sofort auch auf das Ellipsoid, bzw. auf Messungen an der Erd-Oberfläche anwenden kann, wenn man nur den Kugel-Halbmesser r der Erd-Krümmung an der betreffenden Stelle einigermassen anpasst. Andere der in diesem Kapitel zu entwickelnden Formeln $\left(\text{mit Gliedern von der Ordnung } \frac{1}{r}\right)$ werden keine so unmittelbare Übertragung auf das Ellipsoid zulassen, und daher nur als Vorbereitungs-Formeln in irgend welchem Sinne zu betrachten sein.

Indem wir nähere Betrachtungen dieser Art auf die besonderen Fälle verschieben, betrachten wir jetzt die einzelnen Arten der Punkt-Bestimmung auf der Kugel.

I. Geographische Coordinaten.

Fig. 1.
Sphärische Coordinaten.

In Fig. 1. ist O der Mittelpunkt einer Kugel, welche, als Darstellung der Erde, den Nordpol N, Südpol S, also die Axe NS und den Äquator AA' hat.

NAS und NBS sind zwei Meridiane mit darauf liegenden Punkten P und P'; die gegenseitige Lage zweier Meridiane wird durch den Längen-Unterschied λ bestimmt, welcher entweder als Winkel λ am Pol N oder als Bogen AB auf dem Äquator dargestellt werden kann.

Auf einem Meridian NA wird ein Punkt P bestimmt durch seine geographische Breite φ; welche entweder als Erd-Centriwinkel $AOP = \varphi$ oder als Meridian-Bogen AP (für den Halbmesser $= 1$) dargestellt werden kann.

II. Polar-Coordinaten.

Wenn P als fester Punkt gilt, so kann man einen zweiten Punkt P' dagegen festlegen durch Angabe des Entfernungs-Bogens PP' und des Azimutes $NPP' = \alpha$. Die Azimute werden meist von Norden über Osten gezählt, wie in Fig. 1. mit α bei P eingeschrieben ist.

Ein zweites Azimut α' hat der Bogen PP' im Punkte P' und zwar erscheint in Fig. 1. der Winkel α' entweder als nordöstliches Azimut von PP' in der Verlängerung über P', oder als südwestliches Azimut von $P'P$.

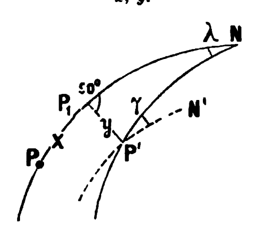
Die Differenz der beiden Azimute α und α' führt den Namen „Meridian-Konvergenz", d. h.

$$\text{Meridian-Konvergenz} = \alpha' - \alpha \qquad (1)$$

Dabei ist der dem Äquator zugewendete Winkel α' der grössere, also die Meridian-Konvergenz in dem Sinne der Gleichung (1) gezählt, positiv.

III. Rechtwinklige Coordinaten.

Fig. 2.
Rechtwinklige Coordinaten x, y.



In Fig. 2., welche einen besonderen Fall von Fig. 1. darstellt, ist $P'P_1$, ein Grosskreisbogen, rechtwinklig zu PN, und der Punkt P' wird in Bezug auf P bestimmt, durch die Abscisse $PP_1 = x$, auf dem Meridian PN gemessen, und durch die Ordinate $P_1P' = y$, rechtwinklig zum Meridian gemessen.

Als Meridian-Konvergenz bei rechtwinkligen Coordinaten gilt der Winkel γ, welcher in P' liegt zwischen dem Meridiane $P'N$ und dem Bogen $P'N'$, welcher eine Parallele zu P_1N ist.

Dieses ist nur eine andere Ausdrucksweise für die schon bei *II.* gegebene allgemeinere Erklärung der Meridian-Konvergenz, denn wenn das Azimut bei P_1 den be-

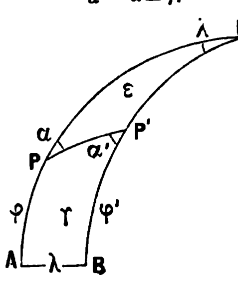
sonderen Wert 90° annimmt, so ist die Meridian-Konvergenz für die Punkte P_1 und P' die Differenz:

$$P P_1 P' - P_1 P' N = 90° - (90° - \gamma) = \gamma \qquad (2)$$

Dabei kommt der Ursprungs-Punkt P und die Abscisse x gar nicht in Betracht, sondern nur der Fusspunkt P_1.

Bemerkungen zur Meridian-Konvergenz.

Fig. 3.
Meridian-Konvergenz
$\alpha' - \alpha = \gamma$.



Die Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$ ist gleich dem sphärischen Excesse γ des Vierecks $A\,B\,P'\,P$ Fig. 3., denn da dieses Viereck bei A und B rechte Winkel hat, besteht die Gleichung:

$$90° + 90° + (180° - \alpha) + \alpha' - 360° = \gamma$$

$$\text{d. h.} \quad \alpha' - \alpha = \gamma \qquad (3)$$

Bezeichnet man ferner mit ε den sphärischen Excess des Dreiecks $P\,P'\,N$, welches bei N den Längen-Unterschied λ enthält, so hat man:

$$\lambda + \alpha + (180° - \alpha') - 180° = \varepsilon$$

$$\text{d. h.:} \quad \lambda = (\alpha' - \alpha) + \varepsilon \quad \text{oder} \quad \alpha' - \alpha = \lambda - \varepsilon \qquad (4)$$

Das letzte ist auch unmittelbar klar, indem λ der Excess des ganzen Dreiecks $A\,B\,N$ sein muss.

Diese beiden Gleichungen (3) und (4) sind sphärisch streng richtig; man kann daran auch eine Näherungs-Formel knüpfen, indem man die Fläche des Vierecks $A\,B\,P'\,P$ für den Fall eines *kleinen* Bogens $P\,P'$ ausdrückt. In diesem Falle sind auch die Breiten φ und φ' nahezu gleich, und dann ist diese Vierecks-Fläche (nach § 36. Fig. 1. S. 224) für den Halbmesser r:

$$\text{Fläche } A\,B\,P'\,P = (r\,\lambda)\,(r \sin \varphi) = r^2 \lambda \sin \varphi$$

also der Excess:

$$\gamma = \frac{r^2 \lambda \sin \varphi}{r^2} = \lambda \sin \varphi$$

$$\text{oder:} \quad \alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi \quad \text{genähert.} \qquad (5)$$

Wenn φ' und φ genau *gleich* sind, so ist diese Gleichung (5) für beliebig grossen Bogen $P\,P'$ streng richtig, was man dann durch Betrachtung der beiden Meridian-Tangenten in P und P' leicht einsehen kann.

Anmerkung. Ohne praktische Bedeutung, aber für die zusammenfassende Darstellung nützlich, ist die Bemerkung, dass alle die im vorstehenden einzeln behandelten Coordinaten-Systeme auch von *einem* Gesichtspunkt aus als drei Arten von Polar-Systemen betrachtet werden können, nämlich so:

	Pol	Richtungswinkel	Strahlenlänge
I	N	λ	$90° - \varphi'$
II	P	α	$P\,P'$
III	Pol zu $P\,N$	x	$90° - y$

§ 46. Rechtwinklige sphärische (*Soldner*sche) Coordinaten.

Der schon im vorigen § 45. an Fig. 2. S. 258 erläuterte einfache Grundgedanke der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten ist etwa um 1809 von *Soldner* zur Vermessung des Königreichs Bayern angewendet worden, und da dieser Vorgang allgemeine Nachahmung bei den übrigen deutschen Vermessungen gefunden hat, werden diese Coordinaten noch heute nach *Soldner* benannt.

Wir denken uns in Fig. 1. einen Meridian NOS der kugelförmigen Erde als Anfangsmeridian des Systems angenommen, und darauf einen Punkt O als Ursprung oder Nullpunkt.

Fig. 1.
Rechtwinklige Coordinaten.

Um einen Punkt A durch Coordinaten zu bestimmen, legen wir einen Grosskreisbogen $Q' A_1 A Q$ durch den Punkt A, rechtwinklig zu dem Meridian ON, wobei A_1 auf ON der Fusspunkt der Senkrechten $A A_1$ ist und Q' sowie Q die sogenannten Pole des Meridians SON sind.

Durch den Fusspunkt A_1 wird bestimmt:

$$\left.\begin{array}{l} O A_1 = x, \text{ die Abscisse von } A \\ A_1 A = y, \text{ die Ordinate von } A \end{array}\right\} \quad (1)$$

Wenn noch ein zweiter Punkt B durch Coordinaten bestimmt werden soll, so legt man durch ihn wieder einen Grosskreis $Q' B_1 B Q$, welcher den Fusspunkt B_1 liefert, und durch dieselben Polpunkte Q' und Q geht, wie der Bogen für A.

Durch den Fusspunkt B_1 wird dann bestimmt:

$$\left.\begin{array}{l} O B_1 = x' \text{ die Abscisse von } B \\ B_1 B = y' \text{ die Ordinate von } B \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wir zählen die Abscissen x nördlich positiv und die Ordinaten y östlich positiv.

Richtungswinkel.

Ausser den Coordinaten selbst haben wir den Begriff des Richtungs-Winkels festzustellen.

Der Richtungswinkel α, welcher dem Grosskreisbogen AB in A zukommt, ist der Winkel, welchen dieser Bogen AB bildet mit dem zu dem Meridian von O parallel gezogenen Bogen AP (also *nicht* mit dem Meridian AN).

Bei der vorhin angegebenen Lage des Coordinaten-Systems, mit $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten, werden die Richtungswinkel α vom nördlichen x gegen östliches y hin positiv gezählt, wie in Fig. 1. eingeschrieben ist.

Der Winkel α, welcher hier *Richtungs-Winkel* genannt ist, ist derselbe, wie derjenige, welcher im ebenen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme (Band II, S. 186 und 189) von uns *ebenes Azimut* oder kurzweg *Azimut* genannt wurde. So lange wir es nur mit einem *ebenen* Systeme zu thun hatten, wo gar keine Unterscheidung zwischen

ebenem Azimut (bei *Gauss* „Azimut in plano") und sphärischem oder sphäroidischem Azimut vorkam, konnten wir uns jene kurze Ausdrucksweise wohl erlauben; aber nun, da solche Unterscheidung nötig wird, wollen wir das Wort *Azimut* für die Abweichung von dem Meridian vorbehalten, und die Abweichungen von der Parallelen mit *Richtungs-Winkel* bezeichnen *).

In Fig. 1. wäre also der in der Figur *nicht* angezeichnete Winkel zwischen AN und AB das *Azimut* von AB in A, und der mit α bezeichnete Winkel zwischen AP und AB ist der *Richtungs-Winkel* von AB in A.

Noch eine kleine Bemerkung ist über den *Parallel*-Bogen AP zu machen, weil Parallel-Bögen keine Seiten sphärischer Dreiecke sein können, während wir doch nachher mit sphärischen Dreiecken rechnen werden. Allein es handelt sich nur um die *Tangente* dieses Parallel-Bogens in A, welche rechtwinklig zu AA_1 ist; man kann den Richtungs-Winkel α auch definieren als Winkel $A_1AB - 90^0$, d. h. der Parallel-Bogen AP wird nur zur Abkürzung der Ausdrucksweise benützt, und lässt insbesondere das Dreieck ABQ, das wir nachher mehrfach benützen, in seiner Eigenschaft als *sphärisches* Dreieck ungeändert.

Nachdem wir so über den Begriff des Richtungs-Winkels α von AB in A völlig klar geworden sind, ist auch der Richtungs-Winkel β von BA in B bestimmt als Winkel zwischen der Parallelen-Tangente BP' und dem Strahle BA, im positiven Sinne gezählt.

Wir haben ausser β bei B auch noch den Winkel α' eingeschrieben, welcher um 180° kleiner ist als β, oder allgemeiner:

$$\alpha' = \beta \pm 180^\circ \tag{3}$$

Dieser Winkel α' bedeutet also im wesentlichen dasselbe wie β, er ist aber in den Formeln meist angenehmer als β selbst, weil $\alpha - \alpha'$ eine kleine Grösse ist, welche in einer Reihen-Entwicklung benützt werden kann. Man nennt auch, nach Analogie der Meridian-Konvergenz, diese kleine Grösse:

$$\alpha - \alpha' = \textit{Ordinaten-Konvergenz.} \tag{4}$$

Entwicklung der Grund-Formeln.

Mit Beziehung auf Fig. 1. stellen wir folgende Aufgabe:

Gegeben sind die Coordinaten x und y eines Punktes A, ferner die Länge s des Bogens AB und dessen Richtungs-Winkel α in A.

Gesucht sind die Coordinaten x' und y' des jenseitigen Punktes B und der jenseitige Richtungs-Winkel β des Bogens BA in B, oder statt β selbst die Ordinaten-Konvergenz $\alpha - \alpha'$.

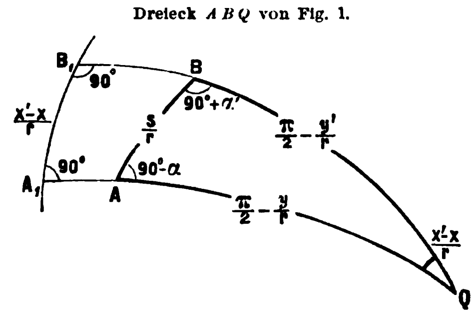
Wir werden diese Aufgabe mit Hilfe des sphärischen Dreiecks ABQ von Fig. 1. lösen können, und haben deshalb dieses Dreieck in Fig. 2. (S. 262) nochmals besonders herausgezeichnet.

Alle Seiten und Winkel dieses Dreiecks stehen in einfacher Beziehung zu den besprochenen Coordinaten und Richtungs-Winkeln, z. B. der Winkel bei A ist $= 90^\circ - \alpha$ und der Winkel bei B ist $= 90^\circ + \alpha'$, wie die Vergleichung mit Fig. 1. un-

*) Was wir hier Richtungs-Winkel nennen, heisst auch in den Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme „*Richtungs-Winkel*", dagegen bei der preussischen Kataster-Vermessung „*Neigungs-Winkel*".

mittelbar ergiebt; und im übrigen ist nur noch die Bemerkung zu machen, dass die linearen Werte von Fig. 1. nun in Fig. 2., durch Division mit dem Erd-Halbmesser r, auf Erd-Centriwinkel in analytischem Masse gebracht sind, z. B. die Entfernung s in Fig. 1. giebt $\frac{s}{r}$ in Fig. 2. u. s. w. Der Wert $\frac{x'-x}{r}$ erscheint in Fig. 2. zweimal, erstens als Bogen $A_1 B_1$ und zweitens als Winkel Q, weil $Q A_1$ und $Q B_1$ beide Quadranten, d. h. analytisch $= \frac{\pi}{2}$ sind.

Fig. 2.
Dreieck ABQ von Fig. 1.



Nach dieser Vorbereitung benützen wir drei Formeln der sphärischen Trigonometrie, nämlich:

1) eine Cosinus-Formel (von (7) S. 195),
2) eine Sinus-Formel (von (8) S. 195),
3) eine *Gauss*sche Formel (nach (13) S. 196).

Im einzelnen giebt dieses:

$$1)\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y'}{r}\right) = \cos\frac{s}{r}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{r}\right) + \sin\frac{s}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{r}\right)\cos(90^\circ-\alpha)$$

$$2)\quad \frac{\sin\frac{x'-x}{r}}{\sin\frac{s}{r}} = \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y'}{r}\right)}$$

$$3)\quad \tang\frac{(90^\circ+\alpha')+(90^\circ-\alpha)}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{r}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y'}{r}\right)\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{r}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y'}{r}\right)\right)}\cotg\frac{x'-x}{2r}$$

Wenn man diese drei Gleichungen, welche sehr ausführlich geschrieben sind, damit ihre Entstehungsweise ersichtlich ist, vereinfacht, so erhält man:

1) für y':
$$\sin\frac{y'}{r} = \cos\frac{s}{r}\sin\frac{y}{r} + \sin\frac{s}{r}\cos\frac{y}{r}\sin\alpha \tag{5}$$

2) für x':
$$\sin\frac{x'-x}{r} = \frac{\sin\frac{s}{r}}{\cos\frac{y'}{r}}\cos\alpha \tag{6}$$

3) für α':
$$\cotg\frac{\alpha-\alpha'}{2} = \frac{\cos\frac{y'-y}{2r}}{\sin\frac{y'+y}{2r}}\cotg\frac{x'-x}{2r} \tag{7}$$

Diese drei Grund-Gleichungen (5) (6) (7) enthalten bereits die streng sphärische Auflösung der gestellten Aufgabe; da aber alle vorkommenden linearen Grössen verhältnismässig klein gegen den Erd-Halbmesser r sind, so empfiehlt sich Reihen-Entwicklung, zu der wir nun übergehen.

Zuerst nehmen wir die Gleichung (5) allein vor:

$$\sin\frac{y'}{r} = \cos\frac{s}{r}\sin\frac{y}{r} + \sin\frac{s}{r}\cos\frac{y}{r}\cos\alpha$$

Auf die hierin vorkommenden *sin* und *cos* kleiner Grössen werden die Potenz-Reihen für *sin* und *cos* nach (17) und (18) S. 199 angewendet, jedoch mit Beschränkung auf Glieder dritter Ordnung; dieses giebt:

$$\frac{y'}{r} - \frac{y'^3}{6r^3} = \left(1-\frac{s^2}{2r^2}\right)\left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}\right) + \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right)\left(1-\frac{y^2}{2r^2}\right)\sin\alpha$$

Wenn man mit Vernachlässigung der höheren Glieder weiter rechnet, so erhält man:

$$y' - \frac{y'^3}{6r^2} = y\left(1-\frac{s^2}{2r^2} - \frac{y^2}{6r^2}\right) + s\sin\alpha\left(1-\frac{s^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right) \qquad (8)$$

Diese Gleichung soll nach y' aufgelöst werden; man hat es also mit einer cubischen Gleichung zu thun. Da jedoch von vornherein alle Glieder von höherer als der dritten Ordnung vernachlässigt worden sind, so kann auch die Auflösung von (8) entsprechend genähert ausgeführt werden. Man bildet nämlich zuerst eine erste Näherung für y':

$$y' = y + s\sin\alpha + \frac{1}{r^2}\cdots$$

Dieser Näherungs-Wert von y' genügt, um das zweite Glied $\frac{y'^3}{6r^2}$ in (8) auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau zu bestimmen. Man hat daher durch Einsetzen der ersten Näherung in jenes zweite Glied:

$$y' - \frac{(y+s\sin\alpha)^3}{6r^2} = y + s\sin\alpha + y\left(-\frac{s^2}{2r^2} - \frac{y^2}{6r^2}\right) + s\sin\alpha\left(-\frac{s^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right)$$

$$y' = y + s\sin\alpha - \frac{3s^2y - 3s^2y\sin^2\alpha + s^3\sin\alpha - s^3\sin^3\alpha}{6r^2}$$

$$y' = y + s\sin\alpha - \frac{s^2y\cos^2\alpha}{2r^2} - \frac{s^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{6r^2} \qquad (9)$$

Damit ist die Gleichung für y' erledigt, und wir gehen über zur Entwicklung für x'.

Zur Bestimmung von $x' - x$ haben wir die Gleichung (6):

$$\sin\frac{x'-x}{r} = \frac{\sin\frac{s}{r}}{\cos\frac{y'}{r}}\cos\alpha$$

Dieses giebt bis zur dritten Ordnung entwickelt:

$$\frac{x'-x}{r} - \frac{(x'-x)^3}{6r^3} = \frac{\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}}{1-\frac{y'^2}{2r^2}}\cos\alpha$$

$$\frac{x'-x}{r} - \frac{(x'-x)^3}{6r^3} = \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right)\left(1+\frac{y'^2}{2r^2}\right)\cos\alpha$$

$$x'-x - \frac{(x'-x)^3}{6r^2} = s\cos\alpha\left(1-\frac{s^2}{6r^2} + \frac{y'^2}{2r^2}\right)$$

Erste Näherung $x' - x = s \cos \alpha + \ldots$

folglich: $$x' - x = \frac{(s \cos \alpha)^3}{6 r^2} + s \cos \alpha - \frac{s^3 \cos \alpha}{6 r^2} + \frac{s \cos \alpha\, y'^2}{2 r^2}$$

$$x' = x + s \cos \alpha + \frac{s \cos \alpha\, y'^2}{2 r^2} - \frac{s^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{6 r^2} \tag{10}$$

Damit ist auch die zweite Gleichung für x' erledigt, und wir gehen zur Entwicklung für die Ordinaten-Konvergenz.

Zur Bestimmung von $\alpha - \alpha'$ haben wir die Gleichung (7), und wenn man in derselben zuerst Zähler und Nenner umkehrt, so hat man:

$$\tang \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{\sin \dfrac{y' + y}{2 r}}{\cos \dfrac{y' - y}{2 r}} \tang \frac{x' - x}{2 r}$$

Die Entwicklungen können hier überall schon beim *ersten* Gliede stehen bleiben, weil dadurch schon rechts ein Glied von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ entsteht, über welches wir nicht hinaus gehen. Wir haben daher kurz:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{2} + \ldots = \frac{\dfrac{y' + y}{2 r} - \ldots}{1 - \ldots} \cdot \frac{x' - x}{2 r} + \ldots$$

$$\alpha - \alpha' = \frac{y' + y}{2 r^2} (x' - x) \tag{11}$$

Eine etwas andere Form bekommt man hiefür, wenn man $y' = y + s \sin \alpha + \ldots$ nach (9) einsetzt, nämlich:

$$\alpha - \alpha' = (x' - x) \frac{y}{r^2} + \frac{(x' - x)\, s \sin \alpha}{2 r^2} \tag{12}$$

In (11) und (12) ist zur Reduktion auf Sekunden noch der Faktor $\varrho = 206\,265''$ hinzu zu setzen.

Zusammenfassung.

Zur Übersicht führen wir noch eine abkürzende Bezeichnung ein, indem wir setzen:

$$s \sin \alpha = n \qquad \text{und} \qquad s \cos \alpha = m \tag{13}$$

Damit geben die Formeln (9), (10) und (12), letztere mit Zusetzung von ϱ:

$$y' = y + n - \frac{m^2 y}{2 r^2} - \frac{m^2 n}{6 r^2} \tag{14}$$

$$x' = x + m + \frac{m\, y'^2}{2 r^2} - \frac{m n^2}{6 r^2} \tag{15}$$

$$\alpha - \alpha' = m\, y \frac{\varrho}{r^2} + m\, n \frac{\varrho}{2 r^2} \quad \text{oder} \quad = m \frac{y + y'}{2} \frac{\varrho}{r^2} \tag{16}$$

Hiezu $\beta = \alpha' \pm 180°$,

also: $$\beta = \alpha \pm 180° - m\, y \frac{\varrho}{r^2} - m\, n \frac{\varrho}{2 r^2} \tag{16a}$$

Die von r abhängigen Coëfficienten dieser Formeln kann man bei gegebener geographischer Breite immer nach der Hilfstafel Seite [2]—[23] des Anhangs bestimmen; für die Breiten $\varphi = 45°,\ 50°,\ 55°$ sind die Logarithmen dieser Coëfficienten folgende:

φ	$log\ \frac{1}{2r^2}$	$log\ \frac{1}{6r^2}$	$log\ \frac{\varrho}{r^2}$	$log\ \frac{\varrho}{2r^2}$
45°	6.08969 — 20	5.61257 — 20	1.70514 — 10	1.40411 — 10
50°	6.08918	5.61206	1.70464	1.40361
55°	6.08869	5.61157	1.70415	1.40312

Wenn man in den Formeln (14), (15), (16) den Halbmesser $r = \infty$ setzt, d. h. wenn man die Kugel in die Ebene übergehen lässt, so bekommt man:

$$y' = y + s \sin \alpha \qquad x' = x + s \cos \alpha \qquad \alpha' = \alpha$$

Dieses sind die für die ebene Coordinaten-Rechnung gültigen Formeln.

Dasselbe hat man, wenn man nicht $r = \infty$, aber die Entfernung s und damit auch m und n sehr *klein* setzt; man sieht daraus, dass die *Soldner*schen Formeln *von selbst* in die Formeln der Ebene übergehen, sobald die Entfernungen so klein werden, dass sich das Anbringen der Korrektions-Glieder nicht lohnt.

Unsere Schluss-Formeln (14), (15), (16) werden auch noch in manchen anderen Formen gebraucht, wie für die Ordinaten-Konvergenz (16) schon bei (11) und (12) gezeigt wurde.

Auch die Ordinaten-Formel (14) kann umgeformt, d. h. etwa so geschrieben werden:

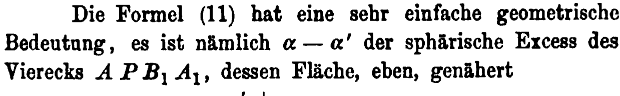
$$y' - y = s \sin \alpha - \frac{2y + y'}{3} \frac{m^2}{2r^2} \qquad (18)$$

Man kann auch daran denken, aus der Abscissen-Formel (15) die Grösse y' zu eliminieren; indessen der algebraisch störende Umstand, dass in der Gleichung (15) für x das erst zu bestimmende y' selbst vorkommt, ist für unsere Anwendungen unwesentlich, denn gewöhnlich hat man x' *und* y' zu berechnen, und bestimmt dann y' zuerst, um es für die Einsetzung in das Korrektions-Glied für x zu haben; sollte ausnahmsweise x allein zu bestimmen sein, so müsste man zum Zweck der Berechnung des ersten Korrektions-Gliedes von x einen Näherungs-Wert von y' nehmen.

Geometrische Bedeutung der Ordinaten-Konvergenz

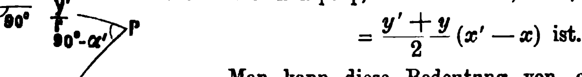
Fig. 3.
Ordinaten-Konvergenz
$\alpha - \alpha'$.

Die Formel (11) hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung, es ist nämlich $\alpha - \alpha'$ der sphärische Excess des Vierecks $A\,P\,B_1\,A_1$, dessen Fläche, eben, genähert



$$= \frac{y' + y}{2}(x' - x) \text{ ist.}$$

Man kann diese Bedeutung von $\alpha - \alpha'$ unmittelbar leicht nachweisen, nämlich nach Fig. 3. ist der Excess des Vierecks:



$$90° + 90° + (90° + \alpha) + (90° - \alpha') - 360° = \alpha - \alpha' \qquad (19)$$

Dieses ist dieselbe Anschauung, welche schon bei Fig. 3. § 45. S. 260 auf die Meridian-Konvergenz angewendet wurde.

Rechen-Hilfsmittel für die Korrektions-Glieder zweiter Ordnung der Soldnerschen Coordinaten-Formeln.

Wenn man zu häufiger Anwendung dieser Coordinaten-Formeln Schemate lithographiert, und hiebei die konstanten Coëfficienten-Logarithmen $log\,\frac{1}{2r^2}$, $log\,\frac{\varrho}{2r^2}$ u. s. w. mit vordruckt, so geht die Rechnung nach den Formeln (14), (15), (16) ziemlich rasch; doch sind auch schon mehrfach besondere Hilfsmittel angewendet worden.

In unserem Anhang Seite [32] haben wir zwei kleine Tabellen I. und II. für die Korrektions-Glieder der Formeln (14), (15), (16) gegeben, insofern alle diese Glieder im wesentlichen die Form $\frac{A^2 B}{2\,r^2}$ oder $\frac{A\,B}{r^2}\,\varrho$ haben, doch sind diese Tabellen I. und II. auf Seite [32] nicht zum eigentlichen Rechnen bestimmt, sondern nur zur Übersicht, oder als Hauptwerte zu graphischen Darstellungen, oder auch zur Unterstützung von Rechnungen mit dem Rechenschieber (wozu die *Quotien-Formen* $\frac{A^2 B}{81{,}44}$ und $\frac{A\,B}{3{,}95}$ u. s. w. nützlich sind, weil man damit einen solchen Wert auf *ein* mal mit dem Rechenschieber einstellen kann).

Eine ausführlichere, für $\varphi = 51^0$ gültige, zum unmittelbaren praktischen Gebrauch bestimmte Tabelle der Werte $\frac{A^2 B}{2\,r^2}$ ist enthalten in dem Werke: „Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmess-Kunst von *F. G. Gauss*", Berlin 1876, II. Teil, S. 54—61.

Graphische Hilfsmittel für die *Soldner*schen Korrektions-Glieder sind bei der badischen Landes-Vermessung benützt worden (uns jedoch nicht näher bekannt geworden). Drei Schichten-Tafeln für den vorliegenden Zweck giebt *Franke*, „Die Grundlehren der trigonometrischen Vermessung", Leipzig 1879, Anhang Tafel I., II., III.

§ 47. Beispiel der *Soldner*schen Coordinaten-Berechnung.

Zu einem zusammenhängenden Zahlen-Beispiel, an welchem der ganze Gang der *Soldner*schen Coordinaten-Berechnung gezeigt werden kann, eignet sich sehr gut der nördliche Teil des badischen Netzes, den wir in unserem I. Bande S. 194—203 ausgeglichen haben.

Wir nehmen die Zahlen-Werte von dort S. 203 nebst der Fig. 10. S. 195 nochmals vor, wobei der Punkt Mannheim als Coordinaten-Nullpunkt dient (Fig. 1. S. 268).

Von diesem Ursprung Mannheim aus zählt die amtliche badische Vermessung $+x$ nach Süden und $+y$ nach Westen, während wir nun, dem allgemeineren Gebrauche in Deutschland entsprechend, $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten zählen wollen.

Auf der Sternwarte Mannheim wurde das Azimut nach Speyer astronomisch gemessen, und zwar von Norden über Osten gezählt:

$$\text{Azimut Mannheim-Speyer} = \alpha_0 = 183^\circ\,40'\,25{,}291'' \qquad (1)$$

Dieses ist nicht nur astronomisches *Azimut*, sondern in diesem Falle auch trigonometrischer *Richtungs-Winkel*, weil der Ausgangs-Punkt Mannheim Ursprung des Coordinaten-Systems ist.

Hiezu haben wir (von Band I. S. 203) auch die Entfernung Mannheim-Speyer, nämlich:

$$\text{Mannheim-Speyer} = s, \qquad log\,s = 4.275\,4362{\cdot}8 \qquad (2)$$

Damit können wir sofort die Coordinaten y', x' von Speyer berechnen, und zwar vereinfachen sich diesesmal die allgemeinen Formeln deswegen, weil die Ausgangs-Coordinaten y, x für Mannheim beide Null sind. Setzt man also $y = 0$ und $x = 0$ in den Formeln (13)—(16) § 46. S. 265, so bekommt man:

$$\text{Speyer}\quad \left.\begin{array}{ll} s \sin\alpha_0 = n & s\cos\alpha_0 = m \\ y' = n - \dfrac{m^2 n}{6r^2}\ , & x' = m + \dfrac{m n^2}{3r^2}\ , \\ \alpha' = \alpha_0 - \dfrac{\varrho}{2r^2} m n & \end{array}\right\} \qquad (3)$$

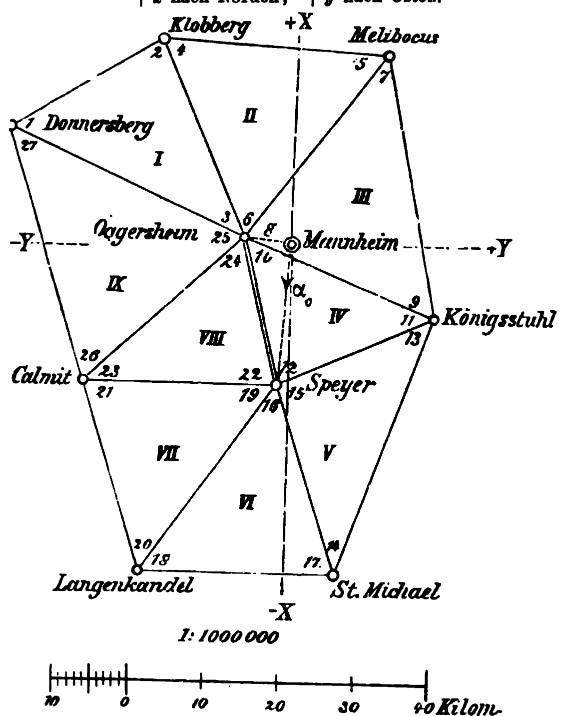


Fig. 1.
Badisches Dreiecks-Netz.
Coordinaten-System mit dem Ursprung Mannheim.
$+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten.

Der Coordinaten-Nullpunkt hat die geographische Breite rund $\varphi = 49° 30'$, und damit bilden wir nach Seite [14] des Anhangs die für uns nötigen konstanten Coëfficienten-Logarithmen:

$$\left.\begin{array}{lll} \log\dfrac{1}{2r^2} = 6.08923 & \log\dfrac{1}{6r^2} = 5.61211 & \log\dfrac{1}{3r^2} = 5.91314 \\ \log\dfrac{\varrho}{r^2} = 1.70469 & \log\dfrac{\varrho}{2r^2} = 1.40366 & \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Nun rechnen wir nach (1) und (2), mit 7stelligen Logarithmen (mit einer an sich unsicheren, durch Interpolation nach *Schrön* erhaltenen 8. Kontrolestelle 0·1):

	$\log s$	4.275 4362·8	$\log s$	4.275 4362·8
$\alpha_0 = 183° 40' 25{,}291''$	$\log \sin\alpha_0$	8.806 6825·0$_n$	$\log\cos\alpha_0$	9.999 1066·6$_n$
	$\log n$	3.082 1187·8$_n$	$\log m$	4.274 5429·4$_n$

$n = -1208{,}144^m \qquad m = -18816{,}678^m \qquad (5)$

Hiezu die Korrektions-Glieder nach (3):

$\log m^2$	8.5491	$\log m$	4.2745_n
$\log n$	3.0821_n	$\log n^2$	6.1642
$\log\left(-\frac{1}{6r^2}\right)$	5.6121_n	$\log\frac{1}{3r^2}$	5.9131
	7.2433		6.3518_n
	+ 0,0017		— 0,0002 (6)

Diese kleinen Beträge zu (5) hinzunehmend hat man:

Speyer $y = -1208{,}142^m$ $x = -18\,816{,}678^m$ (7)

Endlich noch die Ordinaten-Konvergenz:

$\log m$	4.2745_n
$\log n$	3.0821_n
$\log\left(-\frac{\varrho}{2r^2}\right)$	1.4037_n
	8.7603_n — 0,058″ (8)

Man hat also nun in Zusammenfassung:

Richtungs-Winkel Mannheim-Speyer $\alpha = 183^\circ\, 40'\, 25{,}291''$

hiezu nach (8): $-0{,}058$

$\alpha' = 183^\circ\, 40'\, 25{,}233''$

$\pm 180^\circ$

Also Richtungs-Winkel Speyer-Mannheim $\beta = 3^\circ\, 40'\, 25{,}233''$ (9)

Nun kann man die Richtungs-Winkel aller von Speyer ausgehender Strahlen angeben, denn man braucht nur die auf Speyer gemessenen und ausgeglichenen Winkel von Band I, S. 202—203 zu β hinzu zu nehmen, z. B.:

Richtungs-Winkel Speyer-Mannheim	=	3° 40′ 25,233″
hiezu — Winkel Oggersheim-Speyer-Mannheim	—	17 41 17,738
also Richtungs-Winkel Speyer-Oggersheim . .	=	345° 59′ 7,495″
Hiezu + Winkel [12]	+	79 11 3,542
Richtungs-Winkel Speyer-Königsstuhl	=	65° 10′ 11,037″ u. s. w.

Oder mit anderen Worten: Man macht mit dem oben bei (9) gefundenen Orientierungs-Werte $\beta = 3^\circ\, 40'\, 25{,}233''$ einen orientierten *Abriss* der Station Speyer. Indem wir dieses vollständig thun, und auch die Seiten-Logarithmen zufügen, erhalten wir:

Station Speyer, orientierter Abriss.

Zielpunkt	Richtungs-Winkel α			Entfernung, $\log s$
Mannheim	3°	40′	25,233″	4.358 8019·0
Königsstuhl	65	10	11,037	4.430 2529·8
St. Michael	161	20	31,865	4.275 4362·8
Langenkandel	215	0	1,150	4.502 8974·0
Calmit	270	34	57,864	4.418 4219·3
Oggersheim	345	59	7,494	4.296 5476·9

Hievon wählen wir Speyer-Langenkandel als Beispiel aus, und setzen die zugehörige Coordinaten- und Richtungs-Winkel-Berechnung in aller Ausführlichkeit her.

Speyer-Langenkandel.

	$\log s$	4.502 8974·0	$\log s$	4.502 8974·0
$\alpha = 215°\ 0'\ 1{,}150''$	$\log \sin \alpha$	9.758 5947·8$_n$	$\log \cos \alpha$	9.913 3628·3$_n$
	$\log n$	4.261 4921·8$_n$	$\log m$	4.416 2602·3$_n$

$n = -18\,259{,}639$ $\quad m = -26\,077{,}156$

(7) gegeben: $y = -\ 1\,208{,}142$ $\quad x = -18\,816{,}678$

hiezu Speyer: $y + n = -19\,467{,}781$ $\quad x + m = -44\,893{,}834$

genähert $= y'$ $\quad$ genähert $= x'$

Korrektions-Glieder für y. $\quad$ Korrektions-Glieder für x.

$\log m^2$	8.8325	$\log m^2$	8.8325	$\log m$	4.4163$_n$	$\log m$	4.4163$_n$
$\log y$	3.0821$_n$	$\log n$	4.2615$_n$	$\log y'^2$	8.5786	$\log n^2$	8.5230
$\log\left(-\frac{1}{2r^2}\right)$	6.0892$_n$	$\log\left(-\frac{1}{6r^2}\right)$	5.6121$_n$	$\log\left(-\frac{1}{2r^2}\right)$	6.0892	$\log\left(-\frac{1}{6r^2}\right)$	5.6121$_n$
	8.0038		8.7061		9.0841$_n$		8.5514
	+ 0,010		+ 0,051		− 0,121		+ 0,036

Zusammenfassung:

$y + n = -19\,467{,}781^{m}$ $\quad x + m = -44\,893{,}834^{m}$

$+0{,}010$ $\quad -0{,}121$

$+0{,}051$ $\quad +0{,}036$

Langenkandel: $y' = -19\,467{,}720$ $\quad x' = -44\,893{,}919$

Korrektions-Glieder für α:

$\log m$	4.4163$_n$	$\log m$	4.4163$_n$
$\log y$	3.0821$_n$	$\log n$	4.2615$_n$
$\log\left(-\frac{\varrho}{r^2}\right)$	1.7047$_n$	$\log\left(-\frac{\varrho}{2r^2}\right)$	1.4037$_n$
	9.2031$_n$		0.0815$_n$
	− 0,160		− 1,206

Zusammenfassung: $\alpha = 215°\ 0'\ 1{,}150''$

$-0{,}160$

$-1{,}206$

$\alpha'\ \ 214°\ 59'\ 59{,}784''$

$\pm 180°$

$\beta = \ 34°\ 59'\ 59{,}784'' =$ Richtungs-Winkel Langenkandel-Speyer.

Mit diesem Richtungs-Winkel β und mit den auf Langenkandel gemessenen und ausgeglichenen Dreiecks-Winkeln kann man nun von neuem einen orientierten Abriss für Langenkandel aufstellen.

In dieser Weise wurden die Coordinaten aller Punkte unseres badischen Netzes Fig. 1. 268 berechnet, und zwar jeder Punkt auf mindestens zwei Wegen, z. B. Langenkandel nicht bloss auf dem soeben behandelten Wege Speyer-Langenkandel, sondern auch von St. Michael oder von Calmit aus.

Bei den dadurch erhaltenen zahlreichen Proben zeigte sich, dass die Coordinaten nahezu auf Millimeter übereinstimmten (obgleich nur mit 7stelligen Logarithmen, nach *Schrön*, gerechnet worden war).

Folgendes sind die sämtlichen so erhaltenen Coordinaten (mit $+x$ nach Norden, $+y$ nach Osten).

Punkt	y	x
Mannheim	$\pm$ 0,000^{m}	$\pm$ 0,000^{m}
Oggersheim	— 6 001,777	+ 388,767
Speyer	— 1 208,142	— 18 816,676
Calmit	— 27 414,066	— 18 550,134
Donnersberg	— 38 145,688	+ 15 278,872
Klobberg	— 18 104,628	+ 28 049,296
Melibocus	+ 12 727,470	+ 26 509,100
Königsstuhl	+ 19 525,476	— 9 223,075
St. Michael	+ 7 407,498	— 44 332,386
Langenkandel	— 19 467,721	— 44 893,918

Über die sachliche Bedeutung dieser Coordinaten, welche von den amtlichen badischen Coordinaten unabhängig sind, haben wir schon in unserem I. Bande (1888) S. 203—204 einiges mitgeteilt, und dabei die als Genauigkeits-Beispiele nicht uninteressanten Differenzen unserer Werte gegen die amtlichen badischen Coordinaten angegeben.

Die meisten dieser Punkte, mit Ausnahme von Melibocus und Königsstuhl, gehören auch der *bayerischen* Triangulierung an, und sind als bayerische Punkte ebenfalls mit Coordinaten auf Mannheim als Ursprung bezogen. Die Differenzen der bayerischen Coordinaten gegen unsere Werte sind in unserer vorigen Auflage (1878), II. Band, S. 272 angegeben. Man vergl. auch unsere erste Mitteilung „Über die Genauigkeit der süddeutschen Landes-Triangulierungen", Astr. Nachr. 75. Band, 1870, Nr. 1795—1796, S. 289—306 u. S. 367. (vgl. auch *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen", I. S. 257 und 279.

Endlich kann man noch eine dritte Vergleichung bilden durch Zuziehung der inzwischen neu berechneten und veröffentlichten bayerischen Coordinaten in dem Werke: „Die bayerische Landes-Vermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873", S. 516; dort finden sich für die fraglichen Punkte Coordinaten in bayerischen Ruten, welche in Meter verwandelt, von den früheren Angaben (1869) des bayerischen topographischen Bureaus wieder etwas abweichen, z. B. bei Langenkandel um 0,175 m in y und um 0,058 m in x.

§ 48. Bestimmung von Entfernung und Richtungs-Winkeln aus *Soldner*schen Coordinaten.

Wir stellen die im Gegensatz zum vorigen § 46.—47. umgekehrte Aufgabe: Gegeben sind die Coordinaten zweier Punkte P und P', nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ und } y \text{ Coordinaten von } P \\ x' \text{ und } y' \quad \text{„} \quad \text{„} \quad P' \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Gesucht ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{die Entfernung} & PP' = s \\ \text{der Richtungs-Winkel} & (PP') = \alpha \\ \text{„} \quad \text{„} & (P'P) = \beta = \alpha' \pm 180° \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Man kann diese Aufgabe lösen durch Umkehrung von (14), (15) § 46. S. 265, wobei in den Korrektions-Gliedern $m = x' - x$ und $n = y' - y$ gesetzt wird. Auf diese Weise erhält man:

$$s \sin \alpha = (y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2} = N \tag{3}$$

$$s \cos \alpha = (x' - x) - \frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x)(y' - y)^2}{6 r^2} = M \tag{4}$$

Die hier geschriebenen Zeichen N und M sollen nur die Zusammenfassung ausdrücken, denn man hat nun weiter:

$$tang\, \alpha = \frac{N}{M} \tag{5}$$

$$s = \frac{N}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{M}{\cos \alpha} \tag{6}$$

Um auch β zu finden, braucht man nur die Bezeichnungen für die Punkte P und P' umzukehren. was wir nicht durch besondere Formeln von der Form (5) und (6) anzuzeigen für nötig halten (vgl. das nachfolgende Zahlen-Beispiel (21) und (22)).

Statt dessen kann man aber auch die Formel (16) § 46. S. 265 anwenden:

$$\alpha' = \alpha - (x' - x)(y' + y) \frac{\varrho}{2 r^2} \tag{7}$$

oder

$$\alpha' = \alpha - (x' - x)\, y \frac{\varrho}{r^2} - (x' - x)(y' - y) \frac{\varrho}{2 r^2} \tag{7a}$$

und dann:

$$\beta = \alpha' \pm 180° \tag{7b}$$

Damit sind alle Bedürfnisse befriedigt; es ist jedoch zu manchen Zwecken erwünscht, die Entfernung s auch *ohne* die Richtungs-Winkel oder andererseits einen oder beide Richtungs-Winkel ohne die Entfernung zu bestimmen.

Wir behandeln zuerst die Aufgabe, die Entfernung s allein aus den Coordinaten abzuleiten. Man kann dieses sofort mit Hilfe der Gleichungen (3) und (4) thun, denn wenn man diese quadriert und addiert, so erhält man:

$$s^2 = \left((y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2}\right)^2$$
$$+ \left((x' - x) - \frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x)(y' - y)^2}{6 r^2}\right)^2$$

$$s^2 = (y' - y)^2 + \frac{(x' - x)^2 (y' - y) y}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3 r^2}$$
$$+ (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2 y'^2}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3 r^2}$$

$$s^2 = (y' - y)^2 + (x' - x)^2 + \frac{(x' - x)^2}{3 r^2} \left(3 y (y' - y) + 2 (y' - y)^2 - 3 y'^2\right)$$

$$s^2 = (y' - y)^2 + (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2}{3 r^2} \left(y^2 + y y' + y'^2\right) \tag{8}$$

Hier bezeichnen wir die ersten Glieder, welche der Rechnung mit ebenen Coordinaten entsprechen mit s_0^2, d. h.:

$$(y' - y)^2 + (x' - x)^2 = s_0^2 \tag{9}$$

und da man in den Korrektions-Gliedern s_0 mit s verwechseln kann, haben wir aus (8):

$$s^2 = s_0^2\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{3\,r^2}(y^2 + y\,y' + y'^2)\right)$$

$$s = s_0\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{6\,r^2}(y^2 + y\,y' + y'^2)\right) \text{ oder } = s_0\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{6\,r^2}\,\frac{y'^3 - y^3}{y' - y}\right) \quad (10)$$

oder logarithmisch:

$$\log s = \log s_0 - \frac{\mu}{6\,r^2}\cos^2\alpha\,(y^2 + y\,y' + y'^2) \quad (11)$$

Um auch für α eine unmittelbare Formel zu bekommen, denken wir uns die Formeln (3) und (4) so zerlegt:

$$s\sin\alpha = (y' - y) + d\,y \quad (12)$$

$$s\cos\alpha = (x' - x) + d\,x \quad (13)$$

wo die Bedeutung von $d\,y$ und $d\,x$ sich durch Vergleichung von (12) mit (3) sowie von (13) mit (4) ergiebt. Wir wollen auch α selbst entsprechend zerlegt denken in $\alpha_0 + d\,\alpha$ und haben dann:

$$\alpha = \alpha_0 + d\,\alpha = \operatorname{arc\,tang}\frac{(y' - y) + d\,y}{(x' - x) + d\,x} \quad (14)$$

Nach dem *Taylor*schen Satze giebt dieses:

$$\alpha_0 = \operatorname{arc\,tang}\frac{y' - y}{x' - x} \quad (15)$$

und

$$d\,\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{y' - y}{x' - x}\right)^2}\,\frac{d\,y}{x' - x} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y' - y}{x' - x}\right)^2}\,\frac{y' - y}{(x' - x)^2}\,d\,x$$

$$d\,\alpha = \frac{x' - x}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}\,d\,y - \frac{y' - y}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}\,d\,x \quad (16)$$

Setzt man die oben bei (12) und (13) erklärten Bedeutungen von $d\,y$ und $d\,x$ ein, nämlich:

$$d\,y = \frac{(x' - x)^2\,y}{2\,r^2} + \frac{(x' - x)^2\,(y' - y)}{6\,r^2}$$

$$d\,x = -\frac{(x' - x)\,y'^2}{2\,r^2} + \frac{(x' - x)\,(y' - y)^2}{6\,r^2}$$

so erhält man aus (16):

$$d\,\alpha = \frac{(x' - x)\,y}{2\,r^2}\cos^2\alpha + \frac{(x' - x)\,(y' - y)}{6\,r^2}\cos^2\alpha + \frac{y'^2}{2\,r^2}\cos\alpha\sin\alpha - \frac{(x' - x)\,(y' - y)}{6\,r^2}\sin^2\alpha \quad (17)$$

Dieses kann auch so geschrieben werden:

$$d\,\alpha = \frac{(x' - x)\,y}{2\,r^2}\cos^2\alpha + \frac{y'^2}{4\,r^2}\sin 2\,\alpha + \frac{(x' - x)\,(y' - y)}{6\,r^2}\cos 2\,\alpha \quad (18)$$

Nützlicher ist noch eine andere Umformung von (17), welche nicht auf $2\,\alpha$ übergeht, sondern im dritten Gliede von (17) den Faktor $\sin^2\alpha$ erzeugt, nämlich:

$$d\,\alpha = \frac{x' - x}{6\,r^2}\cos^2\alpha\,(2\,y + y') + \frac{x' - x}{6\,r^2}\sin^2\alpha\left(\frac{3\,y'^2}{y' - y} - (y' - y)\right)$$

hier ist $$\frac{3y'^2}{y'-y} - (y'-y) = 2y + y' + \frac{y^2 + yy' + y'^2}{y'-y}$$

und setzt man dieses in das vorhergehende ein, so bekommt man:

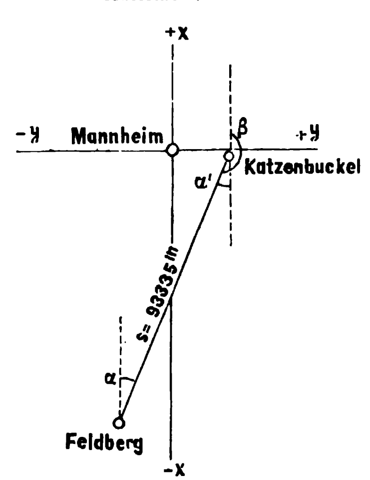
$$d\alpha = \frac{x'-x}{6r^2}(2y+y') + \frac{x'-x}{6r^2 s^2}(y'^3 - y^3) \tag{19}$$

Dieses ist die Verbesserung, welche an dem Näherungswert α_0 von (15) noch anzubringen ist; man kann also im Zusammenhang für den Richtungs Winkel von einem Punkte P (mit x, y) nach P' (mit x', y') schreiben, zugleich mit Zusetzung der nötigen ϱ:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6r^2}(x'-x)(2y+y') + \frac{\varrho}{6r^2}\frac{x'-x}{s^2}(y'^3 - y^3) \tag{20}$$

Um alle diese Formeln an einem Zahlen-Beispiele zu veranschaulichen und zu erproben, nehmen wir nach Fig. 1. $\left(\text{mit mittlerer geographischer Breite} = 49°, \log\frac{1}{r^2} = 6.39031\right)$ folgende badische Coordinaten:

Fig. 1.
Massstab 1 : 5 000 000.



K, Katzenbuckel	$y' = +\ 42\,176{,}169^m$	$x' = -\ \ 1\,575{,}546^m$
F, Feldberg	$y = -\ 34\,075{,}071$	$x = -\ 179\,239{,}479$
	$y'-y = +\ 76\,251{,}240$	$x'-x = +\ 177\,663{,}933$
Hiezu die Korrektions- glieder nach (3) und (4)	$-\ 13{,}210$	$-\ 3{,}881$
	$+\ 9{,}854$	$+\ 4{,}229$
	$N = +\ 76247{,}884$	$M = +\ 177\,664{,}281$

damit geben die Formeln (5) und (6):

$$(F, K) = \alpha = 23°\ 13'\ 38{,}920'' \qquad \log s = 5.286\ 3099{\cdot}9 \qquad s = 193\,334{,}779^m \tag{21}$$

Die Umkehrung der Bezeichnungen giebt:

F, Feldberg	$y' = -34\,075{,}071^m$	$x' = -179\,239{,}479^m$
K, Katzenbuckel	$y = +42\,176{,}169$	$x = -\;\;1\,575{,}546$
	$y' - y = -76\,251{,}240$	$x' - x = -177\,663{,}933$
Hiezu die Korrektions- glieder nach (3) und (4)	$+16{,}350$ $-\;9{,}854$	$+2{,}534$ $-4{,}229$
	$N = -76\,244{,}744$	$M = -177\,665{,}628$

damit wieder nach (5) und (6):

$$(K, F) = \beta = 203^\circ\ 13'\ 35{,}275'' \qquad log\ s = 5.286\ 3099{\cdot}8 \qquad s = 193\,334{,}778^m \tag{22}$$

Durch (21) und (22) ist also bereits die Entfernung s sicher gestellt.

Um auch die Richtungs-Winkel α und β zu versichern, hat man nach (7) und (7a) die Differenz beider Richtungs-Winkel und zwar bei (7a) abermals doppelt, je nachdem man die Bezeichnungen P und P' entsprechend F und K, oder umgekehrt, wählt; man bekommt für unser Beispiel:

aus (7): $\alpha' - \alpha = -3{,}646''$ (23)

aus (7a): $\alpha' - \alpha = +30{,}674'' - 34{,}320'' = -3{,}646''$ (23a)

oder „ „ : $\beta' - \beta = +37{,}966 - 34{,}320 = +3{,}646''$ (23b)

Diese 3 Werte stimmen unter sich, und mit der Differenz von (21) und (22), welche 3,645″ beträgt, hinreichend.

Nun haben wir noch die Formeln (10) und (11), welche zuerst eine Berechnung von s_0 bzw. $log\ s_0$ verlangen, d. h. eine Berechnung, welche *ebenen* Coordinaten entspricht; und dabei berechnen wir auch zugleich einen ebenen Wert α_0:

$\alpha_0 = 23^\circ\ 13'\ 42{,}356''$	$log\ s_0 = 0.286\ 3122{\cdot}4$	$s_0 = 193\,335{,}782^m$	(24)
Hiezu nach (11) und (10)	$-22{\cdot}6$	$-1{,}004$	
	$log\ s = 5.286\ 3099{\cdot}8$	$s = 193\,334{,}778$	(25)

Dieses stimmt hinreichend mit (21) und (22).

Endlich haben wir noch verschiedene Formeln für $d\alpha$. Die Formel (18) giebt in zweifacher Anwendung:

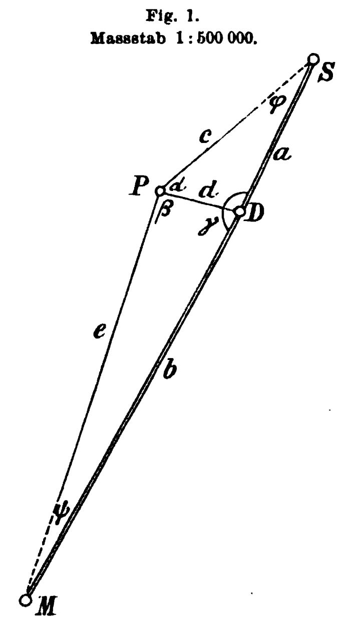
$\alpha_0 = 23^\circ\ 13'\ 42{,}356''$	$\beta_0 = 203^\circ\ 13'\ 42{,}356''$	
$-12{,}951$	$-16{,}030$	
$+\;\;1{,}633$	$+\;\;1{,}066$	
$+\;\;7{,}881$	$+\;\;7{,}881$	
$\alpha = 23^\circ\ 13'\ 38{,}919''$	$\beta = 203^\circ\ 13'\ 35{,}273$	(26)

Endlich giebt die Formel (20) ebenfalls zweifach:

$\alpha_0 = 23^\circ\ 13'\ 42{,}356''$	$\beta_0 = 203^\circ\ 13'\ 42{,}356''$	
$-3{,}897$	$-7{,}543$	
$+0{,}460$	$+0{,}460$	
$\alpha = 23^\circ\ 13'\ 38{,}919''$	$\beta = 203^\circ\ 13'\ 35{,}273''$	(27)

§ 49. Pothenotische Aufgabe mit *Soldner*schen Coordinaten.

Fig. 1.
Massstab 1 : 500 000.



Ehe wir in der Theorie weiter gehen, finden wir es passend, durch eine pothenotische Punkt-Bestimmung alle bisherigen Aufgaben über *Soldner*sche Coordinaten zusammen anzuwenden.

Dass die pothenotische sphärische Aufgabe ohne rechtwinklige Coordinaten sich mit geringer Abänderung der bekannten Formeln für *ebene* pothenotische Aufgabe auflösen lässt, haben wir schon in § 43. S. 246 gezeigt; und nun wollen wir nur noch die Vervollständigung durch die Coordinaten-Rechnung hinzufügen, und zwar an der Hand eines badischen Beispiels Fig. 1., in welchem wir jedoch die ursprünglichen badischen Coordinaten (Ursprung Mannheim mit $+x$ nach Süden und $+y$ nach Westen) dem allgemeineren Gebrauche entsprechend so umstellen, dass $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten gezählt wird (wie auch schon bei Fig. 1. § 47. S. 268 geschehen ist).

Drei Punkte sind durch *Soldner*sche Coordinaten gegeben:

	y	x	
S St. Michael	$+$ 7 407,582ᵐ	$-$ 44 332,254ᵐ	
D Durlacher Warte	$+$ 1 892,355	$-$ 54 452,145	(1)
M Merkur bei Baden	$-$ 13 169,622	$-$ 80 285,226	

Auf einem vierten Punkte P (Polytechnikum Karlsruhe) sind die zwei Winkel gemessen:

$$SPD = \alpha = 53^\circ\,11'\,18{,}15'' \qquad DPM = \beta = 94^\circ\,56'\,27{,}42'' \qquad \alpha + \beta = 148^\circ\,7'\,45{,}57'' \tag{2}$$

Nun empfiehlt es sich, die ganze Aufgabe vorläufig durchzurechnen, wie wenn das Viereck *eben* wäre, d. h. man rechnet nach dem Schema von S. 243 unseres Band I.

Man bekommt auf diese Weise *vorläufig:*

$$\log SD = \log a = 4.061\,649 \qquad \log MD = \log b = 4.475\,720$$
$$(SD) = 208^\circ\,35'\,24'' \qquad (MD) = 30^\circ\,14'\,40''$$
$$\gamma = 178^\circ\,20'\,44''$$
$$\mu = 25^\circ\,37'\,23'' \qquad \varphi = 22^\circ\,48'\,36'' \qquad \psi = 10^\circ\,42'\,56''$$
$$\log SP = \log c = 4.145\,129 \qquad \log DP = \log d = 3.746\,696 \qquad \log MP = \log e = 4.460\,916$$
$$(SP) = 231^\circ\,24'\,0'' \qquad (DP) = 284^\circ\,35'\,18'' \qquad (MP) = 19^\circ\,31'\,44''$$

Coordinaten von P: $y = -3508{,}50^m$, $x = -53\,046{,}50^m$

Nach dieser vorläufigen ebenen Rechnung, welche nur mit 5—6 stelligen Logarithmen zu machen ist, folgt die sphärische Rechnung mit 7—8 stelligen Logarithmen, wozu die Formeln von § 48. und § 46. gebraucht werden, die wir aber nun nicht mehr im einzelnen anführen.

$$\log SD = \log a = 4.061\,6478{\cdot}4 \qquad \log MD = \log b = 4.475\,7198{\cdot}1$$
$$(SD) = 208^\circ\,35'\,23{,}48'' \qquad (MD) = 30^\circ\,14'\,39{,}09''$$
$$(DS) = 28^\circ\,35'\,23{,}72'' \;, \qquad (DM) = 210^\circ\,14'\,39.83''$$
$$\gamma = 178^\circ\,20'\,43{,}89''$$

Nun braucht man die sphärischen Excesse der beiden Dreiecke SDP und MDP, die man mit den vorläufigen Entfernungen und Winkeln findet, nämlich bzw.:

$$\varepsilon_1 = 0{,}16'' \qquad \varepsilon_2 = 0{,}41''$$

man hat also:

$$\alpha + \beta + \gamma = 326^\circ\,28'\,29{,}46''$$
$$360^\circ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 360 \quad 0 \quad 0{,}57$$
$$\text{folglich:} \quad \varphi + \psi = 33^\circ\,31'\,31{,}11''$$

Nun kommt die Additamentenrechnung:

$$\log a = 4.061\,6478{\cdot}4 \qquad \log b = 4.475\,7198{\cdot}1$$
$$\text{Additamente:} \quad -2{\cdot}3 \qquad -15{\cdot}9$$
$$\log a' = 4.061\,6476{\cdot}1 \qquad \log b' = 4.475\,7182{\cdot}2$$

Nun zunächst wieder wie bei der ebenen Rechnung:

Hilfswinkel $\mu = 25^\circ\,37'\,22{,}882''$ $\quad \varphi = 22^\circ\,48'\,35{,}15$ $\quad \psi = 10^\circ\,42'\,55{,}96''$

$$\log c' = 4.145\,1272{\cdot}6 \qquad \log d' = 3.746\,6919{\cdot}0 \qquad \log e' = 4.460\,9151.3$$
$$\text{Additamente:} \; +3{\cdot}5 \qquad +0{\cdot}5 \qquad +14{\cdot}9$$
$$\log c = 4.145\,1276{\cdot}1 \qquad \log d = 3.746\,6919{\cdot}5 \qquad \log e = 4.460\,9166{\cdot}2$$

Die Winkel in den beiden Dreiecken sind:

$P = \alpha =$	53°	11′	18,15″		$P = \beta =$	94°	56′	27,42″
$S = \varphi =$	22	48	35,15		$M = \psi =$	10	42	55,96
$D =$	104	0	6,86		$D =$	74	20	37,03
	180°	0′	0,16			180°	0′	0,41″

Die Richtungs-Winkel zur Coordinaten-Berechnung setzt man aus den Richtungs-Winkeln (SD) und (MD) und den Dreiecks-Winkeln zusammen; man findet damit:

$$(DP) = 284^\circ\,35'\,16{,}86''$$
$$(SP) = 231^\circ\,23'\,58{,}63'' \qquad (MP) = 19^\circ\,31'\,43{,}13''$$

Die Coordinaten-Rechnung für P, nach § 46. ausgeführt, giebt auf allen drei Wegen nahezu auf Millimeter übereinstimmend:

Coordinaten von P: $\quad y = +\,3508{,}476^m \qquad x = +\,53046{,}544^m$

§ 50. Karten-Zeichnung nach rechtwinkligen sphärischen Coordinaten.

Man benützt die rechtwinkligen *sphärischen* Coordinaten zur Karten-Zeichnung, indem man dieselben wie rechtwinklige *ebene* Coordinaten behandelt.

Dadurch erhält man ein verzerrtes Bild der krummen Erdoberfläche in der Ebene, und es ist unsere Aufgabe, die Verzerrungen, welche hier, wie bei allen anderen ebenen Abbildungen der Erdoberfläche unvermeidlich sind, zu untersuchen.

Hiezu brauchen wir nur die bereits in § 48. entwickelten Formeln anzuwenden.

Wir haben von (10) und (9) § 48. S. 272—273:

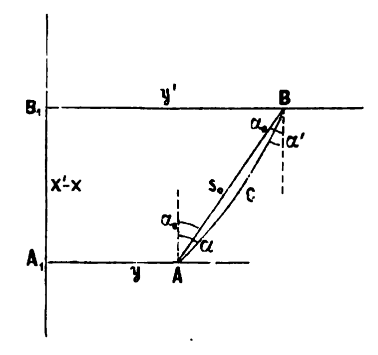


Fig. 1.
*Soldner*sche Coordinaten in *ebener* Darstellung.

$$s = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6 r^2} (y^2 + y\,y' + y'^2)\right) \quad (1)$$

$$s_0 = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \quad (2)$$

Indem wir in Fig. 1. die Punkte A und B mit ihren Coordinaten x, y und x', y' im ebenen System dargestellt haben, finden wir offenbar die Entfernung s_0 von (2) als *geradlinige* Entfernung AB, und man benützt das Verhältnis dieser geradlinigen Karten-Entfernung s_0 zu der wahren Entfernung s zur Berechnung des Verzerrungs-Verhältnisses, d. h. man setzt:

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{y^2 + y\,y' + y'^2}{6 r^2} \cos^2 \alpha \quad (3)$$

Für eine sehr kurze Linie s ist $y' = y$ zu setzen und dann hat man:

$$v = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \cos^2 \alpha \quad (4)$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für die Vergrösserung einer kurzen Linie in irgend einem Punkte mit der Ordinate y, in der Richtung α. Die Vergrösserung v ist nicht abhängig von der Abscisse x, sondern nur von der Ordinate y und von der Richtung α. In Bezug auf α erreicht v seine äussersten Werte mit $\alpha = 0°$ oder 180° einerseits und mit $\alpha = 90°$ oder 270° andererseits, nämlich:

$$\alpha = 0° \text{ giebt } v_{max} = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \quad \text{(Meridian, } x\text{-Axe)} \quad (5)$$

$$\alpha = 90° \quad " \quad v_{min} = 1 \quad \text{(West-Ost, } y\text{-Axe)} \quad (6)$$

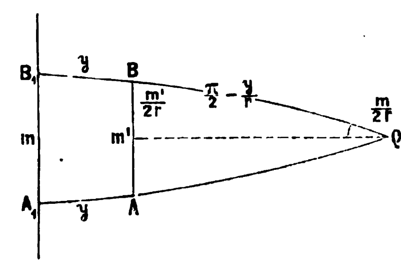


Fig. 2.

Diese zwei Ergebnisse sind an und für sich leicht verständlich. In der West-Ost-Richtung werden die Ordinaten sowohl auf der Kugel als auch in der Ebene *gleich* aufgetragen, d. h. es ist $v = 1$; dagegen in der Nord-Richtung müssen die ebenen Masse zu gross erscheinen, weil die in Wirklichkeit konvergierenden Ordinaten y in der ebenen Zeichnung parallel sind.

Hiezu ist Fig. 2. gezeichnet mit dem Masse m in der Abscissen-Axe selbst und einem Masse m' parallel der Abscissen-Axe, im Abstand y. In der Ebene werden aber die Ordinaten y parallel, also m' *gleich* m dargestellt, und das Vergrösserungs-Verhältnis ist daher $= \frac{m}{m'}$, und hiefür findet man aus Fig. 2.:

$$\sin \frac{m}{2r} = \frac{\sin \frac{m'}{2r}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r}\right)} = \frac{\sin \frac{m'}{2r}}{\cos \frac{y}{r}}$$

Dieses giebt entwickelt:

$$\frac{m}{2r} = \frac{m'}{2r}\left(1 + \frac{y^2}{2r^2}\right) \quad , \quad \frac{m}{m'} = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \tag{7}$$

Dieses ist eine Bestätigung von (5).

Zur Übersicht der linearen Verzerrungs-Verhältnisse haben wir nach (5) folgende Zahlen-Werte berechnet:

y	$\frac{y^2}{2r^2}$	$\frac{y^2}{2r^2}1000^m$	y	$\frac{y^2}{2r^2}$	$\frac{y^2}{2r^2}1000^m$	
10^{km}	0,000 0012	$0,001^m$	60^{km}	0,000 0442	$0,044^m$	
20	0,000 0048	0,005	70	0,000 0602	0,060	(8)
30	0,000 0111	0,011	80	0,000 0786	0,079	
40	0,000 0196	0,020	90	0,000 0995	0,099	
50	0,000 0307	0,031	100	0,000 1228	0,123	

Man sieht hieraus, dass man mit $y = 100\,000^m$ eine Verzerrung von rund $0,0001 = 0,01\,\%$ oder $0,1^m$ auf 1000^m erhält.

Fig. 3. Rechteckiges Kartenblatt.

Wenn ein rechteckiges Kartenblatt $A\,B\,A'\,B'$ (Fig. 3.) in der beschriebenen Weise behandelt wird, so erscheint zwar der Südrand $A\,A'$ und der Nordrand BB' in richtiger Grösse, dagegen der Westrand $A\,B$ und der Ostrand $A'B'$ werden etwas zu gross.

Wir wollen annehmen, der Westrand $A\,B$ habe die Ordinate $y = 90\,000^m$ und der Ostrand $A'\,B'$ habe $y' = 100\,000^m$, dann wird nach der Zahlen-Übersicht (8), in der Zeichnung der Westrand um $0,0099\%$ und der Ostrand um $0,0123\%$ zu gross, oder wenn $A\,B = A'\,B' = 1^m$ Papiergrösse hat, so giebt das hier nur etwa $0,1^{mm}$ Fehler.

Solche Verzerrungen mögen in der Karten-*Zeichnung* und auf dem Messtisch unschädlich sein, in der Messung und *Berechnung* von Polygon-Zügen sind sie es nicht.

Geht ein solcher Zug von 1000^m Länge in der Meridian-Richtung von einem trigonometrischen Punkte zu einem zweiten trigonometrischen Punkt, so wird, wenn gar keine Messungs-Fehler vorkommen, doch der Zug die Entfernung beider Punkte um 10^{cm} kleiner geben als die Coordinaten der Punkte, so lange man nur die *ebene* Coordinaten-Rechnung anwendet.

Man könnte zwar durch Berücksichtigung der sphärischen Korrektions-Glieder diesen Widerspruch wieder zum Verschwinden bringen, allein das ist für die Klein-Vermessung zu umständlich. Man beschränkt daher lieber die Ausdehnung der Coordinaten-Systeme, z. B. in Preussen so, dass die Ordinaten y kleiner als $60\,000^m$ werden, womit die Verzerrungen nur noch etwa die Hälfte der soeben betrachteten Verzerrungen für $100\,000^m$ Ordinate betragen.

Wir haben auch noch die Richtungs-Änderungen zu betrachten, wozu die in Fig. 1. eingeschriebenen Winkel α_0 und α die Anleitung geben.

Sind A und B zwei Punkte der rechtwinklig ebenen Coordinaten-Zeichnung, so ist α_0 der Richtungs-Winkel im ebenen System, welcher gegen den sphärischen Richtungs-Winkel α eine Differenz hat, nämlich nach (19) § 48. S. 274:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{x' - x}{6 r^2}(2y + y') + \frac{x' - x}{6 r^2}\frac{y'^3 - y^3}{s^2} \tag{9}$$

Die Anwendung derselben Formel auf den Punkt B giebt:

$$\alpha' - \alpha_0 = \frac{x - x'}{6 r^2}(2y' + y) + \frac{x - x'}{6 r^2}\frac{y^3 - y'^3}{s^2} \tag{10}$$

Diese beiden Formeln geben subtrahiert:

$$\alpha - \alpha' = \frac{x' - x}{2 r^2}(y + y') \tag{11}$$

Dieses ist wieder die Formel für die Ordinaten-Konvergenz nach (11) § 46. S. 265, was auch nach Fig. 1. unmittelbar eingesehen werden kann.

Weitere Ausführungen.

Wenn die Fig. 1. S. 278 nicht bloss eine Abbildung der *Punkte* A und B von der Kugel auf die Ebene vorstellen soll, sondern auch eine Abbildung der *Linie* AB, d. h. des auf der Kugel gezogenen Gross-Kreisbogens AB, so ist zuerst einzusehen, dass in Fig. 1. die Gerade $AB = s_0$ *nicht* das Abbild jenes Bogens AB ist, sondern der Bogen ACB.

Allerdings in Hinsicht auf die Länge ist die Gerade $AB = s_0$ und der Bogen ACB in Fig. 1. bei der von uns überhaupt eingehaltenen Genauigkeit von $\frac{1}{r^2}$, nicht zu unterscheiden, denn die Pfeilhöhe des Bogens ACB ist nur von der Ordnung $\frac{s^3}{r^2}$, und daraus kann man schliessen, dass der Krümmungs-Halbmesser der Kurve von der Ordnung $\frac{r^2}{s}$, und endlich dass der Unterschied zwischen dem Bogen ACB und der Sehne AB nur von der Ordnung $\frac{s^5}{r^4}$ ist, was in allen unseren bisherigen Entwicklungen vernachlässigt wurde.

Dagegen in Hinsicht auf die *Richtungen* in A und B ist allerdings der Bogen ACB und die Sehne AB in Fig. 1. durchaus nicht zu verwechseln, wie aus den eingeschriebenen Winkeln α, α' und α_0 zu ersehen ist.

Wir haben bisher stillschweigend angenommen, dass der Bogen ACB mit den von der $+x$-Richtung in der Ebene gezählten Richtungs-Winkeln α und α' das richtige Abbild des entsprechenden Gross-Kreisbogens auf der Kugel sei, und man kann dieses wohl geradezu einsehen, wenn man bedenkt, dass für unendlich kleine Abscissen-Unterschiede die Differenzen $\alpha' - \alpha$ verschwinden; indessen gehört doch noch manche Neben-Überlegung hiezu, und wir wollen deswegen die Kurve ACB nun schärfer mathematisch untersuchen:

Die Gleichung der Kurve ACB in rechtwinkligen ebenen Coordinaten erhält man aus den *Soldner*schen Grund-Gleichungen (14) und (15) § 46. S. 265, nämlich:

$$y' - y = s \sin \alpha - \frac{m^2 y}{2 r^2} - \frac{m^2 n}{6 r^2} \tag{12}$$

$$x' - x = s \cos \alpha + \frac{m y'^2}{2 r^2} - \frac{m n^2}{6 r^2} \tag{13}$$

wobei in den Korrektions-Gliedern gesetzt werden darf:

$$m = s \cos \alpha \quad \text{oder} \quad m = x' - x \tag{14}$$

$$n = s \sin \alpha \quad \text{oder} \quad n = y' - y \quad \text{oder} \quad n = m \tan \alpha \tag{15}$$

Indem wir nun die Ausgangs-Werte x, y, nebst s und α als konstant betrachten, schreiben wir (12) und (13) in diese Form:

$$y' - y = s \sin \alpha \left(1 - \frac{m}{tang\,\alpha} \frac{y}{2r^2} - \frac{m^2}{6r^2}\right)$$

$$x' - x = s \cos \alpha \left(1 + \frac{y^2}{2r^2} + \frac{y\,m\,tang\,\alpha}{r^2} + \frac{m^2\,tang^2\,\alpha}{3r^2}\right)$$

Die Division dieser beiden Gleichungen giebt:

$$y' - y = (x' - x)\,tang\,\alpha \left(1 - \frac{m\,y}{tang\,\alpha} \frac{1}{2r^2} - \frac{m^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2} - \frac{y\,m\,tang\,\alpha}{r^2} - \frac{m^2\,tang^2\,\alpha}{3r^2}\right) \quad (16)$$

Hiebei ist α der Richtungs-Winkel der Kurven-*Tangente* in A (Fig. 1.) von der $+x$-Axe gegen die $+y$-Axe gezählt, und durch den Quotienten $(y'-y):(x'-x)$ wird der Richtungs-Winkel α_0 der *Sehne* $A\,B$ in demselben Sinne bestimmt; es wird daher durch die Korrektions-Glieder von (16) die kleine Winkel-Differenz $\alpha - \alpha_0$ bestimmt, in diesem Sinne:

$$d\,tang\,\alpha = \frac{d\,\alpha}{cos^2\,\alpha} = \frac{\alpha_0 - \alpha}{cos^2\,\alpha} = tang\,\alpha \left(-\frac{m\,y}{tang\,\alpha} \frac{1}{2r^2} - \frac{m^2}{6r^2} \ldots\right) \quad (17)$$

Die hier durch ... angedeutete Fortsetzung bezieht sich auf die übrigen Glieder von (16), und wenn man diese in (17) einsetzt und etwas umformt, so kommt man auf:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{m}{6r^2}(2y + y') + \frac{cos^2\,\alpha}{6r^2}\,tang\,\alpha\,(y^2 + y\,y' + y'^2) \quad (18)$$

Dieses giebt sich als übereinstimmend mit (10) zu erkennen, und damit ist bewiesen, dass die Kurve $A\,C\,B$ in Fig. 1. S. 278 mit den dort eingeschriebenen Richtungs-Winkeln α, α' und α_0 das ebene Abbild des entsprechenden sphärischen Bogens $A\,B$ ist.

§ 51. Rechtwinklige sphärische konforme Coordinaten (nach *Gauss*).

Die Betrachtungen des vorigen § 50. über die Verzerrungen, welche bei dem Auftragen rechtwinkliger *sphärischer* Coordinaten in Form rechtwinkliger *ebener* Coordinaten entstehen, gaben Veranlassung zur Gewinnung eines zweiten ähnlichen Coordinaten-Systems, welches *Gauss* bei der Hannoverschen Landes-Vermessung erfand und anwandte, und das auch neuerdings bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme in ausgedehnter Weise angewendet wird.

Wir wollen von der fraglichen Theorie hier nur die Entwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich behandeln, indem wir von den früheren Formeln für die *Soldner*schen Coordinaten ausgehen.

Wir haben gefunden, dass bei den rechtwinkligen *Soldner*schen Coordinaten das Vergrösserungs-Verhältnis in der Ebene nach den verschiedenen Richtungen, welche von einem Punkt ausgehen, selbst verschieden ist, es fand sich nämlich in (5) und (6) § 50. S. 278:

$$v_x = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \text{ in der Richtung der } x\text{-Axe} \quad (1)$$

$$v_y = 1 \text{ in der Richtung der } y\text{-Axe (nach } Soldner).$$

Diese Vergrösserungs-Verhältnisse beziehen sich auf eine Zeichnung, in welcher die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als rechtwinklige *ebene* Coordinaten, im übrigen aber unverändert aufgetragen werden.

Wir werden nun eine Projektion betrachten, bei welcher die Coordinaten x, y ebenfalls rechtwinklig eben aufgetragen werden, und zwar die Abscissen x wie vorhin in richtiger Grösse, dagegen sollen nun die Ordinaten y ebenfalls Verzerrungen erleiden, und zwar in demselben Masse, wie die Abscissen x, d. h.:

$$v_x = v_y = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \tag{2}$$

Nach Fig. 1. wollen wir die Ordinaten in der neuen Projektion mit η bezeichnen, so dass statt einer Kugel-Ordinate y eine gewisse ebene Ordinate η aufgetragen wird; die bei (2) ausgesprochene Bedingung ist daher:

$$\frac{d\,\eta}{d\,y} = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \tag{3}$$

Durch Integration findet man hieraus:

$$\eta = y + \frac{y^3}{6\,r^2} = y\left(1 + \frac{y^2}{6\,r^2}\right) \tag{4}$$

Dieser Gleichung entsprechend haben wir eine Hilfstafel für die Differenzen $\eta - y$ berechnet, wie auf Seite [33] unseres Anhanges mitgeteilt ist.

Man kann mit dieser Hilfstafel leicht beliebig von y auf η oder umgekehrt übergehen. Z. B. in der Gegend von Hannover, wo die alten *Gauss*schen konformen Coordinaten x, η mit dem Nullpunkte Göttingen immer noch zu manchen Zwecken gebraucht werden, haben wir wiederholt Umwandlungen nach dieser Tafel [33] des Anhangs gemacht.

Statt der Gleichung (4) kann man auch, mit Genauigkeit von $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, die andere Form schreiben:

$$y = \eta\left(1 - \frac{\eta^2}{6\,r^2}\right) \tag{5}$$

Wir können nun leicht alle unsere früheren für *Soldner*sche Coordinaten entwickelten Formeln in Formeln für konforme *Gauss*sche Coordinaten umwandeln, wenn wir nur überall y durch η vermöge der Gleichung (5) ersetzen.

Nach (9) und (10) § 48. S. 272—273 haben wir:

$$s^2 = \left((y' - y)^2 + (x' - x)^2\right)\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{3\,r^2}\,\frac{(y'^3 - y^3)}{y' - y}\right) \tag{6}$$

Hierin ist nach (5):

$$y' - y = \eta' - \eta - \frac{\eta'^3 - \eta^3}{6\,r^2} \tag{7}$$

$$(y' - y)^2 = (\eta' - \eta)^2 - \frac{(\eta' - \eta)(y'^3 - \eta^3)}{3\,r^2} \tag{8}$$

Da Glieder mit r^4 im Nenner durchaus vernachlässigt werden, so kann man in dem Korrektions-Glied von (6) schlechthin y und η vertauschen, und damit giebt nun (6):

$$s^2 = (x' - x^2 (+ (\eta' - \eta)^2 - \frac{(\eta'^3 - \eta^3)(\eta' - \eta)^2}{3 r^2 (\eta' - \eta)} - \frac{(\eta'^3 - \eta^3)}{\eta' - \eta} \frac{s^2 \cos^2 \alpha}{3 r^2}$$

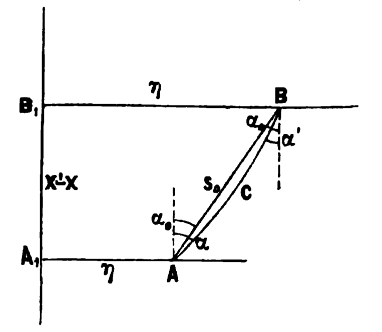
$$s^2 = (x' - x)^2 + (\eta' - \eta)^2 - \frac{\eta'^3 - \eta^3}{\eta' - \eta} \frac{s^2}{3 r^2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$s^2 = s_0^2 \left(1 - \frac{\eta'^2 + \eta \eta' + \eta^2}{3 r^2}\right)$$

oder $s = s_0 \left(1 - \frac{\eta'^2 + \eta \eta' + \eta^2}{6 r^2}\right)$ (9)

Dabei soll s_0 die Entfernung bezeichnen, welche man erhält durch Auftragen der Coordinaten x, η und x', η' in der Ebene nach Fig. 1.

Fig. 1.
*Gauss*sche Coordinaten in ebener (konformer) Darstellung.



Damit hat man auch das Vergrösserungs-Verhältnis:

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{\eta^2 + \eta \eta' + \eta'^2}{6 r^2} \quad (9a)$$

Für numerische Rechnung ist es im Falle des Vorkommens grosser Ordinaten η oder η' nützlich, in (9) die Glieder, welche η oder η' selbst enthalten, von denjenigen Gliedern zu trennen, in welchen nur die Differenz $\eta' - \eta$ vorkommt. Zu diesem Zweck kann man schreiben:

$$4 (\eta'^2 + \eta \eta' + \eta^2) = 3 (\eta' + \eta)^2 + (\eta' - \eta)^2$$

und wenn man zugleich (9) auf logarithmische Form bringt, so hat man hiefür:

$$\log s = \log s_0 - \frac{\mu}{8 r^2} (y' + y)^2 - \frac{\mu}{24 r^2} (\eta' - \eta)^2 \quad (10)$$

Wenn η' und η nahezu gleich sind, so hat man aus (9a) oder (10):

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{\eta^2}{2 r^2} \quad , \quad \log v = \log \frac{s_0}{s} = \frac{\mu \eta^2}{2 r^2} \quad (10a)$$

Hiernach haben wir für genäherte Berechnungen und zur Übersicht eine Hilfstafel auf Seite [33] des Anhangs berechnet.

Übergehend zu den Formeln für Richtungs-Winkel haben wir für *Soldner*sche Coordinaten nach (19) § 48. S. 274:

$$\alpha = arc\, tang \frac{y' - y}{x' - x} + \frac{(x' - x)}{6 r^2} (2 y + y') + \frac{(x' - x)}{6 r^2} \frac{y'^3 - y^3}{s^2} \quad (11)$$

Setzt man hier $y' - y$ nach (7) ein, so giebt dieses an dem Hauptgliede von (11) eine Änderung, welche zunächst die Form hat:

$$d\, arc\, tang \left(\frac{y' - y}{x' - x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y' - y}{x' - x}\right)^2} \frac{d (y' - y)}{x' - x} \quad (12)$$

Das Differential $d (y' - y)$ ist aber als zweites Glied von (7) zu setzen, d. h.:

$$d (y' - y) = - \frac{\eta'^3 - \eta^3}{6 r^2} \quad (13)$$

Dieses in (12) gesetzt, giebt nach kurzer Umformung gerade den negativen

Wert des letzten Gliedes von (11), d. h. wenn man die Formel (11) auf *Gauss*sche Coordinaten umformt, so fällt das letzte Glied fort, und man erhält:

$$\alpha = arc\,tang \frac{\eta' - \eta}{x' - x} + \frac{(x' - x)}{6 r^2}(2\eta + \eta') \tag{14}$$

oder

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{x' - x}{6 r^2}(2\eta + \eta') \tag{15}$$

wobei α_0 den Richtungs-Winkel für ebene Coordinaten x und η bedeutet.

Man kann die Formel (15) auch in dem Sinne umformen, wie bei der Entfernungs-Formel (9) geschehen ist; man schreibt hiezu

$2(2\eta + \eta') = 3(\eta + \eta') - (\eta' - \eta)$ und damit wird (15):

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{x' - x}{4 r^2}(\eta + \eta') - \frac{x' - x}{12 r^2}(\eta' - \eta) \tag{16}$$

Wenn man diese Formel (16) auch auf die Gegenrichtung anwendet, so bekommt man:

$$\alpha' = \alpha_0 + \frac{x - x'}{4 r^2}(\eta' + \eta) - \frac{x - x'}{12 r^2}(\eta - \eta') \tag{17}$$

folglich durch Subtraktion von (16) und (17):

$$\alpha - \alpha' = \frac{x' - x}{2 r^2}(\eta + \eta') \tag{18}$$

Dieses stimmt mit der entsprechenden Formel für *Soldner*sche Coordinaten (11) § 50. S. 280, was auch unmittelbar einzusehen ist, denn dieses $\alpha - \alpha'$ ist die gesamte Ordinaten-Konvergenz, welche durch die Verzerrung der η nicht beeinflusst wird.

Wir wollen auch noch unsere ersten *Soldner*schen Formeln von § 46. auf η umformen, zunächst nach (14) oder (18) § 46. S. 266:

$$y' - y = s \sin \alpha - \frac{2y + y'}{3} \frac{(x' - x)^2}{2 r^2}$$

Wenn man hiezu (7) berücksichtigt, und in den Gliedern zweiter Ordnung überall η statt y schreibt, so hat man:

$$\eta' - \eta = s \sin \alpha - \frac{2\eta + \eta'}{6 r^2}(x' - x)^2 + \frac{\eta'^3 - \eta^3}{6 r^2} \tag{19}$$

Andererseits ist aber aus Fig. 1. zu entnehmen:

$$\eta' - \eta = s_0 \sin \alpha_0 \tag{20}$$

Es muss möglich sein, die Formen (19) und (20), deren Gleichwertigkeit wir geometrisch eingesehen haben, auch analytisch in einander überzuführen. Dieses ist auch der Fall, wenn man die Bedeutungen von s_0 und α_0 nach (9) und (15) berücksichtigt, nämlich:

$$s_0 = s\left(1 + \frac{\eta'^3 - \eta^3}{6 r^2}\right) \quad \text{und} \quad \alpha_0 = \alpha - \frac{x' - x}{6 r^2}(2\eta + \eta') \tag{21}$$

Setzt man dieses in (20) ein, so kommt man nach wenigen Umformungen auf (19).

Ähnlich verhält es sich auch mit der Formel für $x' - x$; dieselbe heisst zunächst nach *Soldner* (15) § 46. S. 265:

$$x' - x = s \cos \alpha + \frac{m\,y'^2}{2 r^2} - \frac{m\,n^2}{6 r^2} \tag{22}$$

Eine Umwandlung auf η ist gar nicht nötig, weil die η und η' nur in den Korrektions-Gliedern vorkommen, in welchen y und η als gleich gelten; man kann daher (21) auch so schreiben:

$$x' - x = s \cos \alpha + \frac{m\,\eta'^2}{2\,r^2} - \frac{m(\eta' - \eta)^2}{6\,r^2} \tag{23}$$

Dieses muss auf die Form gebracht werden können:

$$x' - x = s_0 \cos \alpha_0 \tag{24}$$

Dieses ist in der That der Fall; man braucht nur die Bedeutungen von s_0 und α_0 von (21) in (24) zu setzen, worauf nach einiger Umformung (23) entstehen wird.

Weitere Ausführungen.

Wir wollen in gleicher Weise wie bei den *Soldner*schen Coordinaten bei (12) bis (18) § 50. S. 281, die Gleichung der ebenen Kurve ACB Fig. 1. S. 283 in ebenen Coordinaten darstellen, und haben dazu nach (19) und (23):

$$\eta' - \eta = s \sin \alpha \left(1 - \frac{3\,\eta}{n}\,\frac{m^2}{6\,r^2} - \frac{m^2}{6\,r^2} + \frac{\eta^2 + \eta\,\eta' + \eta'^2}{6\,r^2}\right)$$

$$x' - x = s \cos \alpha \left(1 + \frac{\eta'^2}{2\,r^2} - \frac{n^2}{6\,r^2}\right)$$

Durch Division findet man:

$$\eta' - \eta = (x' \quad x) \operatorname{tang} \alpha \left(1 - \frac{3\,\eta\,m}{6\,r^2}\,\frac{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}{\operatorname{tang} \alpha} - \frac{m^2}{6\,r^2}(1 + \operatorname{tang}^2 \alpha)\right) \tag{25}$$

Im übrigen nach demselben Gedankengang verfahrend, wie bei (16) und (17) des vorigen § 50. S. 281 erhält man:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{m}{6\,r^2}(2\,\eta + \eta')$$

Dieses ist übereinstimmend mit (15), und damit ist gezeigt, dass die in Fig. 1. gezeichnete ebene Kurve $A\,C\,B$, deren Gleichung (25) ist, in Hinsicht auf die Richtungs-Winkel α und α' das richtige Abbild des entsprechenden sphärischen Bogens ist.

§ 52. Die Konformität des *Gauss*schen Coordinaten-Systems.

Das im vorigen § 51. behandelte System der rechtwinkligen Coordinaten x , η hat die Eigenschaft, dass es von einem Teil der Kugeloberfläche eine ebene Darstellung bietet, welche dem Urbilde in den kleinsten Teilen *ähnlich* ist.

Diese Eigenschaft, welcher *Gauss* die Benennung „*konforme*“ Abbildung gegeben hat, wollen wir durch Vergleichung der Verzerrungsformeln für das *Soldner*sche und für das *Gauss*sche System näher untersuchen. Wir haben nämlich nach (3) § 50. S. 278 und nach (9a) § 51. S. 283:

$$(Soldner) \quad v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{y^2 + y\,y' + y'^2}{6\,r^2} \cos^2 \alpha \tag{1}$$

$$(Gauss) \quad v' = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{\eta^2 + \eta\,\eta' + \eta'^2}{6\,r^2} \tag{2}$$

Nimmt man nur sehr kleine Linien s in Betracht, so hat man, indem man $y' = y$ oder $\eta' = \eta$ setzt:

$$(Soldner) \quad v = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \cos^2 \alpha \tag{3}$$

$$(Gauss) \quad v' = 1 + \frac{\eta^2}{2\,r^2} \tag{4}$$

Hier besteht der wesentliche Unterschied, dass v nach verschiedenen Richtungen α *verschieden*, dagegen v' nach allen Richtungen α *gleich* ist.

Nimmt man noch die Richtungs-Änderungen $\alpha - \alpha_0$ nach (10) § 50. S. 280 und (15) § 51. S. 284 hinzu, so sieht man, dass diese für unendlich kleine Entfernungen s bzw. m oder n in beiden Fällen verschwinden; und damit ist folgende Betrachtung vorbereitet:

Man denke sich von irgend einem Punkte mit sphärischen Coordinaten x, η das ebene Abbild durch die konformen Coordinaten x, η hergestellt, und von diesem Punkte zwei kurze Linien gezogen, welche auf der Kugel die Längen ds_1 und ds_2, und dann vermöge (4) in der Ebene die Längen $v'ds_1$ und $v'ds_2$ haben. Der Winkel zwischen den zwei Elementen ds_1 und ds_2 geht, weil diese als unendlich klein gelten, in richtiger Grösse auf das Abbild über; also ist das unendlich kleine Dreieck mit den Seiten $v'ds_1$ und $v'ds_2$ dem unendlich kleinen Dreieck mit den Seiten ds_1 und ds_2 *ähnlich*.

Man kann das konform *Gauss*sche System x, η mit dem nicht konformen *Soldner*schen System x, y in mehrfacher Beziehung vergleichen:

Die Konformität hat in kartographischer Beziehung den Vorteil, dass man an irgend einem Punkte nach verschiedenen Richtungen immer nur *einen* Massstab anzuwenden hat, dieser Vorzug ist aber bei so kleinen Verzerrungen, die das Auge in der Karte überhaupt kaum wahrnehmen kann, nicht sehr wichtig, denn der Hauptvorteil solcher Coordinaten-Systeme besteht darin, dass innerhalb eines gewissen mässigen Bereiches (z. B. mit y oder η unter 60 000^m) die Verzerrungen überhaupt *vernachlässigt* werden; und dann ist es gleichgültig, ob die vernachlässigten Korrektions-Glieder die eine oder andere Form oder Bedeutung haben

Man kann deswegen die Vergleichung beider Systeme mit der Frage führen, welches die Gesamt-Verzerrungen innerhalb eines gewissen Gebietes ist, innerhalb dessen man beabsichtigt, alle aus den rechtwinkligen Coordinaten abgeleiteten Grössen *ohne weiteren Korrektionen* zu benützen, wie es in der Kleinvermessung und schon in der Triangulierung vierter und dritter Ordnung geschieht.

Hier erzeugen die vernachlässigten Korrektionen denselben Schaden wie kleine Messungsfehler, und es ist darnach zu trachten, die vernachlässigten Grössen in ihrer Gesamtwirkung möglichst *klein* zu machen, ohne Einführung von Verzerrungen an solchen Stellen, wo sie nicht unumgänglich nötig sind.

In Hinsicht auf den Gesamtbetrag aller Verzerrungen ist also das konforme *Gauss*sche System mit den willkürlich zum Zweck der Konformitäts-Erzeugung hineingelegten Ordinaten-Verzerrungen jedenfalls ungünstiger als das in den Ordinaten unverzerrte *Soldner*sche System.

Die Überlegenheit des konformen Systems für die geodätischen Berechnungen liegt aber in den viel *bequemeren und eleganteren Formeln* mit η, nach welchen sich auch viel leichter Hilfstafeln berechnen lassen, als nach den Formeln mit y, wie aus den Hauptformeln für v und v', die wir oben unter (1) bis (4) zusammengestellt haben,

sowie aus den Formeln für $\alpha - \alpha_0$ (nach (10) § 50. S. 280 und (15) § 51. S. 284) sich sofort ergiebt.

Dieser Vorteil des eleganteren Formelbaus tritt aber zurück und verschwindet nach Umständen völlig, wenn man nicht mehr bei den ersten Näherungen von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ stehen bleibt, wie wir bei allen unseren Entwicklungen von § 51. gethan haben. Wenn man, für Ordinaten η bis 100 000^m und darüber, die Entwicklungen weiter führen will, so hat man erstens höhere Potenzen $\frac{1}{r^4}$ und zweitens sphäroidische Glieder mit e'^2 zu berücksichtigen, welche wohl ebenso mühsam zu berechnen sind, als die höheren Glieder der Formeln mit unverzerrten Ordinaten y.

Andererseits ist von Wichtigkeit, dass der *Soldner*sche Grundsatz des unverzerrten Auftragens von x und y in der Ebene, in seiner theoretischen Weiterführung mit der geodätischen Linie, nur solcher Entwicklungen bedarf, welche man zu vielen anderen geodätischen Zwecken *ohnehin* braucht.

Die konformen rechtwinkligen Coordinaten hat *Gauss* für die Hannoversche Landesvermessung erfunden. In dem Hannoverschen Coordinaten-Verzeichnis, welches in „*Carl Friedrich Gauss'* Werken, IV. Band, Göttingen 1873" S. 415—445 veröffentlicht ist, findet sich auf S. 445 eine aus alter Zeit von *Gauss* selbst gemachte Bemerkung mit abgedruckt:

„Es ist dabei schon die Krümmung der Erdoberfläche dergestalt berücksichtigt, dass bei Auftragung dieser Coordinaten auf eine ebene Fläche das Bild ein *konformes*, d. i. in den kleinsten Teilen ähnliches wird. Das Nähere darüber enthalten meine geodätischen Abhandlungen schon jetzt, und spätere Abhandlungen werden dies noch ausführlicher entwickeln."

Das letztere ist nun nicht mehr geschehen. Zwar die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel ist in *Gauss'* „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" schon 1843—1846 veröffentlicht, aber die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die *Ebene* war in Hannover selbst, wo auf Grundlage derselben fortwährend topographische Aufnahmen stattgefunden hatten, so gut wie verloren gegangen, und man arbeitete nur unter dem Einflusse einer Art von Tradition nach überlieferten Schablonen (*Wittstein*, Vorrede zu *Schreiber* 1866). Diesem unsicheren Zustande wurde ein Ende gemacht durch das von dem jetzigen General (damals Hauptmann) *Schreiber* im Jahre 1866 veröffentlichte Werk: „Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung, von *Oskar Schreiber*, Hauptmann im Königl. Hannov. 1. Jäger-Bataillon, Hannover, *Halm*sche Hofbuchhandlung 1866".

Bald darauf erschien auch „Allgemeines Coordinaten-Verzeichnis als Ergebnis der Hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821—1844, Hannover 1868" mit einer Einleitung von *Wittstein*, enthaltend die wichtigsten Coordinaten-Formeln mit Gliedern von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich.

Hierauf gründen sich einige von uns in der „Zeitschr. f. Verm. 1874" S. 246—252 und 1875, S. 27—32 gemachte Bemerkungen, namentlich (1875 S. 32) dass die *Gauss*sche konforme Projektion im wesentlichen dasselbe ist, wie die bekannte *Merkator-Projektion* in der Nähe des berührenden Bogens (Äquators). Hieran schliesst sich auch an die Entwicklung der „Näherungs-Formeln für die *Gauss*sche Projektion der Hannoverschen Landesvermessung", von *Helmert*, „Zeitschr. für Verm. 1876" S. 238—253.

Einige weitere Mitteilungen verdanken wir noch Herrn General *Schreiber*, welcher dieselben veröffentlichen liess in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen, Stuttgart 1882", 1. S. 153—164. An dieser Stelle ist auch mitgeteilt, in welcher Weise die trigonometrische Abteilung der preussischen Landesaufnahme heute von dem Grundsatz der konformen Flächen-Abbildung Gebrauch macht, noch in anderem Sinne als von dem bisher von uns betrachteten, worauf wir später zurückkommen werden.

§ 53. Bestimmung der geographischen Coordinaten φ, λ aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y.

Die geographischen *sphärischen* Coordinaten φ, λ und die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten x, y sind nach unseren bisherigen Erklärungen in Fig. 1. und Fig. 2. dargestellt, und wir werden die Bestimmung von φ und λ, nebst der Meridian-Convergenz γ aus gegebenen x und y hiernach *sphärisch* behandeln können. Wir werden dabei durch Reihen-Entwicklung nicht nur auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ wie bisher, sondern auch auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r}$ geführt werden, welche keine unmittelbare Übertragung auf sphäroidische Berechnung gestatten.

Trotzdem haben diese jetzt vorzunehmenden sphärischen Entwicklungen ihren Wert, indem sie durch Ergänzungen in unserem nächsten Kapitel VI. auch dem Ellipsoid angepasst werden, oder sonstwie als Vorbereitungen für ellipsoidische geodätische Aufgaben dienen sollen.

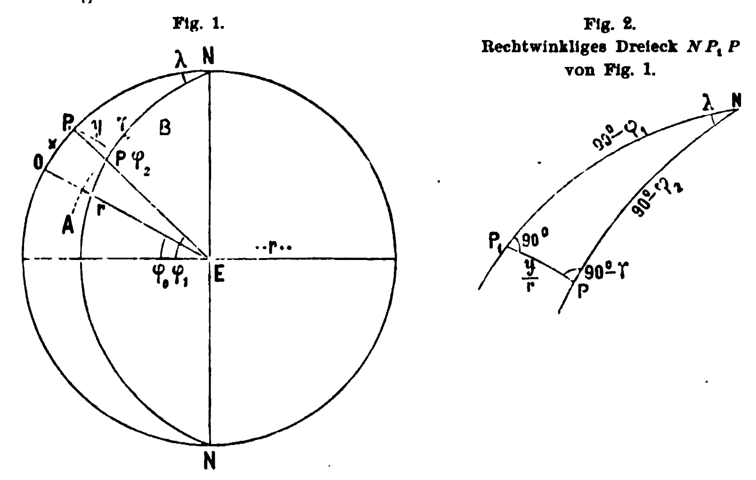


Fig. 1.

Fig. 2. Rechtwinkliges Dreieck NP_1P von Fig. 1.

Nach Fig. 1. und Fig. 2. nehmen wir folgende Aufgabe:

Gegeben ist die Breite φ_0 des Coordinaten-Ursprungs O und die rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes P.

Gesucht ist die Breite φ_2 des Punktes P, der Längen-Unterschied λ zwischen O und P und die Meridian-Convergenz λ für P und P_1.

Die Abscissen x sollen wie bisher nach Norden positiv, die Ordinaten y nach Osten positiv, und die Längen λ ebenfalls nach Osten positiv gezählt werden.

Aus Fig. 1. entnehmen wir die Beziehung zwischen der Ursprungsbreite φ_0, der Fusspunktsbreite φ_1 und der Abscisse x, nämlich:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{x}{r} \text{ bzw. } = \frac{x}{r}\varrho \tag{1}$$

Alles weitere wird durch das rechtwinklige sphärische Dreieck NP_1P geliefert, weshalb wir dieses Dreieck in Fig. 2. nochmals besonders herausgezeichnet haben. Dieses Dreieck giebt zuerst die Cosinus-Gleichung:

$$\cos(90^\circ - \varphi_2) = \cos(90^\circ - \varphi_1)\cos\frac{y}{r}$$

oder:

$$\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1\left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right)$$

$$\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 = \frac{y^2}{2r^2}\sin\varphi_1$$

Nun ist aber in erster Näherung $\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)\cos\varphi_1$

also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2r^2}\tang\varphi_1 \tag{2}$$

Zweitens giebt das rechtwinklige Dreieck Fig. 2. zur Bestimmung von λ:

$$\tang\lambda = \frac{\tang\frac{y}{r}}{\sin(90^\circ - \varphi_1)} = \frac{\tang\frac{y}{r}}{\cos\varphi_1}$$

$$\lambda + \frac{\lambda^3}{3} = \frac{1}{\cos\varphi_1}\left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3}\right)$$

in erster Näherung:

$$\lambda = \frac{y}{r\cos\varphi_1} + \ldots \quad , \quad \lambda^3 = \frac{y^3}{r^3\cos^3\varphi_1}$$

Also:

$$\lambda + \frac{y^3}{3r^3\cos^3\varphi_1} = \frac{y}{r\cos\varphi_1} + \frac{y^3}{3r^3\cos\varphi_1}$$

$$\lambda = \frac{y}{r\cos\varphi_1} - \frac{y^3}{3r^3}\frac{\tang^2\varphi_1}{\cos\varphi_1} \tag{3}$$

Drittens giebt das rechtwinklige Dreieck zur Bestimmung von γ:

$$\tang(90^\circ - \gamma) = \frac{\tang(90^\circ - \varphi_1)}{\sin\frac{y}{r}} \quad \text{oder} \quad \tang\gamma = \sin\frac{y}{r}\tang\varphi_1$$

$$\gamma + \frac{\gamma^3}{3} = \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}\right)\tang\varphi_1$$

$$\gamma = \frac{y}{r}\tang\varphi_1 + \ldots \qquad \gamma^3 = \frac{y^3}{r^3}\tang^3\varphi_1$$

$$\gamma + \frac{y^3}{3r^3}\tang^3\varphi_1 = \frac{y}{r}\tang\varphi_1 - \frac{y^3}{6r^3}\tang\varphi_1$$

$$\gamma = \frac{y}{r}\tang\varphi_1 - \frac{y^3}{6r^3}\tang\varphi_1(1 + 2\tang^2\varphi_1) \tag{4}$$

Durch diese Gleichungen (1)—(4) ist unsere Aufgabe gelöst, wir wollen aber noch zwei neue Gleichungen bilden, welche (3), (4) entsprechen, aber überall statt der Fusspunkts-Breite φ_1 die Breite φ_2 enthalten sollen. Zur Bestimmung von λ nimmt man dann:

$$\sin\lambda = \frac{\sin\frac{y}{r}}{\sin(90^\circ - \varphi_2)} = \frac{\sin\frac{y}{r}}{\cos\varphi_2}$$

$$\lambda - \frac{\lambda^3}{6} = \frac{1}{\cos\varphi_2}\left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}\right)$$

$$\lambda - \frac{1}{6}\left(\frac{y}{r\cos\varphi_2}\right)^3 = \frac{y}{r\cos\varphi_2} - \frac{y^3}{6r^3\cos\varphi_2}$$

$$\lambda = \frac{y}{r\cos\varphi_2} + \frac{y^3}{6r^3}\frac{tang^2\varphi_2}{\cos\varphi_2} \tag{5}$$

Ferner zur zweiten Formel für γ:

$$\cos(90^\circ - \gamma) = \frac{tang\frac{y}{r}}{tang(90^\circ - \varphi_2)} \quad , \quad \sin\gamma = tang\frac{y}{r}\,tang\,\varphi_2$$

$$\gamma - \frac{\gamma^3}{6} = \left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3}\right) tang\,\varphi_2$$

$$\gamma - \frac{1}{6}\left(\frac{y}{r}\,tang\,\varphi_2\right)^3 = \frac{y}{r}\,tang\,\varphi_2 + \frac{y^3}{3r^3}\,tang\,\varphi_2$$

$$\gamma = \frac{y}{r}\,tang\,\varphi_2 + \frac{y^3}{6r^3}\,tang\,\varphi_2\,(2 + tang^2\varphi_2) \tag{6}$$

Endlich kann man auch noch für λ statt der beiden zweigliederigen Formeln (3) und (5) eine *ein*gliederige Formel bilden, nämlich:

$$\lambda = \frac{y}{r}\sec\frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} \tag{7}$$

Man kann diese bequeme Formel (7) leicht rückwärts begründen, indem man setzt:

$$\frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} = \varphi_1 - \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\cos\frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} = \cos\varphi_1 + \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\varphi_1 = \cos\varphi_1\left(1 + \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2)\,tang\,\varphi_1\right)$$

$$\sec\frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} \quad \frac{1}{\cos\varphi_1}\left(1 - \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2)\,tang\,\varphi_1\right)$$

Wegen (2) giebt dieses:

$$\sec\frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} = \frac{1}{\cos\varphi_1}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y^2}{r^2}\,tang^2\varphi_1\right)$$

Dieses in (7) gesetzt, führt zurück auf (3), womit (7) bewiesen ist.

Man kann eine Umformung ähnlicher Art auch für die Meridian-Konvergenz machen, denn (4) oder (6) lässt sich auf diese Form bringen:

$$\gamma = \frac{y}{r}\sin\frac{2\varphi_1 + \varphi_2}{3}\sec\frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} \tag{8}$$

Übergang zu konformen Coordinaten x, η.

Man kann von den vorstehenden Formeln, welche φ, λ, γ in gewöhnlichen (*Soldner*schen) rechtwinkligen Coordinaten x, y ausdrücken, auch leicht übergehen zu solchen Formeln, welche φ, λ, γ in konformen (*Gauss*schen) Coordinaten x, η ausdrücken, denn man braucht nur überall y durch η zu ersetzen, nämlich nach (5) § 51. S. 282 zu setzen:

$$y = \eta\left(1 - \frac{\eta^2}{6r^2}\right) \tag{9}$$

Dieses giebt innerhalb der Glieder dritter Ordnung in (2) S. 289 keine Änderung, wir können also geradezu schreiben:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\eta^2}{2\,r^2}\, tang\, \varphi_1 \tag{10}$$

Ferner die Gleichung (3) S. 289 giebt mit der Einsetzung (9):

$$\lambda = \frac{1}{r \cos \varphi_1}\left(\eta - \frac{\eta^3}{6\,r^2}\right) - \frac{\eta^3}{3\,r^2}\,\frac{tang^2\, \varphi_1}{\cos \varphi_1}$$

und dieses giebt nach kurzer Umformung:

$$\lambda = \frac{\eta}{r \cos \varphi_1} - \frac{\eta^3}{6\,r^3 \cos^3 \varphi_1}\,(2 - \cos^2 \varphi_1) \tag{11}$$

Auch bei den übrigen derartigen Umformungen besteht gar keine Schwierigkeit, weshalb wir für dieselben sofort die Ergebnisse hersetzen:

$$\lambda = \frac{\eta}{r \cos \varphi_2} - \frac{\eta^3}{6\,r^3 \cos \varphi_2}\,(1 - tang^2\, \varphi_2) \tag{12}$$

$$\gamma = \frac{\eta}{r}\, tang\, \varphi_1 - \frac{\eta^3}{3\,r^3}\,\frac{\sin \varphi_1}{\cos^3 \varphi_1} \tag{13}$$

oder

$$\gamma = \frac{\eta}{r}\, tang\, \varphi_2 + \frac{\eta^3}{6\,r^3}\,\frac{\sin \varphi_2}{\cos^3 \varphi} \tag{14}$$

Die Formeln (10), (11) und (13) stimmen mit den entsprechenden Formeln von § 4. und § 5. der Einleitung von *Wittstein* zu dem Hannoverschen Coordinaten-Verzeichnis, wenn man dort y^4 und δ vernachlässigt. (Das von *Gauss* und *Wittstein* gebrauchte δ entspricht unserem $e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}$).

Bemerkung über die geographischen Längen und Breiten.

Die geographischen Längenunterschiede λ werden teils in *Bogen*mass teils in *Zeit*mass angegeben, zu deren gegenseitiger Verwandlung unsere Hilfstafel auf Seite [31] des Anhangs benützt werden kann.

Als Beispiel wollen wir im System der Preussischen Landesaufnahme nehmen:

		in Bogen	in Zeit
Berlin, Rauenberg	$\lambda_0 =$	$31^\circ\ 2'\ 4{,}9280''$ =	$2^h\ 4^m\ 8{,}328533^s$
Celle	$\lambda =$	$27^\circ\ 44'\ 54{,}8477''$ =	$1^h\ 50^m\ 59{,}656514^s$
Differenz	$\lambda_0 - \lambda =$	$3^\circ\ 17'\ 10{,}0803''$ =	$0^h\ 13^m\ 8{,}672019^s$

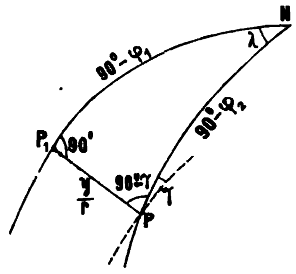
Bei der Benützung der Hilfstafel Seite [31] kann man beliebig viele Dezimalen schreiben, obgleich nur $0{,}0001^s$ angegeben ist. Z. B. für vorstehendes $\lambda_0 - \lambda$ hat man:

3°	$0^h\ 12^m\ 0^s$	$0^h\ 13^m =$	$3^\circ\ 15'\ 0''$
$17' =$	$1^m\ 8^s$	$8^s =$	$2'\ 0''$
$10'' =$	$0{,}666\ 667^s$	$0{,}6^s =$	$0{,}90''$
$0{,}08'' =$	$0{,}005\ 333^s$	$0{,}07^s =$	$0{,}105''$
$0{,}0003'' =$	$0{,}000\ 020^s$	$0{,}002^s =$	$0{,}003\ 0''$
		$0{,}00002^s =$	$0{,}000\ 030''$
Summe	$0^h\ 13^m\ 8{,}672\ 020^s$	Summe	$3^\circ\ 17'\ 1{,}008\ 030''$,

Was die Zahlenschärfe solcher Angaben, ebenso wie auch für geographische Breiten, betrifft, so kommt die etwaige astronomische Messung dabei für uns nicht in Betracht. In geodätischer Beziehung gelten Längen und Breiten nur als Mass-Bestimmungen auf der Oberfläche des Ellipsoids; und da z. B. 1″ in Breite rund = 30 Meter ist (vgl. Anhang Seite [27]), so bringt 0,001″ immer noch $0{,}03^m$ oder 3 Centimeter, und man muss daher geographische Coordinaten auf 0,0001″ oder gar auf 0,00001″ genau angeben, wenn man die Genauigkeit *geodätischer* Messungen, mit der immer formell etwas übertrieben nöthigen Schärfe, durch geographische Längen und Breiten ausdrücken will.

§ 54. Bestimmung der rechtwinkligen Coordinaten x, y aus den geographischen Coordinaten φ, λ.

Fig. 1.



Die Umkehrung der vorigen Aufgabe in § 53. heisst:

Gegeben sind die geographischen Coordinaten φ_2, λ eines Punktes P, und zwar die Länge λ bezogen auf den Meridian eines gegebenen Coordinaten-Systems, dessen Ursprungs-Breite φ_0 ebenfalls gegeben ist.

Gesucht sind die rechtwinkligen Coordinaten x, y des Punktes P, und die Meridian-Konvergenz γ.

Auch diese Aufgabe lässt sich mittelst des rechtwinkligen Dreiecks, das wir in Fig. 1. wieder haben, leicht lösen.

Zur Bestimmung von $\varphi_1 - \varphi_2$ hat man:

$$\cos\lambda = \frac{\tang(90° - \varphi_1)}{\tang(90° - \varphi_2)} = \frac{\tang\varphi_2}{\tang\varphi_1}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\tang\varphi_1 = \tang\varphi_2 \quad \text{oder} \quad \tang\varphi_1 - \tang\varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2}\tang\varphi_1$$

Andererseits ist $\tang\varphi_1 - \tang\varphi_2 = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{\cos^2\varphi_1}$

also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 \tag{1}$$

Bei den Entwicklungen für λ und γ kann man wieder wie im vorigen § 53. entweder alles auf φ_1 oder auf φ_2 beziehen, wir wollen die *beiden* Entwicklungen neben einander hersetzen, ohne Erläuterungen durch Worte, welche nach dem vorhergehenden nicht mehr nötig sein werden.

$$\tang\lambda = \frac{\tang\frac{y}{r}}{\cos\varphi_1} \qquad \sin\lambda = \frac{\sin\frac{y}{r}}{\cos\varphi_2}$$

$$\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} = \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3}\right)\cos\varphi_1 \qquad \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} = \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{6}\right)\cos\varphi_2$$

$$y = r\lambda\cos\varphi_1 + \frac{r\lambda^3}{3}\cos\varphi_1\sin^2\varphi_1 \qquad y = r\lambda\cos\varphi_2 - \frac{r\lambda^3}{6}\cos\varphi_2\sin^2\varphi_2 \tag{2}$$

$$\cos(90° - \gamma) = \sin\lambda\cos(90° - \varphi_1) \qquad \cos(90° - \varphi_2) = \cotg\lambda\cotg(90° - \gamma)$$

$$\sin\gamma = \sin\lambda\sin\varphi_1 \qquad \tang\gamma = \tang\lambda\sin\varphi_2$$

$$\gamma - \frac{\gamma^3}{6} = \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{6}\right)\sin\varphi_1 \qquad \gamma + \frac{\gamma^3}{3} = \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3}\right)\sin\varphi_2$$

$$\gamma = \lambda\sin\varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6}\sin\varphi_1\cos^2\varphi_1 \qquad \gamma = \lambda\sin\varphi_2 + \frac{\lambda^3}{3}\sin\varphi_2\cos^2\varphi_2 \tag{3}$$

Die Doppel-Formeln (2) und (3), welche zweigliederig sind, kann man auch in je *eine* eingliedrige Formel überführen, in ähnlicher Weise wie dieses bei (7) und (8) des vorigen § 53. S. 290 gezeigt wurde. Man findet:

$$y = r\,\lambda\,\cos\frac{\varphi_1 + 2\,\varphi_2}{3} \tag{4}$$

$$\gamma = \lambda\,\sin\frac{2\,\varphi_1 + \varphi_2}{3} \tag{5}$$

Der Gang der Auflösung würde nun so sein, dass man zuerst nach (1) aus der gegebenen Breite φ_2 die Fusspunkts-Breite φ_1 ableitet, und daraus, durch die Differenz gegen die Ursprungs-Breite φ_0, die Abscisse x berechnet, nämlich:

$$x = (\varphi_1 - \varphi_0)\,r \qquad \text{bzw.} \qquad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varrho}\,r \tag{6}$$

Darauf hat man für y und γ je *drei* Formeln, nämlich (2) und (4) für y, und (3) und (5) für γ; dann kann man nach Belieben je *zwei* Formeln auswählen, um y und γ mit Probe zu berechnen.

Übergang zu konformen Coordinaten x, η.

Wenn man aus gegebenen φ_2 und λ nicht gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten x, y, sondern konforme Coordinaten x, η berechnen will, so kann man das durch die bekannte Beziehung zwischen y und η ((9) § 53. S. 290.) machen, oder man kann auch unsere Formeln (10)–(14) § 53. S. 291 umgekehrt anwenden. So finden wir durch Umkehrung von (12) § 53. S. 291:

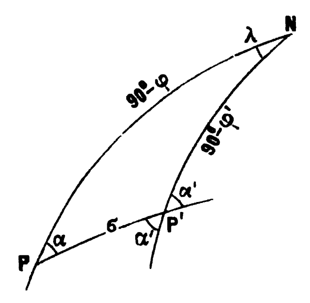
$$\eta = r\,\lambda\,\cos\varphi_2 - \frac{r\,\lambda^3}{6}\cos\varphi_2\,(1 - 2\cos^2\varphi_2) \tag{7}$$

Dieses stimmt (soweit hier nötig) mit der Formel für y in § 3. der *Wittstein*schen Einleitung zu dem *Gauss*schen Coordinaten-Verzeichnis, weshalb wir auch diese Formel (7) hier behandelt haben. Im übrigen aber können wir darauf verweisen, dass man von y zu η und umgekehrt stets numerisch übergehen kann durch die Tabelle auf Seite [33] des Anhangs, so dass man besonderer Formeln für η nicht bedarf.

§ 55. Beziehungen zwischen geographischen Coordinaten und Polar-Coordinaten (geodätische Hauptaufgabe).

Wenn zwei Punkte P und P' durch ihre geographischen Breiten φ und φ' nebst ihrem geographischen Längen-Unterschied λ gegeben sind, so wird dadurch nach Fig. 1. ein sphärisches Dreieck NPP' bestimmt, dessen Seite $NP = 90° - \varphi$, dessen Seite $NP' = 90° - \varphi'$ und dessen Winkel bei $N = \lambda$ ist.

Fig. 1.
Sphärisch-geodätische Hauptaufgabe.



Man kennt also von dem Dreieck zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, und daher ist auch die dritte Seite σ und die beiden anderen Dreiecks-Winkel α und $180° - \alpha'$ bestimmt, d. h. man kann dann die Entfernung beider Punkte $PP' = \sigma$ und die beiden Azimute in P und in P', bzw. $= \alpha$ und $= \alpha'$ berechnen.

Wenn umgekehrt *ein* Punkt P durch seine Breite φ bestimmt ist, und ausserdem die Entfernung $PP' = \sigma$ und das Azimut α bekannt sind, so ist wieder das

Dreieck NPP' durch zwei Seiten $NP = 90° - \varphi$, $PP' = \sigma$ und den eingeschlossenen Winkeln α bestimmt, und man kann die fehlenden Stücke $90° - \varphi'$, λ und $180° - \alpha'$ bzw. α' berechnen.

Die beiden hier genannten Aufgaben, namentlich die zweite, spielen in der Geodäsie eine wichtige Rolle, und man nennt sie häufig „geodätische Hauptaufgaben", oder, da manche Lösungen dieser zwei Aufgaben gegenseitig nahe verwandt sind, und leicht in einander übergehen, betrachtet man auch oft das Ganze nur als *eine* Aufgabe.

Hier beschäftigen wir uns nur mit der rein *sphärischen* Auflösung der fraglichen Aufgaben, und da wir eingesehen haben, dass es sich in beiden Fällen nur darum handelt, ein sphärisches Dreieck aus zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel aufzulösen, liegen im Grundsatz keine Schwierigkeiten vor, und es handelt sich jetzt darum, die verschiedenen Auflösungs-Formen, welche die sphärische Trigonometrie für unsern Fall bietet, zu betrachten, und für unsere Zwecke zurecht zu legen (wozu *Gauss* in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie", erste Abhandlung, 1843, art. 16. und 17. die Wege gezeigt hat).

Ehe wir zu unseren Formel-Entwicklungen und zur numerischen Anwendung von sphärischen Formeln übergehen, wollen wir zwei scharf (mit 10stelligen Logarithmen) berechnete Beispiele voraus schicken, welche in verschiedener Weise als Normal-Beispiele dienen können:

Kleines sphärisches Normal-Beispiel.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 293.)

$$\left.\begin{array}{lll}
\varphi = 49° 30' 0'' & \varphi' = 50° 30' 0'' & \lambda = 1° \; 0' 0'' \\[4pt]
\dfrac{\varphi' + \varphi}{2} = 50° \; 0' 0'' & \dfrac{\varphi' - \varphi}{2} = 0° 30' 0'' & \dfrac{\lambda}{2} = 0° 30' 0'' \\[8pt]
\dfrac{\alpha' + \alpha}{2} = 32° 44' \; 0{,}2884'' & & \alpha' - \alpha = 0° 45' 57{,}89393'' \\[8pt]
\dfrac{\alpha' - \alpha}{2} = 0° 22' 58{,}9470'' & & \dfrac{\sigma}{2} = 0° 35' 39{,}74093'' \\[8pt]
\hline
\alpha' = 33° \; 6' 59{,}1854'' & & \sigma = 1° 11' 19{,}48186'' \\
\alpha = 32° 21' \; 1{,}2914'' & & \sigma = 4279{,}48186''
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Grosses sphärisches Normal-Beispiel.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 293.)

$$\left.\begin{array}{lll}
\varphi = 45° 0' 0'' & \varphi' = 55° 0' 0'' & \lambda = 10° 0' 0'' \\[4pt]
\dfrac{\varphi' + \varphi}{2} = 50° 0' 0'' & \dfrac{\varphi' - \varphi}{2} = 5° 0' 0'' & \dfrac{\lambda}{2} = 5° 0' 0'' \\[8pt]
\dfrac{\alpha' + \alpha}{2} = 32° 49' 54{,}6437'' & & \alpha' - \alpha = 7° 41' 51{,}67100'' \\[8pt]
\dfrac{\alpha' - \alpha}{2} = 3° 50' 55{,}8355'' & & \dfrac{\sigma}{2} = 5° 55' 51{,}32153'' \\[8pt]
\hline
\alpha' = 36° 40' 50{,}4792'' & & \sigma = 11° 51' 42{,}64306'' \\
\alpha = 28° 58' 58{,}8082'' & & \sigma = 42702{,}64306''
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Nach diesem behandeln wir die verschiedenen Fälle unserer Aufgabe einzeln:

I. Gegeben φ, φ', λ. Gesucht s, α, α'.

1a. Auflösung durch die Gauss'schen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie.

Wenn man die *Gauss*schen bzw. *Neper*schen Gleichungen (12) — (15) § 29. S. 195—196, auf unseren Fall anwendet, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2} &= \cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\\
\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2} &= \sin\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}\\
\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\\
\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Wenn man die erste und zweite, dann die dritte und vierte dieser Gleichungen dividiert, und zur Abkürzung für das folgende, die Zeichen Z und N, Z' und N' für die Zähler und Nenner der entstehenden Brüche einführt, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\tang\frac{\alpha'+\alpha}{2} &= \frac{\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}} = \frac{Z}{N}\\
\sin\frac{\sigma}{2} &= \frac{Z}{\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}} = \frac{N}{\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\tang\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \frac{\sin\frac{\varphi'+\varphi}{2}\sin\frac{\lambda}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda}{2}} = \frac{Z'}{N'}\\
\cos\frac{\sigma}{2} &= \frac{Z'}{\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir nach (1):

$$\varphi = 49^\circ\,30'\,0'' \qquad \varphi' = 50^\circ\,30'\,0'' \qquad \lambda = 1^\circ\;0'\,0'' \qquad (6)$$

also $\frac{\varphi'+\varphi}{2} = 50^\circ\;0'\,0''$, $\frac{\varphi'-\varphi}{2} = 0^\circ\,30'\,0''$, $\frac{\lambda}{2} = 0^\circ\,30'\,0''$

Die logarithmische Rechnung giebt:

$\log Z$	7.748 9093·6	$\log Z'$	7.825 0958·3
$\log N$	7.940 8253·2	$\log N'$	9.999 9669·3
$\log\tang\frac{\alpha'+\alpha}{2}$	9.808 0840·4	$\log\tang\frac{\alpha'-\alpha}{2}$	7.825 1289·0
$\log\sin\frac{\sigma}{2}$	8.015 9282·7	$\log\cos\frac{\sigma}{2}$	9.999 9766·3

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\alpha'+\alpha}{2} = 32^\circ\,44'\;\;0{,}238'' & \frac{\sigma}{2} = 0^\circ\,35'\,39{,}741'' \\ \frac{\alpha'-\alpha}{2} = \;\;0^\circ\,22'\,58{,}947'' & \sigma\; = 1^\circ\,11'\,19{,}482'' \\ \hline \alpha' = 33^\circ\;\;6'\,59{,}185'' & \\ \alpha\; = 32^\circ\,21'\;\;1{,}291'' & \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Von den beiden Bestimmungen für $\frac{\sigma}{2}$, nämlich aus $sin\,\frac{\sigma}{2}$ und aus $cos\,\frac{\sigma}{2}$. ist in diesem Falle, da σ sehr klein ist, nur die erste scharf, während die zweite, aus *cos*, nur als summarische Probe benützt werden kann.

Ib. *Einseln-Formeln für* σ, α und α'.

Zur Bestimmung von σ aus φ, φ' und λ, kann man die Cosinus-Formel ((7) § 29. S. 195) anwenden; dieselbe giebt:

$$cos\,\sigma = sin\,\varphi\; sin\,\varphi' + cos\,\varphi\; cos\,\varphi'\; cos\,\lambda \qquad (8)$$

Da in unseren Fällen immer σ klein ist, kann man nicht geradezu nach $cos\,\sigma$ rechnen; indessen kann man die vorstehende Formel leicht umformen, indem man setzt:

$$cos\,\sigma = 1 - 2\,sin^2\frac{\sigma}{2} \quad \text{und} \quad cos\,\lambda = 1 - 2\,\frac{sin^2\lambda}{2}$$

Damit findet man leicht:

$$sin\,\frac{\sigma}{2} = \sqrt{sin^2\frac{\varphi'-\varphi}{2} + cos\,\varphi\; cos\,\varphi'\; sin^2\frac{\lambda}{2}} \qquad (9)$$

Man rechnet dann mit einem Hilfswinkel μ ähnlich wie bei der Bestimmung einer Hypotenuse aus zwei Katheten:

$$tang\,\mu = \frac{sin\,\frac{\varphi'-\varphi}{2}}{sin\,\frac{\lambda}{2}\sqrt{cos\,\varphi\; cos\,\varphi'}}$$

$$sin\,\frac{\sigma}{2} = \frac{sin\,\frac{\varphi'-\varphi}{2}}{sin\,\mu} \quad \text{oder} \quad = \frac{sin\,\frac{\lambda}{2}\sqrt{cos\,\varphi\; cos\,\varphi'}}{cos\,\mu}$$

Unser kleines Normal-Beispiel (1) S. 294 giebt:

			(10)
$log\,sin\,\frac{\varphi'-\varphi}{2} =$	7.940 8418·6		
$log\,sin\,\frac{\lambda}{2}\sqrt{\ldots}$	7.748 8693·3		
$log\,tang\,\mu$	0.191 9725·3	$\mu = 57^\circ\,16'\,11{,}981''$	
$log\,sin\,\frac{\sigma}{2}$	8.015 9282·7	$\frac{\sigma}{2} = 0^\circ\,35'\,39{,}741''$	
		$\sigma = 1^\circ\,11'\,19{,}482''$	

Auch für die Azimute α und α' giebt die sphärische Trigonometrie unmittelbare Lösungen, nämlich nach (9) § 29. S. 195:

$$cotg\,\alpha = \frac{tang\,\varphi'\,cos\,\varphi}{sin\,\lambda} - sin\,\varphi\,cotg\,\lambda \tag{11}$$

$$cotg\,(\alpha' \pm 180^\circ) = \frac{tang\,\varphi\,cos\,\varphi'}{sin\,\lambda} - sin\,\varphi'\,cotg\,\lambda \tag{12}$$

Unser grosses Normal-Beispiel (2) giebt hiefür folgende Anwendung:

$\varphi = 45^\circ\,0'$, $\varphi' = 55^\circ\,0'$, $\lambda = 10^\circ\,0'$
$cotg\,\alpha = 5{,}815\,512\,455 - 4{,}010\,201\,831 = 1{,}805\,310\,624$
$log\,cotg\,\alpha = 0.256\,5519{\cdot}4$ $\alpha = 28^\circ\,58'\,58{,}808''$ (13)

Dagegen giebt das kleine Normal-Beispiel (1):

$\varphi = 49^\circ\,30'$, $\varphi' = 50^\circ\,30'$, $\lambda = 1^\circ\,0'$
$cotg\,\alpha = 45{,}142\,3983 - 43{,}563\,6286 = 1{,}578\,7697$
$log\,cotg\,\alpha = 0.198\,3187{\cdot}8$ $\alpha = 32^\circ\,21'\,1{,}290''$ (13 a)

Wenn φ und φ' nahezu gleich sind, und λ klein ist, so geben die Formeln (11) und (12) keine scharfen Bestimmungen, weil dabei eine Differenz zweier nicht sehr verschiedener Werte auszurechnen ist, wie (13 a) mit 45,14 ... — 43,56 ... deutlich zeigt.

Man kann noch manche andere Auflösungs-Formen für die vorgelegte erste Aufgabe I. finden, wie sich aus der Analogie mit der zweiten Aufgabe II. ergeben wird, zu der wir nun übergehen:

II. Gegeben φ, σ, α. Gesucht φ', λ, α'.

IIa. Auflösung durch die Gaussschen Gleichungen.

Die Anwendung der *Gauss*schen bzw. *Neper*schen Gleichungen ((13) — (15) § 29. S. 196) auf unseren Fall giebt:

$$\left.\begin{aligned} tang\,\frac{\alpha'+\lambda}{2} &= \frac{sin\,\dfrac{90^\circ-\varphi+\sigma}{2}\,sin\,\dfrac{\alpha}{2}}{sin\,\dfrac{90^\circ-\varphi-\sigma}{2}\,cos\,\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{Z}{N} \\ sin\,\frac{90^\circ-\varphi'}{2} &= \frac{Z}{sin\,\dfrac{\alpha'+\lambda}{2}} = \frac{N}{cos\,\dfrac{\alpha'+\lambda}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} tang\,\frac{\alpha'-\lambda}{2} &= \frac{cos\,\dfrac{90^\circ-\varphi+\sigma}{2}\,sin\,\dfrac{\alpha}{2}}{cos\,\dfrac{90^\circ-\varphi-\sigma}{2}\,cos\,\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{Z'}{N'} \\ cos\,\frac{90^\circ-\varphi'}{2} &= \frac{Z'}{sin\,\dfrac{\alpha'-\lambda}{2}} = \frac{N'}{cos\,\dfrac{\alpha'-\lambda}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Bei unserem kleinen Normal-Beispiel (1) ist:

Gegeben: $\varphi = 49^\circ\,30'\,0''$ $\sigma = 1^\circ\,11'\,19{,}482''$ $\alpha = 32^\circ\,21'\,1{,}291''$

Man hat also zur Anwendung von (14) und (15):

$$\frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2} = 20^\circ\, 50'\, 39{,}741'' \qquad \frac{\alpha}{2} = 16^\circ\, 10'\, 30{,}646''$$

$$\frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2} = 19^\circ\, 39'\, 20{,}259''$$

$\log Z$	8.996 1858·3	$\log Z'$	9.415 5449·8
$\log N$	9.509 2708·3	$\log N'$	9.956 3857·0
$\log tang \frac{\alpha' + \lambda}{2}$	9.486 9150·0	$\log tang \frac{\alpha' - \lambda}{2}$	9.459 1592·8
$\log \sin \frac{90^\circ - \varphi'}{2}$	9.528 8096·8	$\log \cos \frac{90^\circ - \varphi'}{2}$	9.973 6708·5

$$\frac{\alpha' + \lambda}{2} = 17^\circ\, 3'\, 29{,}592''$$

$$\frac{\alpha' - \lambda}{2} = 16^\circ\, 3'\, 29{,}592''$$

$$\alpha' = 33^\circ\, 6'\, 59{,}184''$$

$$\lambda = 1^\circ\, 0'\, 0{,}000''$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= 19^\circ\, 45'\, 0{,}000'' \\ 90^\circ - \varphi' &= 39^\circ\, 30'\, 0{,}000'' \\ \varphi' &= 50^\circ\, 30'\, 0{,}000'' \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

IIb. Einzel-Formeln für φ', α' und λ.

Zur Bestimmung von φ' aus φ, σ und α hat man die Cosinus-Formel (7) S. 195, und für α' und λ hat man je eine der Cotangenten-Formeln (9) S. 195 anzuwenden. Man erhält auf diesem Wege folgende drei Auflösungen:

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \cos \sigma + \cos \varphi \sin \sigma \cos \alpha \tag{16}$$

$$cotg\, \alpha' = \frac{\cos \sigma \cos \alpha - \sin \sigma\, tang\, \varphi}{\sin \alpha} \tag{17}$$

$$cotg\, \lambda = \frac{cotg\, \sigma \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha}{\sin \alpha} \tag{18}$$

Zur Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel haben wir:

Gegeben $\varphi = 49^\circ\, 30'\, 0''$, $\sigma = 1^\circ\, 11'\, 19{,}482''$, $\alpha = 32^\circ\, 21'\, 1{,}291''$

Die Ausrechnung nach (16), (17) und (18) giebt:

$$\sin \varphi' = 0{,}760\,2423 + 0{,}011\,3823 = 0{,}771\,6246$$

$$\log \sin \varphi' = 9.887\,4061 \qquad \varphi' = 50^\circ\, 30'\, 0{,}00''$$

$$cotg\, \alpha' = 1{,}578\,4299 - 0{,}045\,3947 = 1{,}533\,0352$$

$$\log cotg\, \alpha' = 0.185\,5521 \qquad \alpha' = 33^\circ\, 6'\, 9{,}19''$$

$$cotg\, \lambda = \frac{31{,}297\,9570 - 0{,}642\,3847}{\sin \alpha} = \frac{30{,}655\,5723}{\sin \alpha}$$

$$\log cotg\, \lambda = 1.758\,0785 \qquad \lambda = 1^\circ\, 0'\, 0{,}00''$$

An diesen drei Auflösungs-Formeln ist nichts auszusetzen; sie geben φ' α' und λ einzeln mit gewöhnlicher Schärfe. Der von manchen Rechnern gescheute mehrfache Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen und umgekehrt, kann nötigenfalls durch Benützung von Additions- und Subtraktions-Logarithmen vermieden werden.

IIc. Rechtwinklige Projektion des Nordpols auf die Seite σ.

In Fig. 2., welche etwas anders gezogen ist als die frühere Fig. 1., aber im wesentlichen dasselbe darstellt, ist von dem Nordpol N eine Senkrechte NP_0 auf die verlängerte PP' gefällt, wodurch sowohl die Länge m dieser Senkrechten selbst, als auch die Länge PP_0 bestimmt ist, welche wir mit $90° - M$ bezeichnen wollen.

Da nun das grosse rechtwinklige Dreieck PNP_0 durch unsere gegebenen φ und α vollständig bestimmt ist, und da durch Abtragen von $PP' = \sigma$ auf PP_0 auch der Punkt P', und damit das zweite kleinere rechtwinklige Dreieck $P'NP_0$, bestimmt ist, sowie auch damit das schiefwinklige Restdreieck $PP'N$, ist nun unsere ganze Aufgabe auf die Behandlung zweier rechtwinkliger sphärischer Dreiecke zurückgeführt, weshalb wir die nötigen Formeln (die man auch rein goniometrisch aus den Formeln (16), (17), (18) herleiten könnte) sofort in der zur Rechnung nötigen Aufeinanderfolge hier hersetzen.

Fig. 2.
Hilfswinkel M und m.

Zur Bestimmung von M und m hat man:

$$tang\, M = \frac{sin\, \varphi}{cos\, \varphi\, cos\, \alpha} \tag{19}$$

$$\left. \begin{aligned} cos\, m &= \frac{sin\, \varphi}{sin\, M} \quad \text{oder} \quad cos\, m = \frac{cos\, \varphi\, cos\, \alpha}{cos\, M} \\ sin\, m &= sin\, \alpha\, cos\, \varphi \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

Nachdem so M und m bestimmt und versichert sind, hat man weiter:

$$tang\, \alpha' = \frac{tang\, m}{cos\, (M + \sigma)} \tag{21}$$

$$sin\, \varphi' = cos\, m\, sin\, (M + \sigma) \qquad tang\, \varphi' = tang\, (M + \sigma)\, cos\, \alpha' \tag{22}$$

$$sin\, \lambda = \frac{sin\, \sigma\, sin\, \alpha'}{cos\, \varphi} = \frac{sin\, \sigma\, sin\, \alpha}{cos\, \varphi'} \tag{23}$$

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel mit den gegebenen Werten φ, α und σ nach (1), führt auf die Hilfswinkel:

$$M = 54°\, 11'\, 19{,}61'' \qquad m = 20°\, 20'\, 7{,}75''$$

womit die Werte φ', α' und λ sich wie früher ergeben.

IId. Rechtwinklige Coordinaten x, y für den Punkt P'.

In Fig. 3. S. 300 ist der Meridian PN gerade gezogen, und durch $P'P_1$ eine Senkrechte angedeutet, welche von P' auf den Meridian von P gefällt wurde, so dass die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten $PP_1 = x$ und $P_1 P' = y$ zur Anschauung kommen. Diese Werte x und y sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$tang\, x = tang\, \sigma\, cos\, \alpha \tag{24}$$

und

$$sin\, y = sin\, \sigma\, sin\, \alpha \quad , \quad tang\, y = sin\, x\, tang\, \alpha \tag{25}$$

Mit x hat man auch $\varphi + x$ und $90° - (\varphi + x)$ die Kathete NP_1 des grossen rechtwinkligen Dreiecks $NP_1 P'$, welches φ' und λ giebt, nämlich:

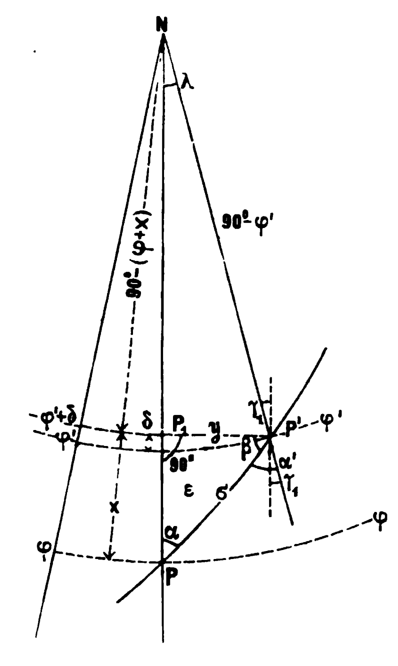


Fig. 3.
Rechtwinklige Coordinaten
$PP_1 = x$, $P_1P' = y$.

$$tang\,\lambda = \frac{tang\,y}{cos\,(\varphi - \sigma)} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} sin\,\varphi' &= sin\,(\varphi + x)\,cos\,y \\ \text{und} \quad tang\,\varphi' &= tang\,(\varphi + x)\,cos\,\lambda \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Endlich nach dem Sinussatze:

$$sin\,\alpha' = \frac{sin\,\alpha\,cos\,\varphi}{cos\,\varphi'} \tag{28}$$

Diese einfache und naheliegende Auflösung hat *Gauss* (in Art. 16. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abteilung, Göttingen 1843") noch verfeinert, erstens dadurch, dass der kleine Breiten-Unterschied δ zwischen den Punkten P_1 und P' für sich dargestellt wurde, und zweitens dadurch, dass auch die Meridian-Konvergenz γ_1 zwischen P_1 und P' und ausserdem der sphärische Excess ε des rechtwinkligen Dreiecks PP_1P' beigezogen wurde.

Denkt man sich diese drei kleinen Werte δ, γ_1 und ε bestimmt, so ist für die Breite:

$$(90° - \varphi') - (90° - (\varphi + x)) = \delta$$

$$\varphi' = \varphi + x - \delta \tag{29}$$

ferner für die Azimute:

$$\alpha' - \gamma_1 + \beta = 90° \quad \text{und} \quad \alpha + \beta = 90° + \varepsilon$$

woraus:

$$\alpha' - \alpha = \gamma_1 - \varepsilon \tag{30}$$

Um den sphärischen Excess ε zu bestimmen, haben wir die schon bei (4) § 44. S. 249 benützte Entwicklung:

$$cotg\,\alpha\,cotg\,\beta = cos\,\sigma = 1 - 2\,sin^2\frac{\sigma}{2}$$

$$cos\,\alpha\,cos\,\beta = sin\,\alpha\,sin\,\beta - 2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin^2\frac{\sigma}{2}$$

$$cos\,(\alpha + \beta) = -sin\,\varepsilon = -2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin^2\frac{\sigma}{2}$$

$$sin\,\varepsilon = 2\,sin\,\alpha\,\frac{sin\,x}{sin\,\sigma}\,sin^2\frac{\sigma}{2}$$

$$sin\,\varepsilon = tang\,\frac{\sigma}{2}\,sin\,x\,sin\,\alpha \tag{31}$$

Für γ_1 hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck NP_1P':

$$tang\,(90° - \gamma_1) = \frac{tang\,(90° - (\varphi + x))}{sin\,y}$$

$$tang\,\gamma_1 = tang\,(\varphi + x)\,sin\,y = tang\,(\varphi + x)\,sin\,\sigma\,sin\,\alpha \tag{32}$$

Um auch noch δ zu bestimmen, hat man zunächst nach (29):

$$sin\,\delta = sin\,\big((\varphi + x) - \varphi'\big) = sin\,(\varphi + x)\,cos\,\varphi' - cos\,(\varphi + x)\,sin\,\varphi'$$

$$= cos\,(\varphi + x)\,cos\,\varphi'\,\big(tang\,(\varphi + x) - tang\,\varphi'\big)$$

Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck NP_1P':

$$tang\,\varphi' = tang\,(\varphi + x)\cos\lambda = tang\,(\varphi + x)\left(1 - 2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)$$

und damit wird:

$$\sin\delta = 2\sin(\varphi + x)\cos\varphi'\sin^2\frac{\lambda}{2}$$

Wenn man hier noch γ_1 nach (32) zuzieht und $\cos\varphi'\sin\lambda = \sin y$ berücksichtigt, so erhält man:

$$\sin\delta = \cos(\varphi + x)\,tang\,\frac{\lambda}{2}\,tang\,\gamma_1 \qquad (33)$$

Der Gang der Rechnung ist nun folgender:

Man bestimmt x und y sowie auch λ wie im einfachen Fall, nach (24), (25), (26), dann folgen ε und γ_1 nach (31) und (32) und δ nach (33), worauf man φ' und α' nach (29) und (30) zusammensetzen kann.

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel gestaltet sich so:

Gegeben $\varphi = 49^\circ\,30'\,0''$ $\sigma = 1^\circ\,11'\,19{,}482''$ $\alpha = 32^\circ\,21'\,1{,}291''$

Nach (24), (25), (26) findet man:

$x = 1^\circ\,0'\,15{,}420''$ $y = 0^\circ\,38'\,9{,}813''$ $\lambda = 1^\circ\,0'\,0{,}000''$

Die Formeln (31), (32), (33) liefern:

$\varepsilon = 0^\circ\,0'\,20{,}0687''$ $\gamma_1 = 0^\circ\,46'\,17{,}9616''$ $\delta = 0^\circ\,0'\,15{,}4199''$

und nun setzt man so zusammen:

$$\begin{array}{rl}
\gamma_1 = & 0^\circ\,46'\,17{,}9616'' \\
\varepsilon = & 0^\circ\;\;0'\,20{,}0687'' \\
\hline
\gamma - \varepsilon = & 0^\circ\,45'\,57{,}8929'' = \alpha' - \alpha, \\
\alpha = & 32^\circ\,21'\;\;1{,}291'' \\
\hline
\alpha' = & 33^\circ\;\;6'\,58{,}184''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
x = & 1^\circ\;\;0'\,15{,}420'' \\
\delta = & 0^\circ\;\;0'\,15{,}420'' \\
\hline
x - \delta = & 1^\circ\;\;0'\;\;0{,}000'' \\
\varphi = & 49^\circ\,30'\;\;0{,}000'' \\
\hline
\varphi' = & 50^\circ\,30'\;\;0{,}000''
\end{array}$$

Der Vorteil dieser Berechnung im Vergleich mit allen früher beschriebenen besteht darin, wenn σ selbst klein ist (was hier immer der Fall ist), dass dann auch alle andern, die Endergebnisse beeinflussenden Grössen x, y, γ_1, ε selbst *klein* sind, und daher aus *sin* oder *tang* sich sehr scharf berechnen lassen.

Man kann durch diese verfeinerten Formeln in Hinsicht auf Rechenschärfe, mit einer gewöhnlichen 7stelligen Logarithmentafel nahe dasselbe erreichen, wozu man mit den früheren Formeln nahezu 10stellige Logarithmen braucht.

§ 56. Differential-Gleichungen der sphärischen geodätischen Hauptaufgabe.

Die geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche wir im vorigen § 55. behandelt haben, erfüllen nicht alle Bedürfnisse; es ist in vielen Fällen nützlich, geschlossene Formeln in Reihen aufzulösen, und der erste Schritt hiezu ist die Aufstellung von Differential-Formeln.

Wir betrachten in Fig. 1. S. 302 das schon früher benützte sphärische Dreieck $PP'N$, jedoch nehmen wir nun an, dass die Entfernung PP' der beiden betrachteten Punkte sehr *klein* $= ds$ werde, wodurch auch alle anderen Differenzen $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$, λ

klein werden, was wir in Fig. 1. und Fig. 2. durch Differential-Zeichen $d\varphi$, $d\alpha$ u. s. w. angedeutet haben.

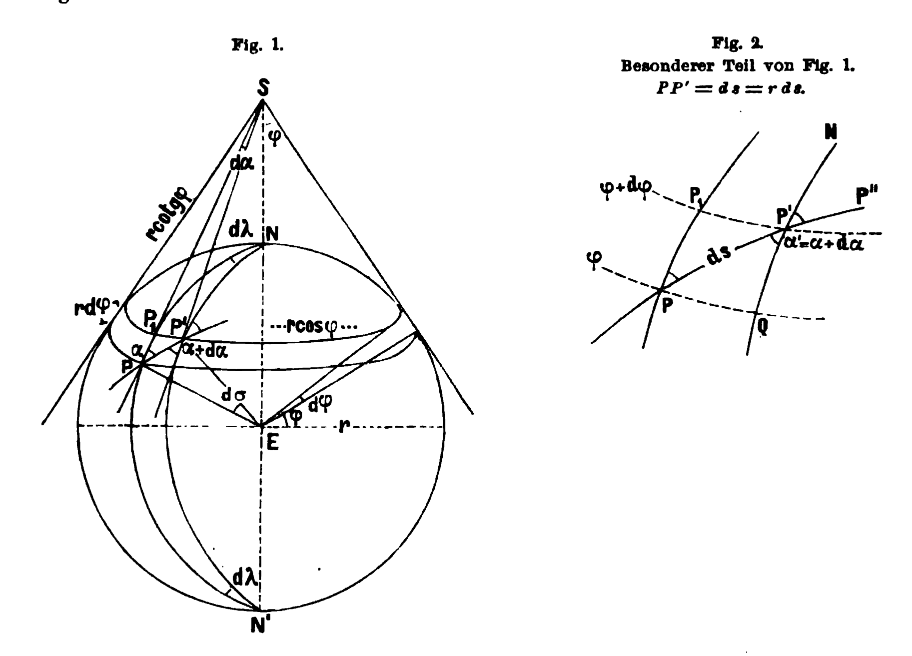


Fig. 1.

Fig. 2. Besonderer Teil von Fig. 1. $PP' = ds = r\,d\sigma$.

Wir betrachten in Fig. 1. eine Kugel mit zwei Punkten P und P', deren Entfernung $PP' = ds$ klein ist. Die Breiten dieser Punkte seien bzw. φ und $\varphi + d\varphi$, so dass die kleine Breiten-Differenz $d\varphi$ zwischen den Parallelkreisen von P und P' erscheint. Durch die beiden Meridiane NP und NP' kommt auch der Längenunterschied $d\lambda$ zum Ausdruck und werden die Azimute des Bogens ds in P und in P' bestimmt, diese Azimute seien bzw. α und $\alpha + d\alpha$.

Man kann nun auf die beiden Punkte P und P' mit ihren Breiten φ, $\varphi + d\varphi$, Azimuten α, $\alpha + d\alpha$ und ihrer Entfernung $d\sigma$ und dem Längenunterschied $d\lambda$ die allgemeinen *Gauss*schen Formeln (3) § 55. S. 295 anwenden; und wenn man dabei, im Sinne der Differential-Rechnung, $\sin\frac{d\sigma}{2} = \frac{d\sigma}{2}$, $\cos\frac{d\sigma}{2} = 1$ setzt u. s. w., so geben die drei ersten jener Gleichungen (3) § 55. S. 295 folgendes:

$$d\sigma \sin\alpha = d\lambda \cos\varphi \tag{1}$$

$$d\sigma \cos\alpha = d\varphi \tag{2}$$

$$d\alpha = d\lambda \sin\varphi \tag{3}$$

Dieses sind die sehr wichtigtigen Differential-Gleichungen der sphärisch-geodätischen Hauptaufgabe, wozu zunächst bemerkt werden kann, dass man diese Gleichungen auch auf manchem anderen Wege finden kann (wie wir gelegentlich in unserem II. Bande S. 160—161 gezeigt haben, wo es sich darum handelte, ähnliche Gleichungen für die Theorie der Theodolit-Axenfehler rasch zu bilden).

Man kann die Gleichungen (1), (2), (3) auch geometrisch in Fig. 1. nach-

weisen, wozu zuerst das kleine, als rechtwinklig eben zu behandelnde Dreieck $P_1 P P'$, welches in Fig. 2. besonders herausgezeichnet ist, dient. Dasselbe giebt mit $r d\sigma = ds$:

$$ds \sin \alpha = P_1 P' \tag{1a}$$
$$ds \cos \alpha = P P_1 \tag{2a}$$

Diese Gleichungen sind entsprechend (1) und (2), wozu für (2a) nur einzusehen ist, dass PP_1 ein Meridianbogen $= r d\varphi$ für den Halbmesser r oder kurz $= d\varphi$ für den Halbmesser 1 ist. Sodann für (1a) hat man den Parallelkreis-Halbmesser $p = r \cos \varphi$ zu betrachten (bzw. $= r \cos(\varphi + d\varphi)$), welcher mit $r = 1$ und für den Längen-Unterschied $d\lambda$ den Parallelkreis-Bogen $P_1 P' = d\lambda \cos \varphi$ giebt.

Während die zwei ersten Gleichungen (1) und (2) sich geradezu aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck $PP_1 P'$ geometrisch herleiten lassen, ist zur geometrischen Begründung der dritten Gleichung (3) die Betrachtung der Meridian-Tangenten PS und $P'S$ nötig. Insofern PP_1 unendlich klein ist, schneiden sich diese beiden Tangenten in einem Punkte S der Erdaxe, und bilden dort den Winkel $d\alpha$, wie aus dem geradlinigen Dreiecke SPP' folgt.

In dem langen gleichschenkligen Dreiecke $P_1 P' S$ hat man

$$d\alpha = \frac{P_1 P'}{P_1 S}$$

Hier ist, wie schon erwähnt, der Parallelbogen $P_1 P' = r \cos \varphi \, d\lambda$ und die Tangentenlänge $P_1 S$ findet sich $= r \operatorname{cotg} \varphi$; es ist also:

$$d\alpha = \frac{r \cos \varphi \, d\lambda}{r \operatorname{cotg} \varphi} = d\lambda \sin \varphi \tag{3a}$$

womit die Gleichung (3) begründet ist.

Dieses giebt auch Gelegenheit, die Ausdrucksweise „Meridian-Konvergenz" zu begründen. Die Winkel-Differenz $d\alpha$ erscheint bei S zunächst als Konvergenz der Meridian-*Tangenten*, woraus in leicht begreiflicher sprachlicher Vereinfachung sich die Benennung „Konvergenz der Meridiane" oder kurz „Meridian-Konvergenz" gebildet hat.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ unserer bisherigen Betrachtung ist die Differenz der Azimute des Grosskreis-Bogens PP' in P und in P', d. h. in der besonders herausgezeichneten Fig. 2. ist:

$$d\alpha = \alpha' - \alpha \tag{4}$$

wobei α' sowohl $= PP'Q$ als auch $= NP'P''$ ist, indem die *beiden* mit α' bezeichneten Schnittwinkel in P' für einen Grosskreis-Bogen $PP'P''$ gleich sind.

Nachdem wir so die wichtigen Differential-Grundformeln nach allen Beziehungen erörtert haben, wollen wir auch noch eine praktische Anwendung derselben machen.

Wenn man die *Differential*-Formeln auf endliche *Differenzen* anwendet, und dann unter φ die *Mittel*breite versteht, so hat man:

$$\sigma \sin \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \lambda \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \tag{5}$$

$$\sigma \cos \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \varphi' - \varphi \tag{6}$$

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \tag{7}$$

Aus (5) und (6) findet man:

$$tang\,\frac{\alpha'+\alpha}{2}=\frac{\lambda\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\varphi'-\varphi} \tag{8}$$

$$\sigma=\frac{\lambda\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}} \quad \text{oder} \quad =\frac{\varphi'-\varphi}{\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2}} \tag{9}$$

Man kann auch unmittelbar σ durch Quadrieren und Addieren von (5) und (6) finden:

$$\sigma=\sqrt{(\varphi'-\varphi)^2+\left(\lambda\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}\right)^2} \tag{10}$$

Nachdem $\alpha'+\alpha$ aus (8) und $(\alpha'-\alpha)$ aus (7) berechnet sind, hat man auch α' und α.

Wir wollen diese Näherungs-Formeln auf unser kleines sphärisches Normal-Beispiel anwenden:

Gegeben $\varphi=49°\,30'$ $\varphi'=50°\,30'$ $\lambda=1°\,0'=3600''$

$$\frac{\varphi'+\varphi}{2}=50°\,0' \qquad \varphi'-\varphi=1°\,0'=3600''.$$

Aus (8) findet man: $$\frac{\alpha'+\alpha}{2}=32°\,43'\,56{,}67'' \tag{11}$$

Aus (7) findet man: $$\frac{\alpha'-\alpha}{2}=0°\,22'\,58{,}88'' \tag{12}$$

$$\alpha'=33°\,6'\,55{,}55'' \tag{13}$$

$$\alpha=32°\,20'\,57{,}79'' \tag{14}$$

Aus (10) findet man: $$\sigma=4279{,}57''=1°\,11'\,19{,}57'' \tag{15}$$

Die im vorigen § 55. mehrfach berechneten genaueren Werte sind:

$$\alpha'=33°\,6'\,59{,}19'' \quad , \quad \alpha=32°\,21'\,1{,}29'' \quad , \quad \sigma=1°\,11'\,19{,}48'' \tag{16}$$

Bei σ beträgt der Fehler des Näherungswertes (15) nur 0,09″. Die bequemen Näherungsformeln (5)—(10) sind zu manchen Berechnungen unmittelbar zu brauchen, z. B. in der Kartographie und überhaupt in Fällen, wo es nicht auf äusserste Schärfe ankommt.

Indessen werden wir nun zur Aufstellung genauerer Formeln dieser Art übergehen.

§ 57. Reihen-Entwicklungen mit der Mittelbreite.

Wir nehmen die *Gauss*schen Gleichungen (3) § 55. S. 295 nochmals vor; wir wollen jedoch die Bezeichnungen nun etwas anders wählen, nämlich nach Andeutung von Fig. 1. S. 305:

Breiten: φ_1 und φ_2 , $\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}=\varphi$, $\varphi_2-\varphi_1=\beta$ (1)

Azimute: α_1 und α_2 , $\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}=\alpha$, $\alpha_2-\alpha_1=\gamma$ (2)

Längen-Unterschied: λ (3)

Verbindungs-Bogen: σ (4)

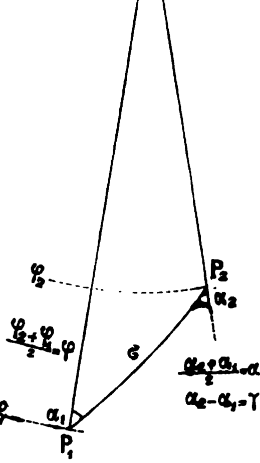
Damit werden die Gleichungen (3) § 55. S. 295:

$$\sin\frac{\sigma}{2}\sin\alpha = \sin\frac{\lambda}{2}\cos\varphi \qquad (5)$$

$$\sin\frac{\sigma}{2}\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\lambda}{2} \qquad (6)$$

$$\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\lambda}{2}\sin\varphi \qquad (7)$$

$$\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\beta}{2} \qquad (8)$$



Wir nehmen zuerst (5) und (6), welche entwickelt geben:

$$\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma^3}{48}\right)\sin\alpha = \left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^3}{48}\right)\cos\varphi$$

$$\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma^3}{48}\right)\cos\alpha = \left(\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^3}{48}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{8}\right)$$

Kürzer geschrieben:

$$\sigma\sin\alpha\left(1-\frac{\sigma^2}{24}\right) = \lambda\cos\varphi\left(1-\frac{\lambda^2}{24}\right) \qquad (9)$$

$$\sigma\cos\alpha\left(1-\frac{\sigma^2}{24}\right) = \beta\left(1-\frac{\beta^2}{24}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{8}\right) \qquad (10)$$

Hier kann man in den Korrektionsgliedern als erste Näherung setzen:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2\cos^2\varphi \qquad (11)$$

Wenn man dieses in (9) und (10) links einsetzt, und dann nach $\sigma\sin\alpha$ und $\sigma\cos\alpha$ auflöst und ordnet, so findet man:

$$\sigma\sin\alpha = \lambda\cos\varphi\left(1+\frac{\beta^2}{24}-\frac{\lambda^2\sin^2\varphi}{24}\right) \qquad (12)$$

$$\sigma\cos\alpha = \beta\left(1-\frac{\lambda^2}{8}+\frac{\lambda^2\cos^2\varphi}{24}\right) \qquad (13)$$

Durch Division dieser zwei Gleichungen findet man $\tang\alpha$, und dann σ aus jeder einzeln. Man kann jedoch auch (12) und (13) quadrieren und addieren, und damit eine unmittelbare Formel für σ^2 finden, nämlich:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2\cos^2\varphi + \frac{1}{12}\left(-3\beta^2\lambda^2 + 2\beta^2\lambda^2\cos^2\varphi - \lambda^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right) \qquad (14)$$

oder

$$\sigma = \sqrt{\beta^2+\lambda^2\cos^2\varphi}\left(1-\frac{\beta^2\lambda^2}{8\sigma^2}+\frac{\beta^2\lambda^2\cos^2\varphi}{12\sigma^2}-\frac{\lambda^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{24\sigma^2}\right) \qquad (14\,a)$$

Man kann diese Formel auch leicht aus (9) §. 55. S. 296 herleiten.

Um auch die Meridian-Konvergenz zu erhalten, bilden wir zunächst aus (7) und (8) durch Division:

$$\tang\frac{\gamma}{2} = \tang\frac{\lambda}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

Dieses ebenso wie das frühere entwickelt, giebt:

$$\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma^3}{24}=\sin\varphi\,\frac{\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{\lambda^3}{24}}{1-\dfrac{\beta^2}{8}}$$

$$\gamma+\frac{\gamma^3}{12}=\sin\varphi\left(\lambda+\frac{\lambda^3}{12}\right)\left(1+\frac{\beta^2}{8}\right)$$

Erste Näherung $\gamma=\lambda\sin\varphi$, also $\gamma^3=\lambda^3\sin^3\varphi+\ldots$

$$\gamma=-\frac{\lambda^3\sin^3\varphi}{12}+\lambda\sin\varphi\left(1+\frac{\lambda^2}{12}+\frac{\beta^2}{8}\right)$$

$$\alpha'-\alpha=\gamma=\lambda\sin\varphi\left(1+\frac{\beta^2}{8}+\frac{\lambda^2}{12}\cos^2\varphi\right) \qquad (15)$$

In diesen Formeln ist überall nach analytischem Masse gerechnet, und wenn man die kleinen Winkel in Sekunden haben will, muss man alle quadratischen Glieder in den Klammern durch ϱ^2 dividieren. Dieses giebt für die drei wichtigsten Gleichungen (12), (13) und (15) die folgenden Gebrauchsformeln:

$$\sigma\sin\alpha=\lambda\cos\varphi\left(1+\frac{\beta^2}{24\,\varrho^2}-\frac{\lambda^2\sin^2\varphi}{24\,\varrho^2}\right) \qquad (16)$$

$$\sigma\cos\alpha=\beta\left(1-\frac{\lambda^2}{8\varrho^2}+\frac{\lambda^2\cos^2\varphi}{24\,\varrho^2}\right) \qquad (17)$$

$$\alpha_2-\alpha_1=\gamma=\lambda\sin\varphi\left(1+\frac{\beta^2}{8\,\varrho^2}+\frac{\lambda^2\cos^2\varphi}{12\,\varrho^2}\right) \qquad (18)$$

Durch Division von (16) und (17) findet man auch:

$$\tang\alpha=\frac{\lambda\cos\varphi}{\beta}\left(1+\frac{\beta^2}{24\,\varrho^2}+\frac{\lambda^2}{12\,\varrho^2}\right) \qquad (19)$$

Die konstanten Coëfficienten zu den vorstehenden Formeln sind:

$$\log\frac{1}{8\,\varrho^2}=8.468\,0597-20 \quad \log\frac{1}{12\,\varrho^2}=8.291\,9685-20 \quad \log\frac{1}{24\,\varrho^2}=7.990\,9385-20 \qquad (20)$$

Man kann die vorstehenden Formeln (17), (18), (19) auch logarithmisch anwenden, nämlich in dieser Form:

$$\log\sigma\sin\alpha=\log\lambda\cos\varphi+\frac{\mu}{24\,\varrho^2}\beta^2-\frac{\mu}{24\,\varrho^2}\lambda^2\sin^2\varphi \qquad (21)$$

$$\log\sigma\cos\alpha=\log\beta-\frac{\mu}{8\,\varrho^2}\lambda^2+\frac{\mu}{24\,\varrho^2}\lambda^2\cos^2\varphi \qquad (22)$$

$$\log\gamma=\log\lambda\sin\varphi+\frac{\mu}{8\,\varrho^2}\lambda^2+\frac{\mu}{12\,\varrho^2}\lambda^2\cos^2\varphi \qquad (23)$$

Man braucht dann statt (20) folgende Konstanten:

$$\log\frac{\mu}{8\,\varrho^2}=5{\cdot}105\,8441-10 \quad \log\frac{\mu}{12\,\varrho^2}=4{\cdot}929\,7528-10 \quad \log\frac{\mu}{24\,\varrho^2}=4{\cdot}628\,7228-10 \qquad (24)$$

Dabei ist in Einheiten der 7ten Logarithmen-Dezimale gerechnet, was durch 5· statt 5. u. s. w. angedeutet ist.

Wir wollen das im bisherigen beschriebene Rechen-Verfahren auf unser kleines Normalbeispiel (1) § 55. S. 294 anwenden, und zwar zuerst mit den Formeln (16), (17), (18).

Gegeben	$\varphi_1 = 49°\ 30'$	$\varphi_2 = 50°\ 30'$	$\lambda = 1°\ 0'$
also	$\varphi\ = 50°\ \ 0'$	$\beta\ = 1°\ 0' = 3600''$	$\lambda = 3600''$

Die Rechnung nach (16), (17), (18) giebt:

$$\begin{array}{rrr}
\lambda \cos\varphi = 2314{,}0352'' & \beta = 3600{,}0000'' & \lambda \sin\varphi = 2757{,}7600'' \\
+\,0{,}0294 & -\,0{,}1371 & +\,0{,}1050 \\
-\,0{,}0172 & +\,0{,}0189 & +\,0{,}0289 \\
\hline
\sigma \sin\alpha = 2314{,}0474'' & \sigma\cos\alpha = 3599{,}8818'' & \gamma = 2757{,}8939'' \\
 & & \gamma = 0°\ 45'\ 57{,}8939''
\end{array}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 32°\ 44'\ \ 0{,}2385'' \qquad \sigma = 4279{,}4819''$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \ 0°\ 22'\ 58{,}9470'' \qquad \sigma = 1°\ 11'\ 19{,}4819''$$

$$\alpha_2 = 33°\ \ 6'\ 59{,}1855''$$
$$\alpha_1 = 32°\ 21'\ \ 1{,}2915''$$

Ausserdem kann man auch die *logarithmischen* Formeln (21), (22), (23) anwenden, wobei man dasselbe, wie soeben, nur in anderer Form, bekommt, nämlich:

$\log \lambda \cos\varphi$	3.364 3700·0	$\log\beta$	3.556 3025·0	$\log\lambda\sin\varphi$	3.440 5564·7
	+ 55·1		— 165·4		+ 165·4
	— 32·3		+ 22·8		+ 45·5
$\log\sigma\sin\alpha$	3.364 3722·8	$\log\sigma\cos\alpha$	3.556 2882·4	$\log\gamma$	3.440 5775·6

Wenn man damit weiter rechnet, so bekommt man dieselben Werte α, σ, γ u. s. w. wie vorhin.

Wenn man etwa σ selbst nicht braucht, so rechnet man $\tang\alpha$ geradezu aus der Formel (19), welche in unserem Falle giebt:

$$\log \operatorname{tang}\alpha = 9.808\ 0675{\cdot}0 + 165{\cdot}4 = 9.808\ 0840{\cdot}4.$$

Dieses stimmt, wie es sein soll, mit der Differenz von $\log\sigma\sin\alpha$ und $\log\sigma\cos\alpha$.

Wir haben auch noch die Formel (14a) auf das kleine Normalbeispiel mit $\beta = 1°$, $\lambda = 1°$, $\varphi = 50°$ angewendet, und gefunden:

$$\sigma = 4279{,}5747'' - 0{,}1153'' - 0{,}0093'' + 0{,}0318'' = 4279{,}4819'' = 1°\ 11'\ 19{,}4819''$$

Man kann auch hier die Korrektionsglieder in logarithmischer Form berechnen, wie wir schon früher bei den *Soldner*schen Coordinaten (11) § 48. S. 273 gesehen haben.

Umgekehrte Anwendung der Formeln (16), (17), (18).

Man kann die Formeln (16), (17), (18) nicht bloss zur Bestimmung von σ, α_1, α_2 bei gegebenem φ_1, φ_2, λ anwenden, sondern auch umgekehrt dazu, um bei gegebenen φ_1, σ, α_1, die fehlenden φ_2, λ, α_2 zu berechnen. Allerdings geht dieses nur auf indirektem Wege, indem *Näherungs-Werte* der Unbekannten benützt und allmählich verbessert werden.

Auch sind dann einige Umformungen von (16), (17), (18) vorzunehmen; wir bilden zuerst durch Division von (16) und (18):

$$\gamma = \sigma \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2\varphi}{12\varrho^2} - \frac{\beta^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2\varphi}{24\varrho^2}\right)$$

In den Korrektionsgliedern gilt aber die erste Näherung

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi$$

und damit giebt das vorstehende:

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \tan g \varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24 \varrho^2}\right) \tag{25}$$

(17) und (16) geben umgestellt:

$$\beta = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{\lambda^2}{8 \varrho^2} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24 \varrho^2}\right) \tag{26}$$

$$\lambda = \sigma \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\beta^2}{24 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24 \varrho^2}\right) \tag{27}$$

Man kann diese Gleichungen auch in logarithmischer Form anwenden, ähnlich wie (21), (22), (23), was wir hier aber nicht mehr besonders schreiben wollen.

Zu einer Zahlen-Anwendung wollen wir von unserem kleinen Normalbeispiel (1) § 55. S. 294 annehmen:

Gegeben $\varphi_1 = 49° \, 30' \, 0''$, $\sigma = 1° \, 11' \, 19{,}482''$, $\alpha_1 = 32° \, 21' \, 1{,}291''$ (28)

Für φ_2 und λ habe man von irgend wo her, z. B. von einer topographischen Karte, die Näherungswerte:

$$(\varphi_2) = 50° \, 30' \, 10'' \quad , \quad \lambda = 1° \, 0' \, 10'' = 3610'' \tag{29}$$

Nun nimmt man aus φ_1 und (φ_2) den genäherten Mittelwert $(\varphi) = 50° \, 0' \, 5''$ und rechnet mit $(\lambda) = 3610''$, erstmals genähert $(\gamma) = (\lambda) \sin (\varphi) = 2765{,}48''$ $= 0° \, 46' \, 5{,}48''$; davon die Hälfte zu α_1 nach (28) addiert, giebt die erste Näherung für α:

$$(\alpha) = 32° \, 44' \, 4''.$$

Nun rechnet man mit $(\varphi) = 50° \, 0' \, 5''$ und $(\alpha) = 32° \, 44' \, 4''$ und mit dem genau gegebenen $\sigma = 4279{,}482''$ die Hauptglieder der Formeln (25), (26), (27) aus, und erhält:

$$(\gamma) = 2757{,}93'' \quad (\beta) = 3599{,}76'' \quad (\lambda) = 3600{,}14'' \tag{30}$$
$$= 0° \, 45' \, 57{,}93''$$

Mit diesem (γ) bildet man ein neues

$$(\alpha) = \alpha_1 + \frac{(\gamma)}{2} = 32° \, 44' \, 0{,}25'' \tag{31}$$

Nun sind die Näherungen (β) und (λ) in (30) jedenfalls vollauf genügend zur Berechnung der *Korrektions-Glieder* in (25), (26), (27), und für die Haupt-Glieder hat man ausser dem gegebenen σ die bereits sehr gute Näherung (31), weshalb man die Ausrechnung nach (25), (26), (27) bereits fast endgültig machen kann. Wenn hiebei γ und β nicht völlig übereinstimmend erhalten werden mit den in α und φ steckenden beiden Hauptgliedern $\sigma \sin \alpha \tan g \varphi$ und $\sigma \cos \alpha$ benützten Werten γ und β, so muss man die Rechnung mit verbesserten α und φ so lange wiederholen, bis völlige Übereinstimmung stattfindet.

Andere Form der Korrektions-Glieder.

Da in den Haupt-Gliedern nur α und φ, aber nicht λ vorkommt, kann man die allmähliche Verbesserung der Näherungswerte auf diese zwei Elemente, bzw. auf γ und β, beschränken; allerdings bei der *ersten* Näherung wird man λ nicht entbehren können, weil eine erste Näherung für γ wohl kaum anders als durch $\lambda \sin \varphi$

zu erhalten sein wird; hat man aber einmal eine solche erste Näherung für γ, so führt man diese auch möglichst unmittelbar in die Korrektions-Glieder ein. Dieses geschieht durch die Näherungs-Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad , \quad \gamma^2 = \lambda^2 \sin^2 \varphi \\ \text{also auch} \qquad \sigma^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \end{array}\right\} \tag{32}$$

Damit schreibt man die Gleichungen (26) und (25) für unseren neuen Zweck so:

$$\beta = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{\gamma^2}{24\,\varrho^2} + \frac{\lambda^2}{12\,\varrho^2}\right) \tag{33}$$

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12\,\varrho^2} + \frac{\gamma^2}{24\,\varrho^2}\right) \tag{34}$$

oder auch in logarithmischer Form, ähnlich wie (21), (22), (23).

Diese Gleichungen (33) und (34) geben nun eine indirekte Auflösung für φ_2 und α_2 bzw. für β und γ, ähnlich wie dieses schon bei (25), (26), (27) gezeigt wurde; die dritte Grösse λ kommt bei (33) und (34) nur in einem Korrektions-Gliede vor; und wird, nachdem β und γ gefunden sind, endgültig wieder durch die frühere Gleichung (27) bestimmt.

Das in vorstehendem beschriebene indirekte Berechnungs-Verfahren ist sehr genau, dasselbe ist auch (gegen erstes Vermuten) sehr bequem.

Gauss selbst sagt hierüber in Art. 20. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie zweite Abhandlung: „Die Bequemlichkeit dieses Verfahrens wird allerdings erst dann in ihrer vollen Grösse fühlbar, wenn man sich die Hilfen des kleinen Mechanismus bei Handhabung derartiger Methoden zu eigen gemacht hat. Ich begnüge mich, hier nur anzudeuten, dass, was wie eine mehrfache Rechnung erscheint, nicht in der Form von mehreren getrennten Rechnungen sondern wie eine einzige geschrieben werden soll, indem man bei jeder neuen Überarbeitung nur die letzten Ziffern ergänzt oder verbessert. Jedenfalls braucht man immer nur die letzte Rechnung aufzubewahren, und gerade darin besteht ein grosser Vorteil, zumal bei Messungen von bedeutendem Umfang, dass man dann den ganzen wesentlichen Kern der Berechnung für alle Dreiecksseiten im möglichst kleinen Raume und in der übersichtlichsten zu beliebiger Prüfung der Richtigkeit geeigneten Form besitzt."

Was die Erlangung der ersten Näherungen für β und λ betrifft, so sind dieselben in den meisten Fällen *ohnehin* für andere Zwecke nötig. Man kann dieselben oft aus den Übersichtsnetzen der Triangulierungen, aus topographischen Karten u. s. w. entnehmen; der erste Näherungswert der Meridian-Konvergenz γ wird $= \lambda \sin \varphi$ berechnet. Sollte aber auch wegen mangelhafter Näherungswerte die Rechnung mehrfach wiederholt werden müssen, so betrifft das nur die 5 Logarithmen $\log \cos \alpha$, $\log \sin \alpha$, $\log \operatorname{tang} \varphi$, $\log \beta$ und $\log \gamma$. Man schreibt in einem autographiert vorgedruckten Schema die erste Rechnung in Blei und die zweite Rechnung auf derselben Stelle mit Tinte; und damit reicht man im allgemeinen aus. Man kann auch das mehrmalige Aufschlagen in der Logarithmen-Tafel ersparen, wenn man das erstemal die zur Berechnung der Proportionalteile nötigen Tafel-Differenzen notiert.

§ 58. Weiter-Entwicklung bis zur 5. Ordnung.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 305.)

Man kann die vorstehenden Entwicklungen, welche bis zur 3. Ordnung, d. h. bis zu Gliedern β^3, λ^3 u. s. w. gehen, noch um eine Stufe weiter, d. h. bis β^5, λ^5 u. s. w. treiben. Allerdings hat das keinen unmittelbar praktischen Zweck, denn die Formeln werden dadurch so umständlich, dass man vorziehen müsste, nach den strengen geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie zu rechnen; indessen bietet die Entwicklung der Glieder 5. Ordnung das beste Mittel zur Gewinnung eines Urteils über die Grenzen der Anwendung der abgekürzten Formeln, und diese sphärischen

Glieder 5. Ordnung werden auch später bei der analogen sphäroidischen Aufgabe von Bedeutung sein.

Wir nehmen nun von den strengen *Gauss*schen Gleichungen (5) — (8) § 57. S. 305 nochmals zunächst die zwei ersten vor:

$$\sin\frac{\sigma}{2}\sin\alpha = \sin\frac{\lambda}{2}\cos\varphi \tag{1}$$

$$\sin\frac{\sigma}{2}\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

Diese entwickeln wir nun bis zur 5. Ordnung:

$$\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma^3}{48}+\frac{\sigma^5}{3840}\right)\sin\alpha = \left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^3}{48}+\frac{\lambda^5}{3840}\right)\cos\varphi \tag{3}$$

$$\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma^3}{48}+\frac{\sigma^5}{3840}\right)\cos\alpha = \left(\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^3}{48}+\frac{\beta^5}{3840}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{8}+\frac{\lambda^4}{384}\right) \tag{4}$$

Um diese Gleichungen nach $\sigma\sin\alpha$ und $\sigma\cos\alpha$ aufzulösen, denken wir uns links abgesondert:

$$\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{\sigma^2}{24}+\frac{\sigma^4}{1920}\right) = 1-x, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{\sigma^2}{24}-\frac{\sigma^4}{1920}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2 = 1+\frac{\sigma^2}{24}+\frac{7\sigma^4}{5760} \tag{5}$$

Hier ist nach (14) § 57. S. 305:

$$\sigma^2 = \beta^2+\lambda^2\cos^2\varphi-\frac{\beta^2\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{12}+\frac{\beta^2\lambda^2}{6}\cos^2\varphi \tag{6}$$

also $$\sigma^4 = \beta^4+\lambda^4\cos^4\varphi+2\beta^2\lambda^2\cos^2\varphi \tag{7}$$

Wenn man diese (6) und (7) in (5) einsetzt, und damit die rechten Seiten von (3) und (4) multipliziert, so erhält man die gewünschten Ausdrücke für $\sigma\sin\alpha$ und $\sigma\cos\alpha$. Ebenso kann man auch die Reihe für die Meridian-Konvergenz γ finden, und durch $\sigma^2\sin^2\alpha+\sigma^2\cos^2\alpha$ hat man auch eine Reihe für σ^2 unmittelbar.

Da der Weg aller dieser Entwicklungen genügend gezeigt ist, schreiben wir sofort die Ergebnisse, und zwar zunächst:

$$\sigma\sin\alpha = \lambda\cos\varphi\left\{1+\frac{1}{24}(\beta^2-\lambda^2+\lambda^2\cos^2\varphi)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5760}(7\beta^4-70\beta^2\lambda^2+3\lambda^4+54\beta^2\lambda^2\cos^2\varphi+7\lambda^4\cos^4\varphi-10\lambda^4\cos^2\varphi-20\lambda^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\right\} \tag{8}$$

Ehe wir auch die Formeln für $\sigma\cos\alpha$ u. s. w. anschreiben, wollen wir eine bestimmte Ordnung der Glieder einführen und zur Abkürzung zwei neue Zeichen schreiben. Die Faktoren $\cos^2\varphi$ und $\sin^2\varphi$ kann man jedenfalls alle in $\cos^2\varphi$ ausdrücken, und da dieselben immer in Verbindung mit λ^2 auftreten, stellen wir überall gleiche Potenzen von λ^2 und von $\cos^2\varphi$ hervor, indem z. B. gesetzt wird:

$$\lambda^4\cos^2\varphi = \lambda^4\cos^4\varphi\,(1+\tang^2\varphi) \tag{9}$$

Der Parallel-Kreisbogen $\lambda\cos\varphi$ werde besonders bezeichnet, indem wir setzen:

$$\lambda\cos\varphi = p \tag{10}$$

und ferner:

$$\tang\varphi = t \tag{11}$$

Damit bekommen wir eine neue Schreibung der ersten Formel (8), und fügen sofort auch die übrigen Formeln dieser Art bei:

$$\sigma \sin\alpha = p\left\{1 + \frac{\beta^2 - p^2 t^2}{24} + \frac{7\beta^4 - 2\beta^2 p^2 (8 + 35 t^2) - 3 p^4 (8 t^2 - t^4)}{5760}\right\} \tag{12}$$

$$\sigma \cos\alpha = \beta\left\{1 - \frac{p^2(2 + 3t^2)}{24} + \frac{-4\beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) + p^4(-8 - 20 t^2 + 15 t^4)}{5760}\right\} \tag{13}$$

$$\gamma = \quad p\,t\left\{1 + \frac{3\beta^2 + 2p^2}{24} + \frac{75\beta^4 + 60\beta^2 p^2 (1 - 2t^2) + 24 p^4 (2 - t^2)}{5760}\right\} \tag{14}$$

$$\sigma^2 = (\beta^2 + p^2) - \frac{\beta^2 p^2 (1 + 3t^2) + p^4 t^2}{12}$$
$$- \frac{2\beta^4 p^2 (1 + 15t^2) + 2\beta^2 p^4 (1 + 10t^2 - 15t^4) + p^6 (5 + 12t^2 - 4t^4)}{2440}\Bigg\} \tag{15}$$

Die Formeln (12) und (13) für $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ wird man lieber in logarithmischer Form haben wollen, man kann daher dieselben entwickeln nach der Formel:

$$\log(1 + x) = \mu\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\log\left(1 + \frac{A^2}{24} + \frac{B^4}{5760}\right) = \mu\left(\frac{A^2}{24} + \frac{1}{2}\,\frac{B^4 - 5A^4}{2880}\right)$$

Auf diese Weise bekommt man, zugleich mit Zusetzung der nötigen ϱ, folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\log \sigma \sin \alpha &= \log p + \frac{\mu}{24\varrho^2}(\beta^2 - p^2 t^2)\\ &+ \frac{\mu}{2880\varrho^4}\Big(\beta^4 - 2\beta^2 p^2 (4 + 15t^2) - p^4 (12t^2 + t^4)\Big)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}\log \sigma \cos \alpha &= \log \beta - \frac{\mu}{24\varrho^2} p^2 (2 + 3t^2)\\ &- \frac{\mu}{2880\varrho^4}\Big(2\beta^2 p^2 (4 + 15t^2) + p^4 (14 + 40t^2 + 15t^4)\Big)\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Hiebei hat man die Konstanten für β und p in Sekunden und für Einheiten der 7. Logarithmen-Stelle:

$$\log \frac{\mu}{24\varrho^2} = 4{\cdot}628\,7228 \qquad \log \frac{\mu}{2880\varrho^4} = 1{\cdot}920\,691 - 10 \tag{18}$$

Die höheren Glieder in (16) und (17) kann man in dieser Form schreiben:

$$\Delta(\log \sigma \sin \alpha) = I\beta^4 - II\beta^2\lambda^2 - III\lambda^4 \quad \text{(5. Ordnung)} \tag{19}$$
$$\Delta(\log \sigma \cos \alpha) = \qquad - IV\beta^2\lambda^2 - V\lambda^4 \quad \text{(5. Ordnung)} \tag{20}$$

Die Coëfficienten *I*, *II* u. s. w. haben wir für verschiedene Breiten φ ausgerechnet, wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist, wobei jedoch β und λ nicht wie bei (18) in Sekunden, sondern für (19) und (20) in Graden zu nehmen sind.

φ	log I	log II	log III	log IV	log V
40°	6·1459	7·3786	6·6345	7·3786	7·3784
45°	6·1459	7·4247	6·6578	7·4247	7·3827
50°	6·1459	7·4663	6·6583	7·4663	7·3828
55°	6·1459	7·5031	6·6371	7·5031	7·3789
60°	6·1459	7·5351	6·5950	7·5351	7·3716

(21)

Ferner haben wir für *eine* Breite, $\varphi = 50°$, die Glieder ausgerechnet, indem der Reihe nach β und $\lambda = 2°, 4°, 6°, 8°, 10°$ gesetzt wurde. Die Ergebnisse dieser Ausrechnung zeigen folgende zwei Tabellen:

$\varDelta$ (log σ sin α), nach Formel (19), 5. Ordnung,
für $\varphi = 50°$.

$\beta =$	$\lambda = 2°$	$\lambda = 4°$	$\lambda = 6°$	$\lambda = 8°$	$\lambda = 10°$
2°	− 0·053	− 0·304	− 1·012	− 2·615	− 5·724
4°	− 0·157	− 0·831	− 2·239	− 4·826	− 9·198
6°	− 0·247	− 1·621	− 4·201	− 8·426	− 14·902
8°	− 0·184	− 2·540	− 6·759	− 13·279	− 22·708
10°	+ 0·221	− 3·399	− 9·726	− 19·196	− 32·416

(22)

$\varDelta$ (log σ cos α), nach Formel (20), 5. Ordnung,
für $\varphi = 50°$.

β	$\lambda = 2°$	$\lambda = 4°$	$\lambda = 6°$	$\lambda = 8°$	$\lambda = 10°$
2°	− 0·085	− 0·805	− 3·551	− 10·640	− 25·314
4°	− 0·225	− 1·368	− 4·814	− 12·887	− 28·824
6°	− 0·460	− 2·303	− 6·921	− 16·632	− 34·677
8°	− 0·789	− 3·614	− 9·871	− 21·877	− 42·871
10°	− 1·210	− 5·299	− 13·664	− 28·620	− 53·405

(23)

In gleicher Weise haben wir auch die Formel (14) für die Meridian-Konvergenz behandelt; es fand sich:

$$\varDelta(\gamma) = VI\lambda\beta^4 - VII\lambda^3\beta^2 + VIII\lambda^5 \tag{24}$$

wobei die Coëfficienten folgende Werte haben:

$\varphi°$	*log VI*	*log VII*	*log VIII*
40°	4.4465	3.7291	3.6012
45°	4.4880	4.0901	4.3556
50°	4.5227	4.3068	3.0233
55°	4.5518	4.4606	1.6891_n
60°	4.7560	4.5963	2.8772_n

(25)

Insbesondere ist, für $\varphi = 50°$, hiernach folgendes berechnet:

Korrektion 5. Ordnung für Meridian-Konvergenz nach Formel (14),
für $\varphi = 50°$.

$\beta =$	$\lambda = 2°$	$\lambda = 4°$	$\lambda = 6°$	$\lambda = 8°$	$\lambda = 10°$
2°	0,0000″	− 0,0002″	− 0,0007″	− 0,0008″	+ 0,0030″
4°	+ 0,0014″	+ 0,0014″	− 0,0011″	− 0,0063″	− 0,0183″
6°	+ 0,0080″	+ 0,0127″	+ 0,0110″	+ 0,0006″	− 0,0192″
8°	+ 0,0263″	+ 0,0464″	+ 0,0547″	+ 0,0463″	+ 0,0174″
10°	+ 0,0650″	+ 0,1204″	+ 0,1569″	+ 0,1663″	+ 0,1411″

(26)

§ 59. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von σ, bis σ^3 einschliesslich.

Fig. 1.

Die sehr wichtigen Reihen, welche $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$ und λ in steigenden Potenzen der Entfernung σ ausdrücken, kann man auf mancherlei Arten entwickeln.

Wir wollen mit der Reihe für $\varphi' - \varphi$ beginnen, und dieselbe aus der geschlossenen Formel für φ' herleiten, nämlich unmittelbar nach nebenstehender Fig. 1. (oder auch nach (16) § 55. S. 298):

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \cos \sigma + \cos \varphi \sin \sigma \cos \alpha \tag{1}$$

wenn man $\cos \sigma$ und $\sin \sigma$ entwickelt, so giebt dieses:

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \cos \varphi \cos \alpha \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6}\right)$$

$$\sin \varphi' - \sin \varphi = \sigma \cos \varphi \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \sin \varphi - \frac{\sigma^3}{6} \cos \varphi \cos \alpha \tag{2}$$

Da φ' und φ wenig verschieden sind, setzen wir:

$$\varphi' = \varphi + \varDelta \varphi \tag{3}$$

also nach (3) § 30. S. 197:

$$\sin \varphi' = \sin \varphi + \varDelta \varphi \cos \varphi - \frac{\varDelta \varphi^2}{2} \sin \varphi - \frac{\varDelta \varphi^3}{6} \cos \varphi \tag{4}$$

Aus (2) und (4) zusammen findet man mit Weglassung eines gemeinsamen Faktors $\cos \varphi$:

$$\varDelta \varphi - \frac{\varDelta \varphi^2}{2} \operatorname{tang} \varphi - \frac{\varDelta \varphi^3}{6} = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \operatorname{tang} \varphi - \frac{\sigma^3}{6} \cos \alpha \tag{5}$$

Diese Gleichung soll nach $\varDelta \varphi$ aufgelöst werden, was durch allmälige Näherung geschieht; man hat nämlich in erster Näherung:

$$\varDelta \varphi = \sigma \cos \alpha + \sigma^2 \ldots \qquad \text{also} \qquad \varDelta \varphi^2 = \sigma^2 \cos^2 \alpha + \sigma^3 \ldots$$

Dieses in (5) gesetzt giebt:

$$\varDelta \varphi - \frac{\sigma^2}{2} \cos^2 \alpha \operatorname{tang} \varphi - \frac{\varDelta \varphi^3}{6} = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \operatorname{tang} \varphi - \frac{\sigma^3}{6} \cos \alpha$$

$$\varDelta \varphi = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \operatorname{tang} \varphi \sin^2 \alpha + \sigma^3 \ldots$$

Dieses ist eine zweite Näherung, und giebt quadriert:

$$\varDelta \varphi^2 = \sigma^2 \cos^2 \alpha - \sigma^3 \operatorname{tang} \varphi \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sigma^4 \ldots \tag{6}$$

Ausserdem hat man hinreichend genau:

$$\varDelta \varphi^3 = \sigma^3 \cos^3 \alpha + \sigma^4 \ldots \tag{7}$$

Wenn man nun (6) und (7) in (5) einsetzt, und nach Potenzen von σ ordnet, so bekommt man:

$$\varDelta \varphi = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \operatorname{tang} \varphi \sin^2 \alpha - \frac{\sigma^3}{6} \cos \alpha \,(1 - \cos^2 \alpha + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi \sin^2 \alpha)$$

$$\varDelta \varphi = \varphi' - \varphi = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha \operatorname{tang} \varphi - \frac{\sigma^3}{6} \cos \alpha \sin^2 \alpha \,(1 + 3 \operatorname{tang}^2 \varphi) \tag{8}$$

Damit haben wir bereits die Entwicklung von $\varphi' - \varphi$ bis auf σ^3 einschliesslich, und auf ähnliche Weise wollen wir auch λ entwickeln, wozu zuerst die geschlossene Formel nach (18) § 55. S. 298 nötig ist, nämlich:

$$cotg\,\lambda\,sin\,\alpha = cotg\,\sigma\,cos\,\varphi - sin\,\varphi\,cos\,\alpha \tag{9}$$

oder

$$sin\,\alpha\,tang\,\sigma = cos\,\varphi\,tang\,\lambda - sin\,\varphi\,cos\,\alpha\,tang\,\lambda\,tang\,\sigma$$

$$sin\,\alpha\left(\sigma+\frac{\sigma^3}{3}\right) = cos\,\varphi\left(\lambda+\frac{\lambda^3}{3}\right) - sin\,\varphi\,cos\,\alpha\left(\lambda+\frac{\lambda^3}{3}\right)\left(\sigma+\frac{\sigma^3}{3}\right)$$

$$\sigma\,sin\,\alpha + \frac{\sigma^3}{3}\,sin\,\alpha = \lambda\,cos\,\varphi + \frac{\lambda^3}{3}\,cos\,\varphi - \sigma\,\lambda\,sin\,\varphi\,cos\,\alpha \tag{9a}$$

Diese Gleichung ist nach λ aufzulösen, wozu man zuerst hat:

erste Näherung: $\lambda = \sigma\frac{sin\,\alpha}{cos\,\varphi} + \sigma^2 \ldots$

Dieses wird in (10) eingesetzt, und dann findet man:

zweite Näherung: $\lambda = \sigma\frac{sin\,\alpha}{cos\,\varphi} + \sigma^2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha\,\frac{sin\,\varphi}{cos^2\varphi} + \sigma^3 \ldots$

Setzt man auch dieses in (9a), und zwar ins letzte Glied, sowie die erste Näherung von λ in λ^3 von (9a), so findet man durch Ordnen nach Potenzen von σ, zugleich mit einiger goniometrischer Umformung:

$$\left.\begin{aligned}\lambda = \sigma\frac{sin\,\alpha}{cos\,\varphi} + \sigma^2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha\,\frac{tang\,\varphi}{cos\,\varphi}\\ - \frac{\sigma^3}{3}\,sin^3\alpha\,\frac{tang^2\varphi}{cos\,\varphi} + \frac{\sigma^3}{3}\,sin\,\alpha\,cos^2\alpha\,\frac{1+3\,tang^2\varphi}{cos\,\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Übergehend zur Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha = \gamma$ haben wir zuerst nach (17) § 55. S. 298 die geschlossene Formel:

$$cotg\,\alpha' = cotg\,\alpha\,cos\,\sigma - \frac{sin\,\sigma\,tang\,\varphi}{sin\,\alpha} \tag{11}$$

$$cotg\,\alpha' = cotg\,\alpha\left(1-\frac{\sigma^2}{2}\right) - \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6}\right)\frac{tang\,\varphi}{sin\,\alpha}$$

$$cotg\,\alpha' - cotg\,\alpha = -\frac{\sigma\,tang\,\varphi}{sin\,\alpha} - \frac{\sigma^2}{2}\,cotg\,\alpha + \frac{\sigma^3}{6}\frac{tang\,\varphi}{sin\,\alpha} \tag{12}$$

Setzt man nun $\alpha' = \alpha + \gamma$, so hat man nach dem *Taylor*schen Satz (vgl. (3) § 30. S. 197):

$$cotg\,(\alpha+\gamma) = cotg\,\alpha - \frac{\gamma}{sin^2\alpha} + \frac{\gamma^2\,cos\,\alpha}{sin^3\alpha} - \frac{\gamma^3}{3}\,\frac{sin^2\alpha + 3\,cos^2\alpha}{sin^4\alpha} \tag{13}$$

Nun folgt aus (12) und (13):

$$\frac{\gamma}{sin\,\alpha} - \gamma^2\frac{cos\,\alpha}{sin^2\alpha} + \frac{\gamma^3}{3}\,\frac{sin^2\alpha + 3\,cos^2\alpha}{sin^3\alpha} = \sigma\,tang\,\varphi + \frac{\sigma^2}{2}\,cos\,\alpha - \frac{\sigma^3}{6}\,tang\,\varphi \tag{14}$$

Diese Gleichung ist wieder wie in den beiden vorhergehenden Fällen, schrittweise nach γ aufzulösen, und da wir soeben zwei solche Auflösungen in genügender Ausführlichkeit vorgeführt haben, könnten wir wohl sofort das Ergebnis anschreiben. Indessen wollen wir diese Gelegenheit benützen, um auch das allgemeine Verfahren der Reihen-Auflösung anzuwenden, welches wir in § 31. durch die Formeln (50), (51), (52) S. 203 angegeben haben. Benützt man die dort angenommenen Bezeichnungen, so hat man:

$$A = \frac{1}{\sin\alpha} \quad , \quad B = -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \quad , \quad C = \frac{1}{3}\,\frac{\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}$$

$$A' = tang\,\varphi \quad , \quad B' = \frac{1}{2}\cos\alpha \quad , \quad C' = -\frac{1}{2}\,tang\,\varphi$$

Dann wird:

$$\alpha = tang\,\varphi\,\sin\alpha \quad , \quad \beta = \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\,tang^2\varphi$$

Coëfficient $\gamma = -\frac{1}{6}\sin^3\alpha\,tang\,\varphi\,(1 + 2\,tang^2\varphi) + \frac{1}{6}\sin\alpha\cos^2\alpha\,tang\,\varphi\,(5 + 6\,tang^2\varphi)$

Nun ist (mit Unterscheidung von *Coëfficient* γ und *Meridian-Konvergenz* γ):

$$\text{Meridian-Konvergenz} \quad \alpha' - \alpha = \gamma = \alpha\,\sigma + \beta\,\sigma^2 + \gamma\,\sigma^3,$$

und wenn man alles einsetzt, erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha = \sigma\sin\alpha\,tang\,\varphi + \frac{\sigma^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha\,(1 + 2\,tang^2\varphi) \\ -\frac{\sigma^3}{6}\sin^3\alpha\,tang\,\varphi\,(1 + 2\,tang^2\varphi) + \frac{\sigma^3}{6}\sin\alpha\cos^2\alpha\,tang\,\varphi\,(5 + 6\,tang^2\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Die Gleichungen (8), (10), (15) enthalten die Lösung unserer Aufgabe, wie wir uns zunächst vorgesetzt haben, bis zur dritten Ordnung σ^3.

Man kann diese Formeln auch durch Benützung der rechtwinkligen Coordinaten x, y, d. h. durch Entwicklung der Formeln (24)—(28) § 55. S. 299—300 finden, worauf wir jedoch uns hier nicht einlassen wollen, mit der Bemerkung, dass eine solche Entwicklung durch Vermittlung von x und y in des Verfassers „Grundzügen der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885, § 23. und § 24." gegeben ist, indem die ganz analoge Bestimmung der Breite und des Azimutes aus Polarstern-Beobachtungen dort so behandelt ist.

Endlich die eleganteste Herleitung unserer Formeln (8), (10), (15) durch den *Maclaurin*schen Satz, werden wir in unserem nächsten § 60. kennen lernen, indem wir dann mit dem *Maclaurin*schen Satze die Entwicklung bis zur 6. Ordnung ausdehnen werden.

Inzwischen wollen wir jedoch unsere Ergebnis-Formeln nochmals schreiben, mit Einführung folgender Abkürzungen:

$$\sigma\sin\alpha = n \qquad \sigma\cos\alpha = m \qquad tang\,\varphi = t \tag{16}$$

Ausserdem setzen wir die nötigen ϱ zu, und haben dann aus (8), (10), (15):

$$\varphi' - \varphi = m - \frac{n^2}{2\varrho}t - \frac{n^2 m}{6\varrho^2}(1 + 3t^2) \tag{17}$$

$$\lambda\cos\varphi = n + \frac{n\,m}{\varrho}t - \frac{n^3}{3\varrho^2}t^2 + \frac{n\,m^2}{3\varrho^2}(1 + 3t^2) \tag{18}$$

$$(\alpha' - \alpha) = n\,t + \frac{n\,m}{2\varrho}(1 + 2t^2) - \frac{n^3}{6\varrho^2}t(1 + 2t^2) + \frac{n\,m^2}{6\varrho^2}t(5 + 6t^2) \tag{19}$$

Hiebei sind die konstanten Coëfficienten-Logarithmen:

$$\log\frac{1}{\varrho} = 4.685\,575 \;,\; \log\frac{1}{2\varrho} = 4.384\,545 \;,\; \log\frac{1}{3\varrho^2} = 8.89403 \;,\; \log\frac{1}{6\varrho^2} = 8.59300 \tag{20}$$

Wir wollen hiernach unser kleines Normal-Beispiel berechnen, nämlich:

Gegeben: $\varphi = 49°\,30'\,0''$ $\quad \alpha = 32°\,21'\,1{,}291''$ $\quad \sigma = 1°\,11'\,19{,}4819''$
$= 4279{,}4819''$

Für die von t abhängigen Coëfficienten kann man die Hilfstafel unseres Anhangs Seite [34]—[37] benützen, oder wenigstens zur Versicherung zuziehen.

In unserem Falle mit $\varphi = 49° 30'$ hat man:

$$log\,(1+2\,t^2) = 0.573\,078 \qquad log\,(1+3\,t^2) = 0.70865 \qquad log\,(5+6\,t^2) = 1.12141$$

Im übrigen giebt die Ausrechnung nach den Formeln (17), (18), (19):

Breite	Länge	Azimut
$+3615{,}271''$	$+3525{,}963''$	$+2681{,}163''$
$-\ \ 14{,}883$	$+\ \ 72{,}359$	$+\ \ 75{,}091$
$-\ \ \ 0{,}380$	$-\ \ \ 0{,}199$	$-\ \ \ 0{,}206$
	$+\ \ \ 1{,}846$	$+\ \ \ 1{,}816$
$\varphi' - \varphi = 3600{,}008''$	$\lambda = 3599{,}969''$	$\alpha' - \alpha = 2757{,}864''$
soll $3600{,}000''$	soll $3600{,}000''$	soll $2757{,}894''$
Fehler $+0{,}008''$	Fehler $-0{,}031''$	Fehler $-0{,}030''$ (21)

Diese Fehler sind den Formeln (17), (18), (19) zuzuschreiben, indem dieselben mit der 3. Ordnung abbrechen, während die Glieder 4. Ordnung noch merklich sind.

§ 60. Reihen-Entwicklung bis σ^6 nach dem *Maclaurin*schen Satz.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 313.)

Wenn man die im vorigen § 59. entwickelten Reihen auf weitere Glieder ausdehnen will, so kann man auf dem dort betretenen Wege fortfahren, allein wir wollen das nun nicht thun, sondern ein anderes Verfahren anwenden, welches zunächst an und für sich mehr geeignet ist, höhere Glieder, etwa bis zur Ordnung σ^6 zu liefern, welches aber auch bei diesen sphärischen Entwicklungen zugleich eine lehrreiche Vorbereitung für unsere späteren entsprechenden *sphäroidischen* Entwicklungen bietet.

Wir stützen uns auf den *Maclaurin*schen Satz, welchen wir schon in der mathematischen Einleitung (4) § 30. S. 197, erwähnt haben. Die Anwendung dieses Satzes auf unseren Fall giebt:

$$\varphi' - \varphi = \frac{d\varphi}{d\sigma}\Big]\sigma + \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}\Big]\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{d\sigma^3}\Big]\frac{\sigma^3}{6} + \frac{d^4\varphi}{d\sigma^4}\Big]\frac{\sigma^4}{24} + \frac{d^5\varphi}{d\sigma^5}\Big]\frac{\sigma^5}{120} + \frac{d^6\varphi}{d\sigma^6}\Big]\frac{\sigma^6}{720} \qquad (1)$$

$$\lambda = \frac{d\lambda}{d\sigma}\Big]\sigma + \frac{d^2\lambda}{d\sigma^2}\Big]\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3\lambda}{d\sigma^3}\Big]\frac{\sigma^3}{6} + \frac{d^4\lambda}{d\sigma^4}\Big]\frac{\sigma^4}{24} + \frac{d^5\lambda}{d\sigma^5}\Big]\frac{\sigma^5}{120} + \frac{d^6\lambda}{d\sigma^6}\Big]\frac{\sigma^6}{720} \qquad (2)$$

$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{d\sigma}\Big]\sigma + \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}\Big]\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3\alpha}{d\sigma^3}\Big]\frac{\sigma^3}{6} + \frac{d^4\alpha}{d\sigma^4}\Big]\frac{\sigma^4}{24} + \frac{d^5\alpha}{d\sigma^5}\Big]\frac{\sigma^5}{120} + \frac{d^6\alpha}{d\sigma^6}\Big]\frac{\sigma^6}{720} \qquad (3)$$

Dabei soll das Zeichen $\Big]$ bedeuten, dass nach Ausführung der Differentiierungen in den erhaltenen Differential-Quotienten $\frac{d\varphi}{d\sigma}, \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}$ u. s. w. der Wert $\varphi' - \varphi = 0$ zu setzen ist, d. h. dass die Differential-Quotienten für den *Ausgangs*-Wert φ und ebenso für den Ausgangs-Wert α auszurechnen sind.

Die ersten Differential-Quotienten erhalten wir aus (1), (2), (3) § 56. S. 302, nämlich in der für uns geeigneten Form:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \cos\alpha \tag{4}$$

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \tag{5}$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi \tag{6}$$

Nun leiten wir (4) weiter ab, und finden, mit Zuziehung von (6):

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} = -\sin\alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} = -\sin^2\alpha \operatorname{tang}\varphi \tag{7}$$

Dieses nochmals abgeleitet giebt:

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\sigma}\operatorname{tang}\varphi - \sin^2\alpha\,(1+\operatorname{tang}^2\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma}$$

also mit Rücksicht auf (6) und (4):

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2\sin^2\alpha\cos\alpha\operatorname{tang}^2\varphi - \sin^2\alpha\cos\alpha\,(1+\operatorname{tang}^2\varphi)$$

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -\sin^2\alpha\cos\alpha\,(1+3\operatorname{tang}^2\varphi) \tag{8}$$

Dieses wird abermals differentiiert:

$$\frac{d^4\varphi}{d\sigma^4} = (-2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha)\sin\alpha\operatorname{tang}\varphi\,(1+3\operatorname{tang}^2\varphi)$$
$$-\sin^2\alpha\cos\alpha\,6\,t\,(1+t^2)\cos\alpha$$

$$\frac{d^4\varphi}{d\sigma^4} = \sin^4\alpha\operatorname{tang}\varphi\,(1+3\operatorname{tang}^2\varphi) - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\operatorname{tang}\varphi\,(2+3\operatorname{tang}^2\varphi) \tag{9}$$

In dieser Weise kann man fortfahren, es empfiehlt sich dabei eine Schreibabkürzung zu machen, nämlich:

$$\operatorname{tang}\varphi = t \tag{10}$$

und damit erhält man:

$$\frac{d^5\varphi}{d\sigma^5} = \sin^4\alpha\cos\alpha\,(1+30\,t^2+45\,t^4) - 4\sin^2\alpha\cos^3\alpha\,(2+15\,t^2+15\,t^4) \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^6\varphi}{d\sigma^6} = -\sin^6\alpha\,t\,(1+30\,t^2+45\,t^4) + 4\sin^4\alpha\cos^2\alpha\,t\,(22+135\,t^2+135\,t^4)\\ -8\sin^2\alpha\cos^4\alpha\,t\,(17+60\,t^2+45\,t^4)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Zu den Ableitungen von λ übergehend, haben wir nach (5):

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \tag{13}$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\frac{d\alpha}{ds} + \sin\alpha\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds} \tag{14}$$

also mit Berücksichtigung von (4) und (6):

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\varphi}\sin\varphi + \sin\alpha\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cos\alpha$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} = 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos\varphi} = 2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tang}\varphi\sec\varphi \tag{15}$$

Da man bald bemerkt, dass der Nenner $\cos\varphi$, oder der Faktor $\sec\varphi$ sich in *allen* Gliedern der Entwicklung von λ einstellt, und dass die Potenzen von $\tan\varphi$ sich wie im vorigen Fall finden, schreibt man auch die Ableitung von $\sec\varphi$ stets in der Form $t\sec\varphi$, und damit bekommt man (überall $\tan\varphi = t$ gesetzt) weiter:

$$\frac{d^3\lambda}{d\sigma^3} = 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\, t\, t\sec\varphi$$
$$+ 2\sin\alpha\cos\alpha\,(1+t^2)\sec\varphi\cos\alpha$$
$$+ 2\sin\alpha\cos\alpha\, t\, t\sec\varphi\cos\alpha$$

$$\frac{d^3\lambda}{d\sigma^3} = -\sin^3\alpha\sec\varphi\,(2t^2) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha\sec\varphi\,(1+3t^2) \tag{16}$$

Auf diesem Wege findet man auch:

$$\frac{d^4\lambda}{d\sigma^4} = 8\sec\varphi\, t\left\{-\sin^3\alpha\cos\alpha(1+3t^2) + \sin\alpha\cos^3\alpha(2+3t^2)\right\} \tag{17}$$

$$\frac{d^5\lambda}{d\sigma^5} = 8\sec\varphi\left\{\sin^5\alpha(t^2+3t^4) - \sin^3\alpha\cos^2\alpha(1+20t^2+30t^4) + \sin\alpha\cos^4\alpha(2+15t^2+15t^4)\right\} \tag{18}$$

$$\frac{d^6\lambda}{d\sigma^6} = 16\sec\varphi\, t\left\{\sin^5\alpha\cos\alpha(2+30t^2+45t^4) - \sin^3\alpha\cos^3\alpha(26+150t^2+150t^4) + \sin\alpha\cos^5\alpha(17+60t^2+45t^4)\right\} \tag{19}$$

In ähnlicher Weise erhält man auch die Ableitungen von α nach σ:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \sin\alpha\, t \tag{20}$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} = \sin\alpha\cos\alpha\,(1+2t^2) \tag{21}$$

$$\frac{d^3\alpha}{d\sigma^3} = -\sin^3\alpha\, t\,(1+2t^2) + \sin\alpha\cos^2\alpha\, t\,(5+6t^2) \tag{22}$$

$$\frac{d^4\alpha}{d\sigma^4} = -\sin^3\alpha\cos\alpha(1+20t^2+24t^4) + \sin\alpha\cos^3\alpha(5+28t^2+24t^4) \tag{23}$$

$$\frac{d^5\alpha}{d\sigma^5} = \sin^5\alpha\, t(1+20t^2+24t^4) - 2\sin^3\alpha\cos^2\alpha\, t(29+140t^2+120t^4) + \sin\alpha\cos^4\alpha\, t(61+180t^2+120t^4) \tag{24}$$

$$\frac{d^6\alpha}{d\sigma^6} = \sin^5\alpha\cos\alpha(1+182t^2+840t^4+720t^6) - \sin^3\alpha\cos^3\alpha(58+1316t^2+3600t^4+2400t^6) + \sin\alpha\cos^5\alpha(61+662t^2+1320t^4+720t^6) \tag{25}$$

Nun können wir die Formeln (1), (2), (3) zusammensetzen; wir wollen dieses jedoch hier nur bis zur 4. Ordnung thun, wir setzen dabei:

$$\sigma\sin\alpha = n \qquad \sigma\cos\alpha = m \qquad \tan\varphi = t \tag{26}$$

Wenn wir zugleich überall die nötigen ϱ zusetzen, so erhalten wir:

$$\varphi' - \varphi = m - \frac{1}{2\varrho}n^2 t - \frac{1}{6\varrho^2}n^2 m\,(1+3t^2) + \frac{1}{24\varrho^3}n^4 t\,(1+3t^2) - \frac{1}{6\varrho^3}n^2 m^2 t\,(2+3t^2) \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda \cos\varphi = n &+ \frac{1}{\varrho} n m t \\ &- \frac{1}{3\varrho^2} n^3 t^2 + \frac{1}{3\varrho^2} n m^2 (1+3t^2) \\ &- \frac{1}{3\varrho^3} n^3 m t (1+3t^2) + \frac{1}{3\varrho^3} n m^3 t (2+3t^2)\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha' - \alpha = n t &+ \frac{1}{2\varrho} n m (1+2t^2) \\ &- \frac{1}{6\varrho^2} n^3 t (1+2t^2) + \frac{1}{6\varrho^2} n m^2 t (5+6t^2) \\ &- \frac{1}{24\varrho^3} n^3 m (1+20t^2+24t^4) \\ &+ \frac{1}{24\varrho^3} n m^3 (5+28t^2+24t^4)\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Wenn das Bedürfnis eintritt, kann man die Glieder 5. und 6. Ordnung mit Benützung der Ableitungen (11), (12), dann (18), (19) und (24), (25) jederzeit bilden. Die konstanten Coëfficienten-Logarithmen für die Formeln (27), (28), (29) sind zum Teil schon bei (20) § 59. S. 315 angegeben; die übrigen (zur 4. Ordnung) sind:

$$\log\frac{1}{3\varrho^3} = 3.579\,603\text{–}20, \quad \log\frac{1}{6\varrho^3} = 3.278\,573\text{–}20, \quad \log\frac{1}{24\varrho^3} = 2.676\,513\text{–}20 \quad (30)$$

Wir haben die Glieder 4. Ordnung in den Formeln (27), (28), (29) auch für unser kleines Normal-Beispiel ausgerechnet, und gefunden:

für $\varphi' - \varphi$	für λ	für $\alpha' - \alpha$
+ 0,0008″	— 0,0152″	— 0,0152″
— 0,0093	+ 0,0452	+ 0,0455
— 0,0085″	+ 0,0300″	+ 0,0303″

Dieses sind gerade die Beträge, welche in (21) § 59. S. 316 noch gefehlt haben; und wir wissen nun, dass für jenes Beispiel mit der Mittelbreite 50°, mit $\varphi' - \varphi = 1°$ und $\lambda = 1°$, die Reihen-Entwicklung bis zur 4. Ordnung ausreicht, um überall Genauigkeit auf 0,001″ zu haben.

Wir könnten nun weiter untersuchen, wie viel die Glieder 5. Ordnung in gewissen Fällen ausmachen; da wir aber über die Beträge, welche Glieder 5. Ordnung bei solchen Entwicklungen etwa erreichen, bereits in anderer Weise in § 58. (22), (23), (26) S. 312 uns Klarheit verschafft haben, wollen wir die Glieder 5. Ordnung unserer neuen Formeln übergehen, dagegen noch für *einen* Fall die Glieder 6. Ordnung in Betracht nehmen, nämlich für die Azimut-Berechnung, bei welcher nach (3) und (25) das Glied 6. Ordnung folgendes ist:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_6 = \frac{\sigma^6}{720\varrho^5}\Big\{&\sin^5\alpha\cos\alpha\,(1+182t^2+840t^4+720t^6) \\ &- \sin^3\alpha\cos^3\alpha\,(58+1316t^2+3600t^4+2400t^6) \\ &+ \sin\alpha\cos^5\alpha\,(61+662t^2+1320t^4+720t^6)\Big\}\end{aligned}$$

Um einen einfachen Fall zu haben, setzen wir die Breite $\varphi = 45°$, also $t = \tan\varphi = 1$, und damit wird:

$$\Delta\,\alpha_6 = \frac{\sigma^6}{720\,\varrho^5}\left\{1743\,\sin^5\alpha\cos\alpha - 7374\,\sin^3\alpha\cos^3\alpha + 2763\,\sin\alpha\cos^5\alpha\right\}$$

Durch einige Versuche findet man, dass diese Funktion zwischen 0° und 90° zwei Maxima, etwa bei $\alpha = 16°$ und $\alpha = 77°$, und ein Minimum bei $\alpha = 47°$ hat; das absolute Maximum ist bei 16°, und giebt:

$$(\Delta\,\alpha_6)\,max = \frac{\sigma^6}{720\,\varrho^5}\,491$$

Setzt man $\sigma = 2° = 7200''$, so erhält man:

$$(\Delta\,\alpha_6)\,max = 0{,}00025''$$

Dagegen für $\sigma = 3°$ erhält man schon 0,0029″ und für $\sigma = 4°$ erhält man 0,0162″.

Aus all diesem ziehen wir folgende Schlüsse:

Die Glieder 6. Ordnung werden bei Ausdehnung von mehreren Graden bereits merkbar, namentlich in höheren Breiten, wo die Glieder mit t^2, t^4, t^6 sehr rasch wachsen. Da nun schon die Glieder 5. Ordnung ungemein beschwerlich sind, empfehlen sich sphärische Reihen-Entwicklungen höchstens bis zur 4. Ordnung einschliesslich, z. B. die *Gauss*schen *Mittel*breiten-Formeln (16)—(19) § 57. S. 306, welche äusserlich nur Glieder bis zur dritten Ordnung enthalten, aber wegen des *Mittel*-Arguments noch um einen Grad genauer, d. h. auf Glieder 4. Ordnung einschliesslich genau sind.

Hat man Fälle mit Ausdehnung etwa über 2°, für welche nach S. 312 die Glieder 5. Ordnung bereits merkbar sind, so thut man besser, nach den geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie mit 8—10stelligen Logarithmen zu rechnen, als die viel grössere Mühe der Glieder 5. oder gar 6. Ordnung aufzuwenden.

Von diesen Überlegungen werden wir auch später bei den *sphäroidischen* Berechnungen Gebrauch machen.

§ 61. Zweite Herleitung der Mittelbreiten-Formeln von § 57.

Wenn wir hier noch eine *zweite* Herleitung der in § 57. aus den *Gauss*schen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie erhaltenen Mittelbreiten-Formeln vornehmen, so geschieht es teils in dem Sinne einer Versicherung der ersten Herleitung, noch viel mehr aber zum Zweck der Vorbereitung entsprechender *sphäroidischer* Formeln, mit welchen wir uns später beschäftigen werden.

In Fig. 1. (S. 321) betrachten wir 3 Punkte mit den Breiten φ_1, φ, φ_2, wobei φ der Mittelwert ist, d. h.:

$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1 \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \qquad (1)$$

Da die Breiten-Unterschiede $\varphi - \varphi_1$ und $\varphi_2 - \varphi$ hiernach *gleich* sein sollen, so werden für einen Bogen, welcher die drei Parallelen zu den Breiten φ_1, φ, φ_2 schneidet, die Abstände σ_1 und σ_2, deren Summe $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ sei, nicht gleich, aber auch nicht sehr ungleich werden, und ähnlich verhält es sich mit den zugehörigen Längen-Unterschieden λ_1 und λ_2, deren Summe $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$ sei.

Die Azimute, welche der Bogen in den Breiten φ_1, φ und φ_2 hat, seien bzw. α_1, α_0 und α_2, und es werden dabei ähnliche Verhältnisse stattfinden, wie bei den Längen-Unterschieden, d. h. es werden $\alpha_0 - \alpha_1$ und $\alpha_2 - \alpha_0$ nicht sehr verschieden sein; das Mittel aus α_1 und α_2 sei mit α bezeichnet, d. h.:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha \qquad (2)$$

Dieses Mittel wird nicht gleich α_0, aber auch nicht sehr viel von α_0 verschieden sein.

Eine frühere Abkürzung sei hier wieder benützt, nämlich:

$$tang\,\varphi = t \qquad (3)$$

und nun wenden wir die Formel für den Breiten-Unterschied (8) § 59. S. 313 auf unsern Fall zweifach an, und erhalten:

$$\varphi_2 - \varphi = \sigma_2 \cos\alpha_0 - \frac{\sigma_2^2}{2}\sin^2\alpha_0\, t - \frac{\sigma_2^3}{6}\sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0 (1 + 3t^2) \qquad (4)$$

$$\varphi_1 - \varphi = -\sigma_1 \cos\alpha_0 - \frac{\sigma_1^2}{2}\sin^2\alpha_0\, t + \frac{\sigma_1^3}{6}\sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0 (1 + 3t^2) \qquad (5)$$

Fig. 1.

Diese zwei Gleichungen geben subtrahiert:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\sigma_2 + \sigma_1)\cos\alpha_0 - \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2}\sin^2\alpha_0\, t - \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6}\sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0 (1 + 3t^2) \qquad (6)$$

Ferner giebt wegen der Gleichheit der Breiten-Unterschiede nach (1) die Addition von (4) und (5):

$$0 = (\sigma_2 - \sigma_1)\cos\alpha_0 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{2}\sin^2\alpha_0\, t - \frac{\sigma_2^3 - \sigma_1^3}{6}\sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0 (1 + 3t^2) \qquad (7)$$

Dieses ist eine Gleichung zur Bestimmung der Differenz $\sigma_2 - \sigma_1$, und da man sofort sieht, dass diese Differenz von der Ordnung σ^2 ist, kann man in (7) das letzte Glied weglassen, und im zweiten Gliede $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$ setzen, so dass man damit aus (7) erhält:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\sigma^2}{4}\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\, t \qquad (8)$$

Wenn man diese Gleichung mit $\sigma_2 + \sigma_1 = \sigma$ multipliziert, so erhält man auch die Quadrat-Differenz:

$$\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = \frac{\sigma^3}{4}\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\, t \qquad (9)$$

Dieses (9) setzt man in (6), zugleich darf man dort im letzten Gliede $\sigma_2^3 = \sigma_1^3 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^3$ setzen, und dadurch erhält man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma\cos\alpha_0 - \frac{\sigma^3}{8}\frac{\sin^4\alpha_0}{\cos\alpha_0}\, t^2 - \frac{\sigma^3}{24}\sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0 (1 + 3t^2) \qquad (10)$$

Diese Gleichung müssen wir zunächst so stehen lassen, und nun mit den Azimuten beginnen. Hiezu haben wir in (15) § 59. S. 315 die nötige Gleichung, welche auf unseren Fall zweifach angewendet giebt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2-\alpha_0=\sigma_2 \sin\alpha_0\, t+\frac{\sigma_2^2}{2}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+2t^2)-\frac{\sigma_2^3}{6}\sin^3\alpha_0\, t\,(1+2t^2)\\ +\frac{\sigma_2^3}{6}\sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\, t\,(5+6t^2)\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_0=-\sigma_1 \sin\alpha_0\, t+\frac{\sigma_1^2}{2}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+2t^2)+\frac{\sigma_1^3}{6}\sin^3\alpha_0\, t\,(1+2t^2)\\ -\frac{\sigma_1^3}{6}\sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\, t(5+6t^2)\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Auch diese Gleichungen (11) und (12) werden subtrahiert und addiert; zuerst giebt die Subtraktion:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2-\alpha_1=(\sigma_2+\sigma_1)\sin\alpha_0\, t+\frac{\sigma_2^2-\sigma_1^2}{2}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+2t^2)\\ -\frac{\sigma_2^3+\sigma_1^3}{6}\sin^3\alpha_0\, t\,(1+2t^2)+\frac{\sigma_2^3+\sigma_1^3}{6}\sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\, t\,(5+6t^2)\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Bei der Addition von (11) und (12) lassen wir die Differenzen dritter Ordnung $\sigma_2^3-\sigma_1^3$ ganz fort, da dieselben auf Glieder von der Ordnung σ^4 führen würden; indem wir dann auch das Mittel $\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}=\alpha$ setzen, wie in (2) angenommen wurde, erhalten wir aus (11) und (12) durch Addition:

$$\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}-\alpha_0=\alpha-\alpha_0=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\sin\alpha_0\, t+\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{4}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+2t^2)$$

und setzt man hier noch die Differenz $\sigma_2-\sigma_1$ nach (8) ein, so erhält man:

$$\alpha-\alpha_0=\frac{\sigma^2}{8}\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos\alpha_0}\,t^2+\frac{\sigma^2}{8}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+2t^2)\quad(14)$$

Hieraus bilden wir zu verschiedenem Gebrauche:

$$\sin\alpha_0=\sin\alpha-\frac{\sigma^2}{8}\sin^3\alpha\, t^2-\frac{\sigma^2}{8}\sin\alpha\cos^2\alpha\,(1+2t^2)\quad(15)$$

$$\cos\alpha_0=\cos\alpha+\frac{\sigma^2}{8}\frac{\sin^4\alpha}{\cos\alpha}\,t^2+\frac{\sigma^2}{8}\sin^2\alpha\cos\alpha\,(1+2t^2)\quad(16)$$

In diesen (15) und (16) ist in den Gliedern mit σ^2 schlechthin α statt des aus (14) sich ergebenden α_0 geschrieben, weil nach (14) sich α und α_0 selbst nur um Glieder von der Ordnung σ^2 unterscheiden.

Nun kehren wir wieder zu der Gleichung (10) zurück, setzen im ersten Gliede daselbst (16) ein, und erhalten, da die quadratischen Glieder sich heben:

$$\varphi_2-\varphi_1=\sigma\cos\alpha+\frac{\sigma^3}{24}\sin^2\alpha\cos\alpha\,(2+3t^2)\quad(17)$$

Auch die Gleichung (13) lässt sich nun weiter führen; wir schreiben diese Gleichung zunächst von neuem mit Zusammenziehung der σ_2 und σ_1:

$$\begin{aligned}\alpha_2-\alpha_1=\sigma\sin\alpha_0\, t+\frac{\sigma_2^2-\sigma_1^2}{2}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+2t^2)\\ -\frac{\sigma^3}{24}\sin^3\alpha_0\, t\,(1+2t^2)+\frac{\sigma^3}{24}\sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\, t\,(5+6t^2)\end{aligned}$$

Hier hat man zuerst $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$ nach (9) einzusetzen, wodurch man erhält, indem man zugleich in den Gliedern mit σ^3 statt α_0 den Wert α schreibt:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma^3}{8} \sin^3 \alpha t (1 + 2t^2)$$
$$- \frac{\sigma^3}{24} \sin^3 \alpha t (1 + 2t^2) + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha \cos^2 \alpha t (5 + 6t^2)$$

Auch hat man noch im ersten Gliede $\sin \alpha_0$ durch $\sin \alpha$ zu ersetzen, was durch (15) geschieht; und wenn man zusammenfasst und ordnet, so erhält man:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha t + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha t \left(\sin^2 \alpha (2 + t^2) + 2 \cos^2 \alpha \right) \tag{18}$$

Nun bleibt als dritte Aufgabe nur noch die Bestimmung des Längen-Unterschiedes λ. Hiezu haben wir nach (10) § 59. S. 314 in zweifacher Anwendung:

$$\lambda_2 \cos \varphi = \quad \sigma_2 \sin \alpha_0 + \sigma_2^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t - \frac{\sigma_2^3}{3} \sin^3 \alpha_0 t^2 + \frac{\sigma_2^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3t^2)$$
$$- \lambda_1 \cos \varphi = - \sigma_1 \sin \alpha_0 + \sigma_1^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t + \frac{\sigma_1^3}{3} \sin^3 \alpha_0 t^2 - \frac{\sigma_1^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3t^2)$$

Durch Subtraktion bekommt man, sofort die Glieder dritter Ordnung zusammennehmend, und in diesen Gliedern α statt α_0 schreibend:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha_0 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \sin \alpha \cos \alpha t - \frac{\sigma^3}{12} \sin^3 \alpha \, t^2 + \frac{\sigma^3}{12} \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 3t^2)$$

Wenn man wieder, wie in den beiden vorigen Fällen, $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$ nach (9) und $\sin \alpha_0$ nach (15) einsetzt, so erhält man:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha (\sin^2 \alpha \, t^2 - \cos^2 \alpha) \tag{19}$$

Die Differenz $\lambda_2 - \lambda_1$ haben wir hiebei nicht gebraucht; der Gleichförmigkeit wegen wollen wir jedoch diese Differenz auch angeben, nämlich:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \sin \varphi = \frac{\sigma^2}{4} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t + \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \, t \tag{20}$$

Unsere gestellte Aufgabe ist in den Gleichungen (17), (18), (19) gelöst, die wir in etwas anderer Form nun zusammenstellen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{24} (2 \sigma^2 \sin^2 \alpha + 3 \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi) \right) \tag{21}$$

$$\lambda = \frac{\sigma \sin \alpha}{\cos \varphi} \left(1 + \frac{1}{24} (\sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi - \sigma^2 \cos^2 \alpha) \right) \tag{22}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{1}{24} (2 \sigma^2 + \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi) \right) \tag{23}$$

Hier kann man in den Korrektions-Gliedern setzen:

$$\sigma \cos \alpha = \beta \qquad \sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \qquad \sigma \sin \alpha \tan \varphi = \gamma \tag{24}$$

wobei β ein Näherungs-Wert für $\varphi_2 - \varphi_1$ und γ ein Näherungs-Wert für $\alpha_2 - \alpha_1$ sein soll. Ausserdem bestehen die Näherungs-Gleichungen

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad , \quad \sigma^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \tag{25}$$

Wenn man dieses in (21) und (22) berücksichtigt und die Gleichungen umstellt, dann (22) und (23) dividiert, so erhält man:

$$\sigma \cos \alpha = (\varphi_2 - \varphi_1)\left(1 - \frac{1}{24}(3\lambda^2 - \lambda^2 \cos^2 \varphi)\right) \tag{26}$$

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{24}(\lambda^2 \sin^2 \varphi - \beta^2)\right) \tag{27}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{24}(3\beta^2 + 2\lambda^2 \cos^2 \varphi)\right) \tag{28}$$

Dieses sind dieselben Gleichungen wie (17), (16), (18) § 57. S. 300; und es sind also jene Gleichungen hiemit zum zweitenmale hergeleitet.

Kapitel VI.

Sphäroidische Geodäsie mit Normalschnitten und Krümmungs-Halbmessern.

§ 62. Normalschnitte des Sphäroids.

Wenn man die Erdoberfläche näherungsweise als eine *Kugel* betrachtet, so kann man die Formeln und Entwicklungen, welche die sphärische Trigonometrie bietet, auf Messungen an der Erdoberfläche *unmittelbar* anwenden mit der Beschränkung auf solche Ausdehnung und auf solche Berechnungsarten, bei welchen die Ungleichheit der Erdkrümmungen vernachlässigt werden kann.

Dieses ist der Fall bei den gewöhnlichen Dreiecks-Berechnungen und bei Coordinaten-Berechnungen, bei welchen nur Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ vorkommen (§ 39.—43. und § 46.—52.), denn hiebei braucht man einen Erdhalbmesser r nur auf wenige Stellen genau; und man hat, auch ohne nähere mathematische Begründung, die Überzeugung, dass man damit der Wahrheit erheblich näher kommt, als mit einer *ebenen* Berechnung (welche $r = \infty$ entspräche).

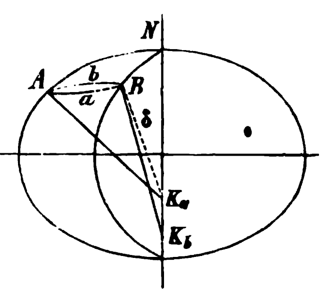
Wenn aber die sphärischen Entwicklungen auf Glieder *erster* Ordnung, d. h. $\frac{1}{r}$, führen, so wird schon bei ganz mässigen Ausdehnungen, die Annahme einer kugelförmigen Erdoberfläche ohne nähere Untersuchung des einzelnen Falles unbrauchbar, weil die verschiedenen Erdkrümmungen nach verschiedenen Seiten verschieden wirken.

Man kann aber immer noch sphärische Entwicklungen mit Vortheil anwenden, wenn man durch Untersuchung der Normalschnitte und der Krümmungs-Verhältnisse für jeden einzelnen Fall im stande ist, sphärische Hilfsdreiecke, bzw. räumliche Dreikante aufzufinden, und dadurch für die sphärische Trigonometrie einen Boden zu finden, der ihr auf dem Sphäroid (Umdrehungs-Ellipsoid) als solchem fehlt.

Wir wollen nun im Anschluss an Fig. 1. die verschiedenen Normalen und die Normalschnitte des Umdrehungs-Ellipsoids betrachten:

Es seien in Fig. 1. A und B zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, unter verschiedenen Breiten; KA_a sei die Flächen-Normale im Punkte A, und BK_b die Flächen-Normale im Punkte B; hiebei bemerkt man zuerst, dass die Punkte, in welchen die Umdrehungsaxe von diesen Normalen getroffen wird, d. h. K_a und K_b, *nicht* zusammenfallen, abgesehen von dem besonderen Falle, dass A und B auf gleicher Breite liegen.

Fig 1.
Normalen $A\,K_a$ und $B\,K_b$.



Ebenso wie man im allgemeinen *zwei* Axen-Schnittpunkte K_a und K_b hat, bestehen auch *zwei* Normalschnitt-Ebenen, welche beide durch die Punkte A und B gehen.

Dieses verhält sich genauer so:

Die Normalschnitt-Ebene im Punkte A ist diejenige Ebene, welche durch die Normale $A\,K_a$ und durch den Punkt B geht, diese Ebene schneide die Ellipsoidfläche in einem Bogen $A\,a\,B$. Andererseits haben wir als Normalschnitt-Ebene im Punkte B diejenige Ebene, welche durch die Normale $B\,K_b$ und durch den Punkt A geht und die Ellipsoidfläche in dem Bogen $B\,b\,A$ schneidet. .

Es giebt mehrere besondere Fälle, in welchen die beiden Normalschnitte zwischen zweien Punkten zusammenfallen:

Erstens, wenn ein *Pol* der Erde als erster Punkt A gilt, und irgend ein anderer Erdpunkt als zweiter Punkt B, so ist der Meridian des Punktes B sowohl Normalschnitt von B nach A, als auch Normalschnitt von A nach B. Da jedoch die Erdpole nicht zugänglich sind, hat dieser Fall für uns keine praktische Bedeutung.

Zweitens, für irgend zwei Punkte, die auf demselben Meridian liegen, ist dieser Meridian auch Normalschnitt in zweifachem Sinne.

Drittens, wenn zwei Punkte unter gleichen Breiten φ liegen, so fallen auch die beiden Normalschnitt-Ebenen zusammen, weil dann die beiden Ax-Schnitte K_a und K_b der Normalen von A und von B nach Fig. 1, auf der Erdaxe identisch werden.

Von besonderem Interesse für unsere rechtwinkligen sphärischen Coordinaten ist auch noch der dem Falle gleicher Breiten φ verwandte Fall, dass ein Bogen $A\,B$ *rechtwinklig* auf dem Meridiane von A (oder von B) sei; in diesem Falle werden die Breiten von A und B zwar nicht gleich, aber doch im Vergleich mit der Ausdehnung des Bogens $A\,B$ selbst *nahezu gleich* sein, und wir werden deshalb, für die Ausdehnung unserer gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, die beiden Normalschnitte, welche die Ordinate y enthalten, als hinreichend zusammenfallend annehmen.

§ 63. Der verkürzte Breiten-Unterschied.

Von allen Wirkungen der Elliptizität der Erdoberfläche ist die bedeutendste, und niemals zu vernachlässigende, wenn überhaupt von der Elliptizität die Rede ist, die Abweichung zweier aufeinander folgender Normalen in einem Meridian, wodurch der Winkel δ entsteht, den wir schon im vorigen § 62. bei der obenstehenden Fig. 1. betrachtet haben.

Wir werden diesen Winkel δ nun näher untersuchen.

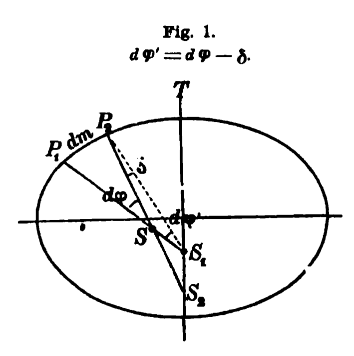


Fig. 1.
$d\varphi' = d\varphi - \delta$.

In Fig. 1. seien $P_1 S_1$ und $P_2 S_2$ zwei Normalen einer Meridian-Ellipse, welche sich nicht in der Umdrehungsaxe $T S_1$ sondern in einem anderen Punkte S schneiden, und zwar unter einem Winkel $d\varphi$, welcher gleich der Differenz der Breiten φ_1 und φ_2 beider Punkte P_1 und P_2 ist, d. h.:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi \tag{1}$$

Wenn ferner der Meridianbogen $P_1 P_2 = dm$ gesetzt wird, und der Meridian-Krümmungshalbmesser für die Mittelbreite $= M$ (d. h. nahezu $M = P_1 S = P_2 S$), so hat man auch:

$$dm = M\, d\varphi \tag{2}$$

Andererseits kann man in erster Näherung auch setzen:

$$dm = N\, d\varphi' \quad (\text{wo } P_1 S_1 = N) \tag{3}$$

Es ist also:

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{N}{M} \tag{4}$$

$$\delta = d\varphi - d\varphi' = d\varphi\left(1 - \frac{d\varphi'}{d\varphi}\right) = d\varphi\left(1 - \frac{M}{N}\right) \text{ oder } = d\varphi\,\frac{M}{N}\left(\frac{N}{M} - 1\right) \tag{5}$$

Hiebei ist nach (18) und (19) § 33. S. 210:

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi \tag{6}$$

Da das Produkt $e'^2 \cos^2 \varphi$ sehr häufig vorkommt, bezeichnen wir es besonders, indem wir setzen:

$$e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2 \quad , \quad \text{also } V^2 = 1 + \eta^2 \tag{7}$$

Damit wird nach (5):

$$\delta = \frac{d\varphi}{V^2}\,\eta^2 \tag{8}$$

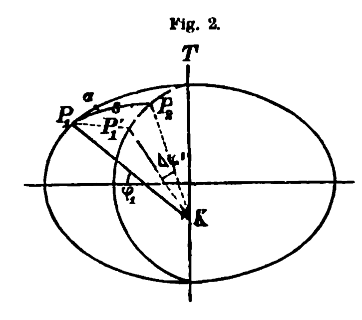


Fig. 2.

Diese Formeln geben Veranlassung, eine neue Benennung einzuführen für den Winkel $d\varphi'$ von Fig. 1., welcher mit der Bezeichnung $\Delta\varphi'$ auch in Fig. 2. wiederkehrt.

Wenn allgemeiner $\Delta\varphi$ ein kleiner Breiten-Unterschied ist, so ist der entsprechende auf die Erdaxe reduzierte Wert $\Delta\varphi'$ nach (4) und (6):

$$\Delta\varphi' = \frac{\Delta\varphi}{V^2} = \textit{verkürzter Breiten-Unterschied} \tag{9}$$

Zu jedem gegebenen kleinen Breiten-Unterschied kann man den entsprechenden „*verkürzten Breiten-Unterschied*" $\Delta\varphi'$ mit Hilfe von V^2 nach unserer Hilfstafel Seite [2]—[23] des Anhanges leicht berechnen; es sei z. B.: $\varphi_1 = 49°\,30'$, $\varphi_2 = 50°\,30'$, also $\Delta\varphi = 1° = 3600''$ und die Mittelbreite $\varphi = 50°\,0'$, dann hat man:

$\log \Delta\varphi$	3.556 303
von Seite [15]: $\log V^2$	0.001 204
$\log \Delta\varphi'$	3.555 099

$\Delta\varphi' = 3590{,}04''$
$\Delta\varphi' = 0^\circ\ 59'\ 50{,}04''$

Der verkürzte Breiten-Unterschied dient dazu, um in erster Näherung sphäroidische Bögen auf *einen* Erd-Mittelpunkt zu reduzieren.

In Fig. 2. ist K ein solcher Mittelpunkt; hat man nun einen Bogen $P_1 P_2 = s$, so kann man zuerst einen Centriwinkel σ berechnen:

$$\frac{s}{N} = \sigma \tag{10}$$

Dabei ist $N = P_1 K$ der Quer-Krümmungshalbmesser des Ausgangspunktes P_1.

Nun kann man auch die einfachen sphärischen Formeln von § 56. (5)—(10) S. 303—304 leicht auf das Ellipsoid übertragen, wenn man nur überall den verkürzten Breiten-Unterschied $\frac{\varphi' - \varphi}{V^2} = (\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}$ an Stelle des sphärischen Breiten-Unterschiedes setzt, und im übrigen einen Kugel-Halbmesser N zu Grunde legt. Die Aufgabe sei mit Bezugnahme auf Fig. 3. so gefasst:

Gegeben sind zwei Punkte auf dem Ellipsoid, mit den Breiten φ und φ' und mit dem Längen-Unterschied λ; es soll die Entfernung beider Punkte $= s$, linear auf dem Ellipsoid gemessen, und die beiden Azimute α und α' berechnet werden.

Fig. 3.

Die Anwendung des Prinzips des verkürzten Breiten-Unterschieds auf die Formeln (7)—(10) S. 303—304 giebt:

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin\frac{\varphi' + \varphi}{2} \tag{11}$$

$$\tang\frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\lambda\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2}}{(\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}} \tag{12}$$

$$\sigma = \frac{s}{N} = \frac{\lambda\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha' + \alpha}{2}} = \frac{(\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}}{\cos\frac{\alpha' + \alpha}{2}} \tag{13}$$

$$\sigma = \frac{s}{N} = \sqrt{\left((\varphi' - \varphi)\frac{M}{N}\right)^2 + \left(\lambda\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)^2} \tag{14}$$

Wir wollen diese Formeln etwas umstellen, und auch die nöthigen ϱ zusetzen, wodurch wir erhalten:

$$\tang\frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{N\lambda\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2}}{M(\varphi' - \varphi)} \tag{15}$$

$$s = \frac{\frac{N}{\varrho}\lambda\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha' + \alpha}{2}} = \frac{\frac{M}{\varrho}(\varphi' - \varphi)}{\sin\frac{\alpha' + \alpha}{2}} \tag{16}$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{N}{\varrho}\lambda\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{\varrho}(\varphi' - \varphi)\right)^2} \tag{17}$$

Die Haupt-Krümmungshalbmesser M und N, beide für die *Mittel*breite $\frac{\varphi+\varphi'}{2}$, setzen wir tabellarisch gegeben voraus (Hilfstafel Seite [2] bis [23] unseres Anhangs); dann ist es aber auch nützlich, den Faktor ϱ sofort mit M und N zusammen zu nehmen; und da diese Vereinigung noch sehr oft gebraucht werden wird, haben wir in unserem Anhange Seite [2] bis [23] folgende Hauptcoëfficienten-Logarithmen gebildet:

$$log \frac{\varrho}{M} = log\,[1] \qquad \text{und} \qquad log \frac{\varrho}{N} = log\,[2] \tag{18}$$

und damit erhält man folgende Gebrauchs-Formeln zu der in Fig. 3. angedeuteten Aufgabe:

$$\text{Gegeben} \quad \varphi,\ \varphi',\ \lambda \quad , \quad \text{Gesucht} \quad \alpha,\ \alpha',\ s \tag{19}$$

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \frac{\varphi'+\varphi}{2} \tag{20}$$

$$tang \frac{\alpha'+\alpha}{2} = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\frac{\varphi'-\varphi}{[1]}} \tag{21}$$

$$s = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \frac{\varphi'+\varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha'+\alpha}{2}} = \frac{\frac{\varphi'-\varphi}{[1]}}{\cos \frac{\alpha'+\alpha}{2}} \tag{22}$$

oder:

$$s = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{[2]} \cos \frac{\varphi'+\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi'-\varphi}{[1]}\right)^2} \tag{23}$$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir die zwei trigonometrischen Hauptpunkte der Stadt Hannover, welche nach Mitteilung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme von 1887 folgende geographische Coordinaten haben:

Ägidius . . .	$\varphi' = 52^\circ\ 22'\ 14{,}9611''$	$L' = 27^\circ\ 24'\ 24{,}6290''$	(24)
Wasserturm .	$\varphi = 52^\circ\ 21'\ 49{,}9080''$	$L = 27^\circ\ 22'\ 25{,}0168''$	
Differenzen	$\varphi' - \varphi = +0^\circ\ 0'\ 25{,}0531''$	$\lambda = 0^\circ\ 1'\ 59{,}6122''$	
	$= 25{,}0531''$	$= 119{,}6122''$	

$$\text{Mittel } \frac{\varphi'+\varphi}{2} = 52^\circ\ 22'\ 2{,}43455'' \tag{25}$$

$$= 52^\circ\ 22{,}0406'$$

Mit der Mittelbreite 52° 22,0406′ geht man in die Hilfstafel des Anhangs Seite [15] ein, und entnimmt durch Interpolation:

$$log\,[1] = 8.509\,9574 \qquad log\,[2] = 8.508\,8708 \tag{26}$$

und die weitere Rechnung nach den Formeln (20) — (23) giebt:

$$\frac{\alpha'+\alpha}{2} = 71^\circ\ 6'\ 37{,}69''$$

$$\frac{\alpha'-\alpha}{2} = 0^\circ\ 0'\ 47{,}36''$$

$$\alpha' = 71^\circ\ 7'\ 25{,}05'' \qquad log\ s = 3.378\,7016$$

$$\alpha = 71^\circ\ 5'\ 50{,}33'' \qquad s = 2391{,}672^m \tag{27}$$

Die Formel (13) wollen wir für späteren mehrfachen Gebrauch nochmals besonders herausheben in dieser Form:

$$\frac{\Delta\varphi}{V^2} = \sigma \cos\alpha_m = \frac{s}{N}\cos\alpha_m \tag{28}$$

Dabei ist $\Delta\varphi$ ein Breiten-Unterschied, $V^2 = 1 + \eta^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi_m$, $N = \frac{c}{V}$, und est ist φ_m die *Mittel*breite für die Bogen s, sowie auch α_m das *Mittel*-Azimut für diesen Bogen.

Man kann die Formeln (20) — (23) auch noch dadurch vervollständigen, dass man die sphärischen Korrektions-Glieder dritter Ordnung von § 57. hinzunimmt, so dass man z. B. aus unserer (20) und aus (18) § 57. S. 306 bilden würde:

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin\frac{\varphi' + \varphi}{2}\left(1 + \frac{(\varphi' - \varphi)^2}{8\varrho^2} + \frac{\left(\lambda\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)^2}{12\varrho^2}\right) \tag{29}$$

und dabei könnte man noch in dem Korrektions-Gliede statt $\frac{(\varphi' - \varphi)^2}{8\varrho^2}$ schreiben $\frac{(\varphi' - \varphi)^2}{8V^4\varrho^2}$; indessen wollen wir auf die Formel (29) und deren Schwester-Formeln uns hier nicht einlassen, weil wir solche Formeln später auf anderem und sichererem Wege erhalten werden.

Die Formeln (20) — (23) haben wir hier ohne viele Theorie gefunden und haben uns auch durch den Begriff der verkürzten Breiten-Differenz zweifellos überzeugt, dass wir dadurch *in erster Näherung* sphäroidische Formeln bekommen; indessen wie weit diese erste Näherung brauchbar ist, ob z. B. über das kleine Beispiel (24) — (27) erheblich hinausgegangen werden darf, das können wir auf diesem Wege nicht bestimmen, und deswegen sollen auch die Formeln (29) und ähnliche hier nicht weiter behandelt werden.

§ 64. Bestimmung der geographischen Coordinaten φ, λ aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y und umgekehrt.

Nachdem wir die rein *sphärischen* Beziehungen zwischen den geographischen Coordinaten und den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, bereits in § 53. und § 54. kennen gelernt haben, wird es nun nicht schwer sein, auch die *sphäroidischen* Beziehungen hiefür, wenigstens in erster Näherung herzustellen, was für die gewöhnlichen Fälle der Feld- und Landmessung genügt.

Zuerst behandeln wir die Rektifikation des Meridian-Bogens x zwischen den Breiten φ_0 und φ_1, wofür in (1) § 53. S. 288 die Gleichung gefunden wurde:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = x\frac{\varrho}{r} \quad \text{oder} \quad x = (\varphi_1 - \varphi_0)\frac{r}{\varrho} \tag{1}$$

Wenn die Abscisse x nicht auf einem *Kreis*bogen vom Halbmesser r, sondern auf dem Bogen einer Meridian-*Ellipse* abgewickelt wird, so kann man doch, wenn x nicht sehr gross ist, die Rechnung mit einem Kreisbogen führen, dessen Halbmesser aber dann gleich dem Meridian-Krümmungshalbmesser M für die *Mittel*breite $\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$

zu nehmen ist, wie wir bereits in § 35. ausführlich gezeigt haben (nämlich bei (10) — (12) S. 217—218 und bei (32) S. 222—223).

Wir haben dabei gefunden, dass der Fehler dieses Näherungs-Verfahrens in unseren Breiten nur etwa 6^{mm} auf 1° beträgt (vgl. die Hilfstafel für g, S. 223), so dass namentlich bei den kleinen Geltungsbereichen, welche z. B. die 40 Preussischen Kataster-Coordinatensysteme haben, jenes Verfahren ganz zulässig und zugleich sehr bequem ist.

Einige weitere Bemerkungen über Meridian-Bögen und Breiten-Differenzen werden wir nachher noch beifügen (S. 333).

Indem wir nun zu dem sphärisch-trigonometrischen Teile von § 53. — § 54. übergehen, finden wir, dass die Übertragung auf das Ellipsoid wesentlich erleichtert wird durch den Umstand, dass der Ordinaten-Bogen y, weil er rechtwinklig zum Ursprungs-Meridian ist, mit seinen Endpunkten in nicht wesentlich verschiedenen Breiten liegt, weshalb wir uns erlauben dürfen, von den *zwei* Normalschnitten, welche im allgemeinen zwischen zwei Punkten bestehen, abzusehen, und die Ordinate y zu betrachten als liegend auf einem *Kreisbogen*, dessen Halbmesser der Quer-Krümmungshalbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 ist.

Indem wir somit von der schon am Ende von § 62. erwähnten Besonderheit Gebrauch machen, legen wir allen sphärischen Formeln von § 53. — § 54. den genannten Quer-Krümmungshalbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 als Kugelhalbmesser zu Grunde, und haben dann nur noch für die früher φ_2 genannte sphärische Breite des Punktes P die Reduktion δ für verkürzte Breiten-Differenz anzubringen.

Um dieses sofort endgültig für unsere gegenwärtige Aufgabe (vgl. die nachfolgende Fig. 1.) zu erledigen, nehmen wir die Formel (2) S. 289 zur Hand, nämlich:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2\,r^2}\, tang\, \varphi_1 \tag{1}$$

Zuerst ist, wie schon erwähnt, für r der Quer-Krümmungshalbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 zu setzen, also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y}{2\,N_1^2}\, tang\, \varphi_1 \tag{2}$$

Diese Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ ist *sphärisch* berechnet, d. h. „*verkürzt*“ in dem früher in § 63. erörterten Sinne; die wirkliche Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi$ wird daher nach (8) § 63. S. 326:

$$\varphi_1 - \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \delta$$

$$\varphi_1 - \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{\eta^2(\varphi_1 - \varphi)}{V^2}$$

Da hier $V^2 = 1 + \eta^2$ ist, bekommt man:

$$(\varphi_1 - \varphi)\left(1 - \frac{\eta^2}{1+\eta^2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \text{oder} \quad \varphi_1 - \varphi = V^2(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{3}$$

Diese letzte Form (3) ist auch wieder dieselbe wie (4) § 63. S. 326, welche wir auch hier hätten zu Grunde legen können.

Indem somit diese Frage des verkürzten Breiten-Unterschiedes erledigt ist, haben wir aus (2) und (3):

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{V^2}{2}\,\frac{y^2}{N_1^2}\, tang\, \varphi_1 \tag{4}$$

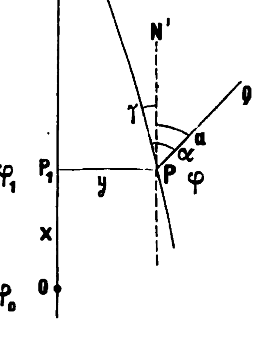
Es bleibt nur etwa die Frage noch übrig, für *welche* Breite φ_1 oder φ der Wert V^2 in (4) zu nehmen ist? Indessen ist unsere ganze Betrachtung von § 63. mit der Figur 1. S. 326, welche zu dem kleinen Winkel δ und entsprechend zu dem Faktor V^2 geführt hat, von vornherein nicht so scharf, dass wir die Frage φ_1 oder φ für V^2 entscheiden könnten; und praktisch ist dieses für unseren Fall gleichgültig, wie man sich am besten überzeugt, wenn man die geringen Beträge $\varphi_1 - \varphi$ und die entsprechenden kleinen Differenzen für aufeinanderfolgende $log\, V^2$ in unserer Hilfstafel, z. B. auf Seite [15] des Anhangs betrachtet. Immerhin hat φ_1 als Argument für V^2, vor φ den Vorzug, dass unter der Breite φ_1 *Berührung* des y-Bogens mit dem Parallelkreis stattfindet, und demnach nehme man den Faktor V^2 in (4) für die Breite φ_1.

Da wir nun nichts mehr weiter zu thun haben, als in den sphärischen Formeln von § 53. S. 288—290 überall N_1 statt r und φ statt φ_2 zu schreiben, erhalten wir mit Benützung des vorstehenden (1) und (4) und im Anschluss an nebenstehende Fig. 1. (überall mit Zusetzung der nötigen ϱ):

Gegeben φ_0 , x , y (5)

Gesucht φ_1 , φ , λ , $\gamma = \alpha - a$ (6)

Fig. 1.



Auflösung:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{x}{M}\varrho \qquad (7)$$

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{V^2}{2}\frac{y^2}{N_1^2}\varrho\, tang\, \varphi_1 \qquad (8)$$

(3) S. 289: $$\lambda = \frac{y}{N_1}\frac{\varrho}{cos\,\varphi_1} - \frac{y^3}{3\,N_1^3}\frac{\varrho}{cos\,\varphi_1}tang^2\varphi_1 \qquad (9)$$

(5) S. 290 oder: $$\lambda = \frac{y}{N_1}\frac{1}{cos\,\varphi} + \frac{y^3}{6\,N_1^3}\frac{\varrho}{cos\,\varphi}tang^2\varphi \qquad (10)$$

(4) S. 289: $$\gamma = \frac{y}{N_1}\varrho\, tang\,\varphi_1 - \frac{y^3}{6\,N_1^3}\varrho\, tang\,\varphi_1\,(1 + 2\, tang^2\varphi_1 \qquad (11)$$

(6) S. 290 oder: $$\gamma = \frac{y}{N_1}\varrho\, tang\,\varphi + \frac{y^3}{6\,N_1^3}\varrho\, tang\,\varphi\,(2 + tang^2\varphi) \qquad (12)$$

Nun wollen wir noch die Haupt-Coëfficienten [1] und [2] unserer Hilfstafel von S. [2]—[23] des Anhangs einführen, nämlich:

$$\frac{\varrho}{M} = [1] \text{ für die Mittelbreite } \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \qquad (13)$$

$$\frac{\varrho}{N_1} = [2] \text{ für die Fusspunkts-Breite } \varphi_1 \qquad (14)$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + [1]\,x \qquad (7^*)$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{([2]\,y)^2\,V^2}{2\,\varrho}tang\,\varphi_1 \qquad (8^*)$$

$$\lambda = \frac{[2]\,y}{\cos \varphi_1} - \left(\frac{[2]\,y}{\cos \varphi_1}\right)^3 \frac{1}{3\varrho^2} \sin^2 \varphi_1 \qquad (9^*)$$

$$\text{oder } \lambda = \frac{[2]\,y}{\cos \varphi} + \left(\frac{[2]\,y}{\cos \varphi}\right)^3 \frac{1}{6\varrho^2} \sin^2 \varphi \qquad (10^*)$$

$$\gamma = [2]\,y \tang \varphi_1 - \frac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^2} \tang \varphi_1 (1 + 2 \tang^2 \varphi_1) \qquad (11^*)$$

$$\text{oder } \gamma = [2]\,y \tang \varphi + \frac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^2} \tang \varphi (2 + \tang^2 \varphi) \qquad (12^*)$$

Nachdem wir so die Formeln von § 53. von der Kugel auf das Ellipsoid übertragen haben, kann keine Schwierigkeit bestehen, auch die Formeln von § 54. S. 292—293 so zu übertragen. Wir schreiben hiefür sofort die Ergebnisse:

Gegeben φ , λ (15)
Gesucht x , y , γ (16)

$$(1)\ \text{S. 292:}\quad \varphi_1 = \varphi + \frac{V^2}{2\,\varrho} \lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi \qquad (17)$$

$$(6)\ \text{S. 293:}\quad x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]} \qquad (18)$$

$$(2)\ \text{S. 292:}\quad y = \frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_1 + \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{3\varrho^2} \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \qquad (19)$$

$$\text{oder}\quad y = \frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{6\varrho^2} \cos \varphi \sin^2 \varphi \qquad (20)$$

$$(3)\ \text{S. 292:}\quad \gamma = \lambda \sin \varphi_1 - \lambda^3 \frac{1}{6\varrho^2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \qquad (21)$$

$$\text{oder}\quad \gamma = \lambda \sin \varphi + \lambda^3 \frac{1}{3\varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \qquad (22)$$

Nun geben wir auf S. 334 und 335 ein Zahlen-Beispiel sowohl für die Formeln (7*)--(12*), als auch für deren Umkehrung (17)—(22). Da die ganze Rechnung mit allen Einzelzahlen angegeben ist, wird zur Erklärung nichts weiter nötig sein; auch einige vorübergehend eingeführte Zwischen-Bezeichnungen (*a*), (*b*) u. dgl. erklären sich selbst als kleine Übergangshilfen, mit Rücksicht auf Raummangel. Wo der Raum nicht reichte, um bei den Logarithmen das Zeichen *log* vorzusetzen, soll der senkrechte Strich die Logarithmen andeuten. Die Coëfficienten-Logarithmen *log* [1], *log* [2], *log* V^2, *log* $(1 + 2\,t_1^2)$, *log* $(2 + t^2)$, sind aus den Hilfstafeln unseres Anhanges Seite [2]--[23] und Seite [36]—[37] entnommen.

Im Übrigen sei nur noch bemerkt, dass man das Vorzeichen von y oder λ nicht in der ganzen Rechnung durchführen muss, wie bei uns theoretisch nötig war, man braucht nur am Schlusse zu merken, dass y, λ und γ immer *gleiche* Zeichen haben.

Der im nachstehenden Beispiele S. 334 und 335 benützte Coordinaten-Nullpunkt *Celle* ist einer der 40 neueren preussischen Kataster-Nullpunkte, welcher in der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, S. 345 als Nr. 27. aufgeführt ist, jedoch mit etwas *anderen* Werten φ_0 und L_0 als die von uns auf S. 334 und 335 angegebenen, was darin seinen Grund hat, dass jene Angaben der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, S. 345 für Celle nur *vorläufig* waren, und inzwischen durch die endgültige Neu-

bestimmung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme vom Jahre 1887 ersetzt worden sind.

Meridianbögen und Breiten-Differenzen.

Bei den kleinen Geltungsbereichen unserer Preussischen Kataster-Coordinaten-Systeme wird die Beziehung zwischen der Abscisse x und der Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi_0$ hinreichend genau durch den Meridian-Krümmungshalbmesser M der Mittelbreite gegeben, nämlich:

$$x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varrho} M \quad \text{oder} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]}$$

wobei M der Meridian-Krümmungshalbmesser für die Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}$ ist, oder [1] der entsprechende Coëfficient nach (13) S. 331.

Dieses Verfahren haben wir in § 35. S. 217 und S. 222 — 223 mehrfach behandelt und z. B. unter 52° Mittelbreite mit Ausdehnung von 1° mit einem Fehler von 7^{mm} behaftet gefunden, der durch eine kleine Nebenrechnung beseitigt und auch auf weitere Ausdehnung in Rechnung gebracht werden könnte.

Indessen bei grösserer Ausdehnung empfiehlt sich andererseits sehr eine allgemeine *Tafel der Meridianbögen*, z. B. diejenige, welche von *F. G. Gauss* in dessen Werke „Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, Berlin 1876, II. Teil“, mitgeteilt wird von 1′ zu 1′, wovon wir in unserem Anhange Seite [26] einen Auszug von 10′ zu 10′ gegeben haben.

Bei Benützung einer solchen Tafel braucht man für den Coordinaten-Nullpunkt mit gegebener Breite φ_0 nur ein für allemal den Meridianbogen-Werth B_0 durch Interpolation zu bestimmen, um dann für jede andere Breite φ_1 den zugehörigen Wert B_1 und dann $x = B_1 - B_0$ zu finden.

Für den Wert $\varphi_0 = 52° \, 37' \, 32{,}6709''$, welcher zu dem Coordinaten-Nullpunkt Celle gehört, haben wir die fragliche Interpolation schon zweimal, beispielshalber aus anderer Veranlassung, behandelt, nämlich bei (3) S. 204 und (28) S. 221; es wurde beidemal in hinreichender Übereinstimmung gefunden $m = 5\,832\,371{,}045^m$ als Meridianbogen vom Äquator bis zu dem Punkte Celle.

Hat man längere Zeit mit Punkten *eines* Geltungsbereiches zu thun, so kann man auch noch weiteres allgemein tabellarisch vorbereiten, man kann z. B. auch eine Tafel berechnen, welche für gegebene Fusspunkts-Breite φ_1 sofort die Abscisse x giebt oder umgekehrt. Z. B. in der Gegend von Hannover-Linden, im Geltungsbereiche Celle, benützen wir folgende Hilfstafel:

				Δx
Celle	$\varphi_0 = 52° \, 37' \, 32{,}6709''$	$x =$	$0{,}000^m$	
	. . . .	. . . .		
	$\varphi_1 = 52° \; 30'$	$x =$	$-13\,990{,}705^m$	
				$1854{,}399^m$
	52 29		$-15\,845{,}104$	
				1854,393
	52 28		$-17\,699{,}497$	
				1854,388
	52 27		$-19\,553{,}885$	
				1854,382
	52 26		$-21\,408{,}267$	
				1854,378
	52 25		$-23\,262{,}645$	
				1854,372
	52 24		$-25\,117{,}017$	
				1854,367
	52 23		$-26\,971{,}384$	
				1854,361
	52 22		$-28\,825{,}745$	
				1854,357
	52 21		$-30\,680{,}102$	
				1854,351
	52 20		$-32\,534{,}453$	

Berechnung der geographischen Coordinaten φ, λ nebst γ, aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y.

Coordinaten Nullpunkt: *Celle* mit $\varphi_0 = 52° \; 37' \; 32{,}6709''$ $\quad L_0 = 27° \; 44' \; 54{,}8477''$

Gegeben *Ägidius* $y = -23\,271{,}813^m$ $\quad x = -28\,308{,}394^m$

Genäherte Berechnung von $\varphi_1 - \varphi_0$ aus x nach der Hilfstafel Seite [27] des Anhangs; mit rund $\varphi = 52^1/_2°$

$-20\,000^m$	:	$-10' \; 47{,}1''$
$-\;\;8\,000$	:	$-\;\;4' \; 18{,}85$
$-\;\;\;\;300$	:	$9{,}70$
$-\;\;\;\;\;\;8$	:	$0{,}24$
		$-15' \; 15{,}89''$

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} = 52° \; 29' \; 54{,}72'' = 52° \; 29{,}91'$$

$\varphi_0 = 52° \; 37' \; 32{,}67''$

Genähert $\varphi_1 = 52° \; 22' \; 16{,}78'' = 52° \; 22{,}28'$

Hiemit giebt die Hilfstafel des Anhangs Seite [15]:

$log\,[1] = 8.509\,9477{\cdot}2$ $\qquad log\,[2] = 8.508\,8706{\cdot}9$

$log\,V^2 = 0.001\,086$

Formeln:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + [1]\,x \qquad \varphi = \varphi_1 - \frac{([2]\,y)^2}{2\,\varrho}\,V^2\,tang\,\varphi_1$$

$$\lambda = \frac{[2]\,y}{cos\,\varphi_1} - \left(\frac{[2]\,y}{cos\,\varphi_1}\right)^3 \frac{1}{3\,\varrho^2}\,sin^2\varphi_1 \quad \text{oder:} \quad = \frac{[2]\,y}{cos\,\varphi} + \left(\frac{[2]\,y}{cos\,\varphi}\right)^3 \frac{1}{6\,\varrho^2}\,sin^2\varphi$$

$$\gamma = [2]\,y\,tang\,\varphi_1 - \frac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^2}\,t_1(1+2\,t_1^2) \quad \text{oder:} \quad = [2]\,y\,tang\,\varphi + \frac{([2]\,y)^3}{6\,\varrho^2}\,t\,(2+t^2)$$

Berechnung von φ:

$log\,[1]$	$8.509\,9477{\cdot}2$
$log\,x$	$4.451\,9152{\cdot}3_n$
$log\,[1]\,x$	$2.961\,8629{\cdot}5_n$

$[1]\,x = -915{,}9314''$

$log\,([2]\,y)^2$	$5.751\,402$
$log\,tang\,\varphi_1$	$0.113\,001$
$log\,V^2$	$0.001\,086$
$log\,\frac{1}{2\,\varrho}$	$4.384\,545$
$log\,(a)$	$0.250\,034$

$(a) = 1{,}7784''$

Celle $\varphi_0 =$	$52° \; 37' \; 32{,}6709''$
$+[1]\,x =$	$-\;\;0° \; 15' \; 15{,}9314$
$\varphi_1 =$	$52° \; 22' \; 16{,}7395''$
$-(a) =$	$-\;\;1{,}7784$
$\varphi =$	$52° \; 22' \; 14{,}9611''$

Ägidius (Hannover).

Berechnung von λ:

$log\,[2]$	$8.508\,8706{\cdot}9$
$log\,y$	$4.366\,8302{\cdot}2_n$
$log\,[2]\,y$	$2.875\,7009{\cdot}1_n$
$log\,cos\,\varphi_1$	$9.785\,7153{\cdot}5$
$log\,(b)$	$3.089\,9855{\cdot}6_n$

$(b) = -1230{,}2278''$

$(b)^3$	9.2700_n	$(b')^3$	9.2699_n
$sin^2\,\varphi_1$	9.7974	$sin^2\,\varphi$	9.7974
$\frac{1}{3\,\varrho^2}$	8.8940	$\frac{1}{6\,\varrho^2}$	8.5930
$-(c)$	7.9614	$+(c')$	7.6603_n
	$+0{,}0091''$		$-0{,}0046''$

$log\,[2]\,y$	$2.875\,7009{\cdot}1_n$
$log\,cos\,\varphi$	$9.785\,7202{\cdot}1$
$log\,(b')$	$3.089\,9807{\cdot}0_n$

$(b') = -1230{,}2141''$

$(b)-(c)$	$(b')+(c')$
$-1230{,}2278''$	$-1230{,}2141''$
$+\;\;\;\;0{,}0091$	$-\;\;\;\;0{,}0046$
$-1230{,}2187''$	$-1230{,}2187''$

$\lambda = -0° \; 20' \; 30{,}2187''$

Celle	$L_0 =$	$27° \; 44' \; 54{,}8477$
Ägidius	$L =$	$27° \; 24' \; 24{,}6290''$

Berechnung von γ:

$log\,[2]\,y$	$2.875\,7009{\cdot}1_n$
$log\,tang\,\varphi_1$	$0.113\,0011{\cdot}1$
$log\,(c)$	$2.988\,7020{\cdot}2_n$

$(c) = -974{,}3209''$

$([2]\,y)^3$	8.6271_n	$([2]\,y)^3$	8.6271_n
t_1	0.1130	t	0.1130
$(1+2\,t_1^2)$	0.6399	$(2+t^2)$	0.5661
$\frac{1}{6\,\varrho^2}$	8.5930	$\frac{1}{6\,\varrho^2}$	8.5930
$-(d)$	7.9730	$+(d')$	7.8992_n
	$+0{,}0094''$		$-0{,}0079''$

$log\,[2]\,y$	$2.875\,7009{\cdot}1_n$
$log\,tang\,\varphi$	$0.112\,9933{\cdot}7$
$-(c')$	$2.988\,6942{\cdot}8$

$(c) = 974{,}3035''$

$(c)-(d)$	$(c')+(d')$
$-974{,}3209''$	$-974{,}3035''$
$+\;\;0{,}0094$	$-\;\;0{,}0079$
$974{,}3115$	$-974{,}3114$

Meridian-Convergenz

$\gamma = -16' \; 14{,}311''$

Berechnung der rechtwinkligen Coordinaten x, y nebst γ, aus den geographischen Coordinaten φ, λ.

Coordinaten-Nullpunkt *Celle*	$\varphi_0 = 52° \; 37' \; 32{,}6709''$	$L_0 = \; 27° \; 44' \; 54{,}8477''$
Gegeben *Ägidius*	$\varphi = 52° \; 22' \; 14{,}9611''$	$L = \; 27° \; 24' \; 24{,}6290''$
Differenzen	$\varphi - \varphi_0 = - \; 15' \; 17{,}7098''$	$\lambda = - 0° \; 20' \; 30{,}2187''$
		$\lambda = - \; 1230{,}2187''$

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{V^2}{2\varrho} \lambda^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]} = x$$

Anhang Seite [15] giebt . . . .

$\log \lambda$	3.089 9823·2
$\log \lambda^2$	6.179 965
$\log \sin\varphi$	9.898 714
$\log \cos\varphi$	9.785 720
$\log V^2$	0.001 086
$\log \frac{1}{2\varrho}$	4.384 545
$\log (a)$	0.250 030

$(a) = 1{,}7784''$

φ	$= 52° \; 22' \; 14{,}9611''$
$+ (a)$	$+ \; 1{,}7784$
φ_1	$= 52° \; 22' \; 16{,}7395''$
Celle φ_0	$= 52° \; 37' \; 32{,}6709''$
$\varphi_1 - \varphi_0$	$= - \; 15' \; 15{,}9314$
	$= - \; 915{,}9314''$
$\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}$	$= 52° \; 29' \; 54{,}7052''$

Mit φ_1 giebt die Hilfstafel Seite [15] des Anhangs:

$\log [2] = 8.508\,8706{\cdot}9$

und mit $\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}$ giebt dieselbe Hilfstafel Seite [15]:

$\log [1]$	8.509 9477·2
hiezu $\log (\varphi_1 - \varphi_0)$	2.961 8629·5
$\log x$	4.451 9152·3

$x = 28308{,}394^m$

$$y = \frac{\lambda}{[2]} \cos\varphi_1 + \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{3\varrho^2} \cos\varphi_1 \sin^2\varphi_1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\lambda}{[2]} \cos\varphi - \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{6\varrho^2} \cos\varphi \sin^2\varphi$$

$1:[2]$	1.491 1293·1	(b)	4.3668
λ	3.089 9823·2$_n$	λ^2	6.1800
$\cos\varphi_1$	9.785 7153·5	$\sin^2\varphi_1$	9.7974
(b)	4.366 8269·8$_n$	$\frac{1}{3\varrho_1}$	8.8940
			9.2382

$- 23\,271{,}900$
$+ 0{,}087$
$y = - 23\,271{,}813$

$1:[2]$	1.491 1293·1	(b')	4.3668
λ	3.089 9823·2$_n$	λ^2	6.1800
$\cos\varphi$	9·785 7202·1	$\sin^2\varphi$	9.7974
(b')	4.366 8318·4$_n$	$\frac{1}{6\varrho^2}$	8.5930
			8.9372

$- 23\,271{,}639$
$- 0{,}173$
$y = - 23\,271{,}812$

$$\gamma = \lambda \sin\varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6\varrho^2} \sin\varphi_1 \cos^2\varphi_1 \quad \text{oder} \quad \gamma = \lambda \sin\varphi + \frac{\lambda^3}{3\varrho^2} \sin\varphi \cos^2\varphi$$

λ	3.089 9823·2$_n$	$\lambda \sin\varphi_1$	2.9887
$\sin\varphi_1$	9.898 7164·6	λ^2	6.1800
$\lambda \sin\varphi_1$	2.988 6987·8$_n$	$\cos^2\varphi_1$	9.5714
		$\frac{1}{6\varrho^2}$	8.5930
			7.3331

$- 974{,}3136''$
$+ 0{,}0022''$
$\gamma = - 974{,}3114''$

λ	3.089 9823·2$_n$	$\lambda \sin\varphi$	2.9887
$\sin\varphi$	9.898 7135·7	λ^2	6.1800
$\lambda \sin\varphi$	2.988 6958·9$_n$	$\cos^2\varphi$	9.5714
		$\frac{1}{3\varrho^2}$	8.8940
			7.6341

$- 974{,}3072''$
$- \; 0{,}0043''$
$\gamma = - 974{,}3115''$

$\gamma = - 16' \; 14{,}3114''$

Schluss-Ergebnis: Ägidius $y = - 23\,271{,}813^m$ $\quad x = - 28\,308{,}394^m$

Meridian-Konvergenz $\gamma = - 16' \; 14{,}311''$

Die Abscissen eines solchen Coordinaten-Systems können *beliebig lang* sein, sie könnten, wenn es gewünscht würde, über die ganze Erde, vom Südpol über den Äquator bis zum Nordpol, hingehen, wenn man eine Tafel der durchgehenden Meridianbögen benützt.

Dieses ist ein wesentlicher Unterschied gegen die *Ordinaten*, welche, wir wir auf S. 279 gesehen haben, bei unseren Genauigkeitsansprüchen nicht über 60 000^m sein dürfen.

Die Abscissen brauchen auch *keinen* bestimmten auf der Erde als trigonometrischen Beobachtungspunkt bezeichneten Anfangspunkt zu haben.

Als im Jahre 1887 das Coordinaten-System der Lindener Vermessung noch nicht entschieden war, machten wir beispielshalber eine Berechnung mit einer x-Axe, welche als Meridian für die Länge rund $L = 28° \; 0' \; 0''$ angenommen wurde. Dabei war gegeben:

Ägidius	$\varphi = 52° \; 22' \; 14{,}9611''$	$L = 27° \; 24' \; 24{,}6290''$	(23)
Wasserturm	$52° \; 21' \; 49{,}9080''$	$27° \; 22' \; 25{,}0168''$	

Damit wurde nach dem Schema S. 335 berechnet:

Ägidius	$y = -40\,394{,}10^m$	$x = 5\,804\,173{,}28^m$	(24)
Wasserturm	$-42\,663{,}42^m$	$5\,803\,418{,}07^m$	

Als Axe der x dient, wie schon erwähnt, der Meridian für rund 28° Länge, und die x selbst sind in (24) vom Äquator der Erde an gezählt, wobei aber begreiflich, für verschiedene Zwecke der konstante Betrag 5 000 000^m, oder auch noch mehr, weggelassen werden kann.

Rechnungs-Formular der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881.

Da in Preussen die Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in Form von geographischen Coordinaten geschehen, der Feld- und Landmesser aber rechtwinklige Coordinaten haben muss, kommt die gegenseitige Verwandlung solcher Coordinaten so oft vor, dass die Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, hiefür ein Formular nebst Regeln gegeben hat, nämlich „Trig. Form. 6. Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Koordinaten aus den geographischen Koordinaten" (Reichsdruckerei, Berlin SW, Oranienstrasse 90/91, vgl. unseren II. Band, S. 194).

Ein ausgefülltes Beispiel und Regeln dazu giebt die Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, S. 141—145.

Dieses Formular 6. der Anweisung IX. betrifft nur die Verwandlung der geographischen Coordinaten in rechtwinklige Coordinaten, und nicht umgekehrt; auch ist die Berechnung der Meridian-Konvergenz in dem Formular 6. nicht mit aufgenommen. Dieses Formular behandelt in besonderer, seinen Zwecken entsprechender Form, im wesentlichen dasselbe, was in unseren vorstehenden Gleichungen (17), (18), (19) S. 332 enthalten ist.

In Fig. 2. S. 337 sind die Bezeichnungen von Seite 141 der Anweisung IX. eingeschrieben, es ist nämlich:

φ_0 die Breite des Coordinaten-Ursprungs,
φ_I die Breite des Ordinaten-Fusspunktes,
φ die Breite des gesuchten Punktes,
λ_0 die Länge des Coordinaten-Ursprungs,
λ die Länge des gesuchten Punktes,
x und y sind die gesuchten Coordinaten.

Dabei ist x von φ_0 bis φ_f auf dem Meridian nördlich positiv, südlich negativ gezählt und y rechtwinklig zum Meridian östlich positiv, westlich negativ gezählt.

Die Aufgabe lautet: Aus gegebenen φ_0, φ, λ_0, λ die Coordinaten x, y zu berechnen.

Die Differenz $\lambda - \lambda_0$ ist in Sekunden verwandelt, mit η'' bezeichnet, und weiter kommt die Breiten-Differenz $\varphi_f - \varphi = \psi''$ in Betracht, welche aus η'' berechnet wird nach der Formel

$$\psi'' = \eta''^2 q \tag{25}$$

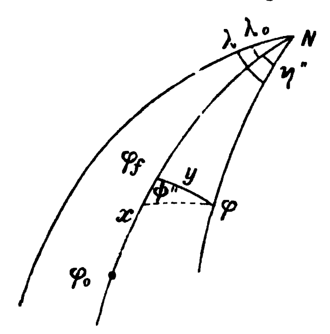
Dieses entspricht unserer Formel (17) S. 332 für $\varphi_1 - \varphi$, d. h.:

$$\varphi_1 - \varphi = \lambda^2 \frac{V^2}{2\varrho} \sin\varphi \cos\varphi \tag{26}$$

Daraus ergiebt sich, dass der Faktor q in der Formel (25), ausgedrückt in unseren Bezeichnungen der Formel (26), diese Bedeutung hat:

$$q = \frac{V^2}{2\varrho} \sin\varphi \cos\varphi \tag{27}$$

Fig. 2.
Bezeichnungen der Anweisung IX.



Nachdem man ψ'' zu φ addiert, und damit φ_f erhalten hat, kann man aus der Differenz $\varphi_f - \varphi_0$ die Abscisse x berechnen. Die Anweisung IX. bedient sich hiezu der schon oben (S. 333) von uns zitierten und beschriebenen Hilfstafel von *F. G. Gauss*.

Um vollends die Ordinate y zu erhalten, rechnet das Formular 6. der Anweisung IX. mit Längen-Sekunden L und mit Additamenten, wodurch in anderer Form dasselbe erhalten wird, wie durch die Reihen-Entwicklung (19) S. 332.

Zusammenstellung der Azimute und der Richtungswinkel für die Linie Wasserturm-Ägidius.

Unser mehrfach benütztes Beispiel Wasserturm-Ägidius, das in Fig. 3. S. 338 dargestellt ist, soll die Beziehungen zwischen Azimuten und Richtungswinkeln klar machen.

In Fig. 3. ist Celle, nordöstlich von Hannover, der Nullpunkt, auf welchen sich die rechtwinkligen Coordinaten von W und A beziehen; es sind also AA' und WW' *Parallelen* zu dem Meridian von Celle, folglich $W'WA = a$ und $WAA'' = a'$ die Richtungswinkel der Geraden WA in W und A, d. h. diejenigen Winkel, welche in Fig. 1. S. 261 mit α und α' bezeichnet waren, während wir jetzt, *mit Änderung der Bezeichnungen*, die Richtungswinkel mit a, dagegen die Azimute mit α bezeichnen, so dass die Meridian-Konvergenzen in W und A diese sind:

$$-\gamma = \alpha - a \quad , \quad -\gamma' = \alpha' - a' \tag{28}$$

Wir bemerken, dass hier γ und γ' negativ sind im Vergleich mit γ in Fig. 1. S. 331, weil in unserem neuen Falle Fig. 3. die Ordinaten y negativ sind, und γ stets das Vorzeichen von y hat.

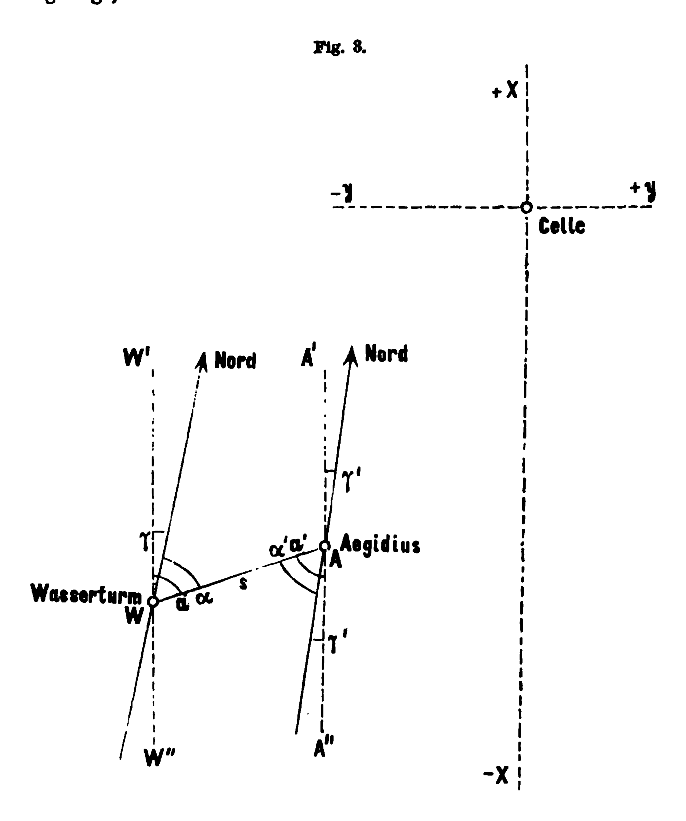
Der Gang unserer Berechnungen ist nun dieser:

Von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme wurde am Ende 1887 mitgeteilt:

Punkt	Geogr. Breite	Geogr. Länge	
Celle, Stadtkirche	52° 37′ 32,6709″	27° 44′ 54,8477″	(29)
Ägidius (Hannover) . . .	52° 22′ 14,9611″	27° 24′ 24,6290″	
Wasserturm (Linden) . . .	52° 21′ 49,9080″	27° 22′ 25,0168″	

Wie man hieraus, unter Annahme des Punktes Celle als Coordinaten-Nullpunkt, die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes Ägidius berechnet, haben wir auf S. 335 ausführlichst gezeigt, und da man für den zweiten Punkt Wasserturm dieselbe Berech-

Fig. 8.



nung machen kann, ist nachgewiesen, auf welche Weise man zu den rechtwinkligen Coordinaten von Ägidius und Wasserturm gelangt, nämlich:

Ägidius . . .	$y' = -23\,271{,}813^m$	$x' = -28\,308{,}394^m$	(30)
Wasserturm . .	$y = -25\,538{,}489^m$	$x = -29\,071{,}472^m$	
Differenzen	$+2266{,}676$	$+763{,}078$	

*) In der Figur auf S. 698 des II. Bandes sind infolge eines Versehens, die zwei Punkte Ägidius und Wasserturm verwechselt. Auch weichen unsere jetzt mitgeteilten Berechnungen in der letzten Stelle der Coordinaten teilweise um 1^{mm} von der früheren Berechnung ab, was nur auf verschiedener Abrundung beruht und sachlich völlig gleichgültig ist.

Dadurch ist die Linie Wasserturm-Ägidius nach Entfernung und Richtung festgelegt, nämlich im ebenen rechtwinkligen Coordinatensystem:

$$log\ WA = 2.378\,7020 \qquad WA = s = 23\,91{,}674^m \qquad (31)$$

$$a = (WA) = 71°\ 23'\ 39{,}0'' \qquad a' = (AW) \pm 180° = 251°\ 23'\ 39{,}0'' \qquad (32)$$

Andererseits haben wir in (27) § 63. S. 328 gefunden:

$$s = 2391{,}672^m \qquad (33)$$

$$\alpha = 71°\ 5'\ 50{,}3'' \qquad \alpha' = 71°\ 7'\ 25{,}0'' \qquad (34)$$

Die Vergleichung von (32) und (34) giebt:

$$a - \alpha = 17'\ 48{,}7'' \qquad a' - \alpha' = 16'\ 14{,}0'' \qquad (35)$$

Dieses muss stimmen mit der Berechnung von γ auf S. 335 für Ägidius und mit der entsprechenden Berechnung für Wasserturm, nämlich:

$$\gamma = -17'\ 48{,}9'' \qquad \gamma' = -16'\ 14{,}3'' \qquad (36)$$

Dass hier zwischen (35) und (36) noch kleine Differenzen bis zu 0,3″ vorkommen, hängt damit zusammen, dass schon die Rechnung von S. 335 nicht unbedingt auf 1^{mm} sicher ist, weshalb auch (31) und (33) um 2^{mm} differieren.

Wenn man überhaupt bedenkt, dass bei solchen Verhältnissen wie in Fig. 3. die letzten Stellen $0{,}001^m$ und 0,1″ gar keinen inneren Sinn mehr haben, sondern nur als überschüssige Kontrollstellen für die vorhergehenden $0{,}01^m$ und 1″ mitgeführt werden, so wird man sagen: die Proben (31) und (33) sowie (35) und (36) stimmen.

§ 65. Gemarkungs-Karte mit geographischen Netzlinien.

Wenn der Plan einer Stadt oder einer Feldmark in rechtwinkligen sphärischen Coordinaten bearbeitet ist, was gewöhnlich in grossem Massstab geschieht, so dass viele Einzelblätter entstehen, so kann man daraus auch Übersichtskarten und topographische Karten kleinen Massstabes herstellen, in welchen immer wieder das quadratische Netz der rechtwinkligen Coordinaten den festen Rahmen für die Zeichnung und Vervielfältigung bietet.

Bei *topographischen* Karten, etwa in 1 : 10 000 bis 1 : 25 000 und wohl auch schon bei Stadt-Übersichtskarten in 1 : 5 000 bis 1 : 10 000 verlangt man aber wegen des Anschlusses an die allgemeine Landes-Topographie, und zur allgemeinen geographischen Orientierung, die Einzeichnung von Meridianen und Parallelkreisen für runde Werte der geographischen Längen und der geographischen Breiten, oder kurz, die Einzeichnung von geographischen Netzlinien, welche die Karte in geographische Trapeze einteilen.

Die Bestimmungsstücke hiefür bekommt man durch die Formeln, welche wir in § 64. entwickelt und durch die Rechenschemate S. 334 und S. 335 erläutert haben. Insbesondere das zweite Schema S. 335 wird hier gebraucht, indem man für gegebene *runde* Werte der Längen und Breiten L und φ die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten y und x berechnet, und darnach die Trapez-Ecken in das rechtwinklige Coordinaten-System einträgt.

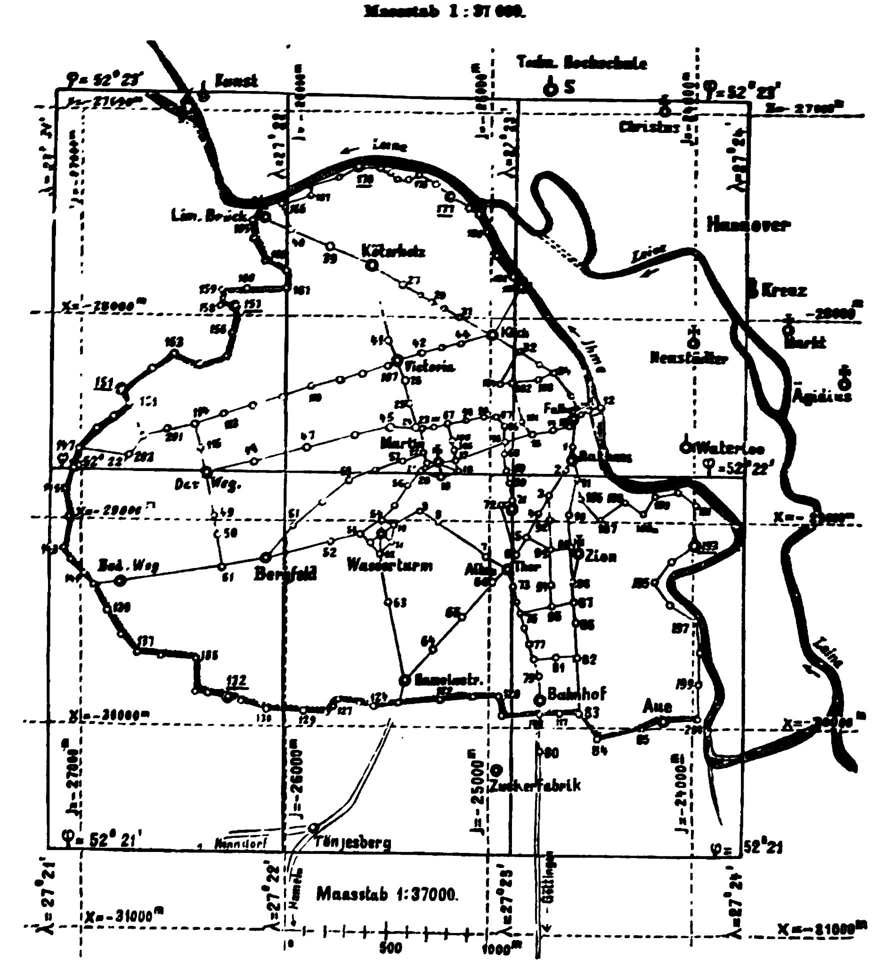
Als Beispiel hiefür nehmen wir die Karte der Stadt und Gemarkung *Linden* bei Hannover, deren Aufnahme wir in den Jahren 1887—1889 gemacht haben, wie schon in unserem II. Bande, S. 228 und S. 305 gezeigt worden ist.

In Fig. 1. betrachten wir zuerst die Weiterentwicklung der Polygon-Aufnahme, deren innerer Teil schon auf S. 305 unseres II. Bandes mitgeteilt war.

Fig. 1.

Übersichtskarte der Stadt und Feldmark Linden bei Hannover mit Coordinaten-Netzlinien und mit geographischen Netzlinien.

Maasstab 1 : 37 000.



Wir haben auch bereits auf S. 698 des II. Bandes mitgeteilt, dass im Jahre 1888 ein neues Coordinaten-System mit dem Nullpunkt *Celle* eingeführt wurde, und dem entsprechend giebt unsere neue Figur 1. nun die früheren Teile auf Celle umgerechnet, und auch die neuen Teile, das Gemarkungs-Umfangspolygon, in dem *neuen* System Celle dargestellt und berechnet.

Die Gemarkung liegt etwa zwischen den geographischen Längen 27° 21′ und 27° 24′ und zwischen den geographischen Breiten 52° 21′ und 52° 23′, sie umfasst also 6 Minuten-Abteilungen; und wir haben für die 12 Ecken des entsprechenden Minuten-Netzes die rechtwinkligen Coordinaten y und x nach dem Schema von S. 335 berechnet, wie in folgender Übersicht angegeben ist, welche zugleich auch die Meridian-Konvergenzen γ enthält.

Rechtwinklige Coordinaten für das geographische Netz der Gemarkungs-Karte von Linden, Fig. 1. S. 340.

	$\lambda = 27° 21'$	$\lambda = 27° 22'$	$\lambda = 27° 23'$	$\lambda = 27° 24'$
$\varphi = 52° 23'$	$y = -27\,135{,}04^m$ $x = -26\,896{,}63^m$ $\gamma = -18' 56{,}6''$	$y = -26\,000{,}36^m$ $x = -26\,902{,}74^m$ $\gamma = -18' 9{,}0''$	$y = -24\,865{,}68^m$ $x = -26\,908{,}61^m$ $\gamma = -17' 21{,}5''$	$y = -23\,731{,}00^m$ $x = -26\,914{,}22^m$ $\gamma = -16' 34{,}0''$
$\varphi = 52° 22'$	$y = -27\,145{,}25^m$ $x = -28\,750{,}98^m$ $\gamma = -18' 56{,}3''$	$y = -26\,010{,}14^m$ $x = -28\,757{,}09^m$ $\gamma = -18' 8{,}8''$	$y = -24\,875{,}04^m$ $x = -28\,762{,}96^m$ $\gamma = -17' 21{,}3''$	$y = -23\,739{,}94^m$ $x = -28\,768{,}56^m$ $\gamma = -16' 33{,}8''$
$\varphi = 52° 21'$	$y = -27\,155{,}47$ $x = -30\,605{,}30^m$ $\gamma = -18' 56{,}1''$	$y = -26\,019{,}93^m$ $x = -30\,611{,}45^m$ $\gamma = -18' 8{,}6''$	$y = -24\,884{,}40^m$ $x = -30\,617{,}32^m$ $\gamma = -17' 21{,}0''$	$y = -23\,748{,}87^m$ $x = -30\,622{,}90^m$ $\gamma = -16' 33{,}5''$

Man kann diese Coordinaten in ihren Differenzen durch die Meridianbögen und Parallelbögen der Tafeln auf Seite [24] — [27] unseres Anhanges kontrollieren, z. B. in dem Meridian von $\lambda = 27° 21'$ haben wir:

$$\begin{array}{lll} \varphi = 52° 23' & x = -26\,896{,}63^m & \\ \varphi = 52° 22' & x = -28\,750{,}98^m & \Delta x = 1854{,}35^m \\ \varphi = 52° 21' & x = -30\,605{,}30^m & \Delta x = 1854{,}32^m \end{array}$$

Nach der Tafel Seite [26] des Anhangs ist zwischen 52° 20′ und 52° 30′ der Meridianbogen = 18 543,748^m, also für 1 Minute $m = 1\,854{,}37^m$, was mit den vorstehenden Werten Δx insofern genügend stimmt, als für genauere Rechnung schärfere Interpolation in der Tafel Seite [26] nöthig wäre, und eine kleine Abweichung zwischen m und Δx auch in der *Soldner*schen Projektion (entsprechend Fig. 2. S. 278) begründet ist.

Um auch die Ordinaten-Differenzen zu kontrollieren, kann man die Längen-Grade der Tafel Seite [24] — [25] des Anhangs benützen, wobei aber viel zu interpolieren wäre; sicherer geht man zu Wege durch die unmittelbare Berechnung von 1 Längenminute:

$$l' = \frac{N \cos \varphi}{\varrho'}$$

wo $\log \varrho' = 3.536\,2739$ ist, und $\log N$ aus der Hilfstafel Seite [14] des Anhangs gefunden wird, z. B. für $\varphi = 52° 23'$ findet man $\log N = 6.805\,5547$, und damit nach vorstehender Formel $l' = 1\,134{,}69^m$, während die Ordinaten auf dem Parallel von $\varphi = 52° 23'$ nach der obigen Tabelle geben:

$\lambda = 27° \; 21'$ $\quad y = -27\,135{,}04^m$
$\lambda = 27° \; 22'$ $\quad y = -26\,000{,}36^m$ $\quad \Delta y = 1134{,}68^m$
$\lambda = 27° \; 23'$ $\quad y = -24\,865{,}68^m$ $\quad \Delta y = 1134{,}68^m$
$\lambda = 27° \; 24'$ $\quad y = -23\,731{,}00^m$ $\quad \Delta y = 1134{,}68^m$

Diese Δy stimmen hinreichend mit dem vorhin berechneten $l' = 1134{,}69^m$.

Die Meridian-Konvergenzen γ, welche wir in der obigen Tabelle auch mit aufgenommen haben, wird man meist nicht alle brauchen, man kann sie etwa zur Kontrolle der Ordinatendifferenzen für konstantes λ benützen.

Bestimmung der magnetischen Missweisung.

Die Meridian-Konvergenz braucht man, wenn es sich darum handelt, die wahre Nordrichtung zu finden, z. B. um die magnetische Missweisung für Tachymetrie oder auch für weitere wissenschaftliche Zwecke zu bestimmen. Ein gutes Beispiel hiefür scheint folgendes zu sein.

Am 4. Oktober 1888 kam ein Beamter des Observatoriums in Wilhelmshaven, Herr Dr. Eschenhagen nach Hannover, um daselbst die magnetischen Konstanten, insbesondere auch die magnetische Missweisung zu bestimmen.

Wir führten denselben zu diesem Zwecke ins freie Feld der Lindener Gemarkung, auf den Punkt (157) unseres Umfangs-Polygons (nordwestlich in der Karte S. 340). Dieser Punkt war pothenotisch bestimmt, mit den Coordinaten:

$$(157) \quad y = -26\,250{,}684^m \qquad x = -27\,965{,}716^m$$

Damit berechneten wir nach dem Schema S. 335:

$$(157) \quad \varphi = 52° \; 22' \; 25{,}564'' \quad L = 27° \; 21' \; 47{,}063'' \quad \gamma = -18' \; 19{,}146''$$

Der Punkt (157) ist pothenotisch gegen 9 Punkte fest gelegt, und giebt nach der Ausgleichung den folgenden Abriss, in welchem mit a ein trigonometrischer Richtungs-Winkel, mit α ein astronomisches Azimut und mit $\gamma = \alpha - a$ die Meridian-Konvergenz bezeichnet ist.

Zielpunkt	a	γ	α
Techn. Hochschule S	54° 32′ 35″	— 18′ 19″	54° 14′ 16″
Christus-Turm	64 59 31		64 41 12
Markt-Turm	91 43 10		91 24 51
Neustädter-Turm	93 47 28		93 29 9
Ägidius-Turm	96 33 44		96 15 25
Kath. Kirche, Linden Turm . .	125 21 28		125 3 9
Martin-Turm	127 20 26		127 2 7
Wasser-Turm	147 12 55		146 54 36
Kunst	352 0 2		351 41 43

Alle diese 9 Punkte wurden mit dem magnetischen Instrument am 4. Oktober 1888 angezielt und dabei die Nadel abgelesen.

Die Vergleichung der Nadel-Ablesungen mit den Azimuten α gab im Mittel:

Magnetische Missweisung $= 12° \; 41{,}3'$

Punkt (157) der Gemarkung Linden, 4. Oktober 1888, vormittags 10 Uhr.

Bemerkung über die geographischen Coordinaten der preussischen Landes-Aufnahme.

Die geographischen Längen und Breiten, welche die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme veröffentlicht, stützen sich alle auf *einen* Fundamentalpunkt, die Sternwarte Berlin, bzw. deren Übertragung auf den benachbarten Triangulierungspunkt Rauenberg, woselbst auch ein die ganze Landes-Aufnahme orientierendes Azimut Marienturm bestimmt wurde. Die hiefür noch heute benützten Annahmen wurden im Jahre 1865 gemacht, und insbesondere dabei die geographische Länge der Sternwarte = 31° 3′ 41,25″ östlich von Ferro (d. h. 11° 3′ 41,25″ östlich von Paris) angenommen. Nach neueren telegraphischen Bestimmungen ist diese Länge erheblich anders, nämlich 31° 3′ 28,32″, oder um 12,93″ kleiner als die Annahme von 1865.

Diesen Betrag 12,93″ müsste man an *allen* Längenangaben der Landes-Aufnahme abziehen, wenn man dieselben mit neueren astronomischen Bestimmungen in Übereinstimmung bringen wollte. Indessen kämen dann noch viele andere Reduktionen für Lot-Abweichungen u. s. w. hinzu, und für die Feld- und Landmessung, wo es sich immer nur um *Differenzen* geographischer Längen handelt, kommt eine konstante Verschiebung überhaupt nicht in Betracht.

Einige weitere Zitate und neuere Angaben für Längen haben wir zusammengestellt in *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen“ I. S. 125 und *Jordan* „Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885“, S. [25]—[26]. Die neuesten Angaben über geographische Längen und Breiten von 192 Sternwarten, zusammengestellt von *Auwers*, giebt „Geographisches Jahrbuch“, XII. Band, 1888, herausgegeben von *Wagner*, Gotha 1888, S. 475—480. Ferner „Berliner Astr. Jahrbuch für 1890“, S. 379; für 1891, S. 385 u. s. w.

Die astronomischen Bestimmungen auf dem Fundamentalpunkt *Rauenberg* bei Berlin, insbesondere das für die Landes-Aufnahme massgebende Orientierungs-Azimut daselbst, sind in jüngster Zeit neu gemacht worden, und es hat namentlich das Azimut gegen früher die erhebliche Differenz 3,88″ ergeben. („Veröffentlichung des K. Preuss. geodätischen Instituts, Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung“, Berlin 1889, S. 186.)

§ 66. Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme des Deutschen Reiches.

Eine Übersicht der Deutschen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, welche zugleich ein gutes Stück Geschichte der Deutschen Vermessungen überhaupt vor Augen führt, haben wir in Fig. 1. S. 344 gebildet, durch Zusammentragen aller darüber zu erlangenden Mitteilungen. (Unser früheres Übersichts-Kärtchen von Band II S. 187 erscheint hiemit vervollständigt, und zugleich im Stich besser ausgeführt.)

Im Folgenden haben wir die aus verschiedenen Quellen gesammelten geschichtlichen Angaben über die verschiedenen Landes- und Provinzial-Coordinaten-Systeme zusammengestellt.

Bayern.

Das Bayerische Coordinaten-System wurde im Jahr 1810 von *Soldner* angelegt, mit der Mitte des nördlichen Frauenturms in München als Coordinaten-Ursprung, und dem Meridian dieses Punktes als Abscissen-Axe. Weiteres hierüber giebt das amtliche Werk: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873“. S. 253.

Dieses System gilt nur für das eigentliche rechtsrheinische Bayern; für die bayerische Pfalz gilt derselbe Nullpunkt *Mannheim* wie für Baden.

Die *eine* Bayerische Meridian-x-Axe, welche durch den Münchener Frauenturm geht, war zur Zeit der Anlage dieses Systems, da es sich nur um Messtisch-Aufnahmen in 1 : 5000 handelte, genügend, und für die Übersichtlichkeit des ganzen nützlich; während bei den heutigen Theodolit-Messungen Ordinatenlängen bis zu 170 000^m mit Verzerrungen von 0,00036 $\left(\frac{y^2}{2r^3}\right.$ s. S. 279$\left.\right)$ nicht mehr zulässig sind, weshalb nun für Bayern die Aufgabe vorliegt, unter Wahrung der alten Blatt-Einteilung der lithographierten Steuerblätter, in geeigneter Weise die Vermessung den neueren Anforderungen anzupassen.

Württemberg.

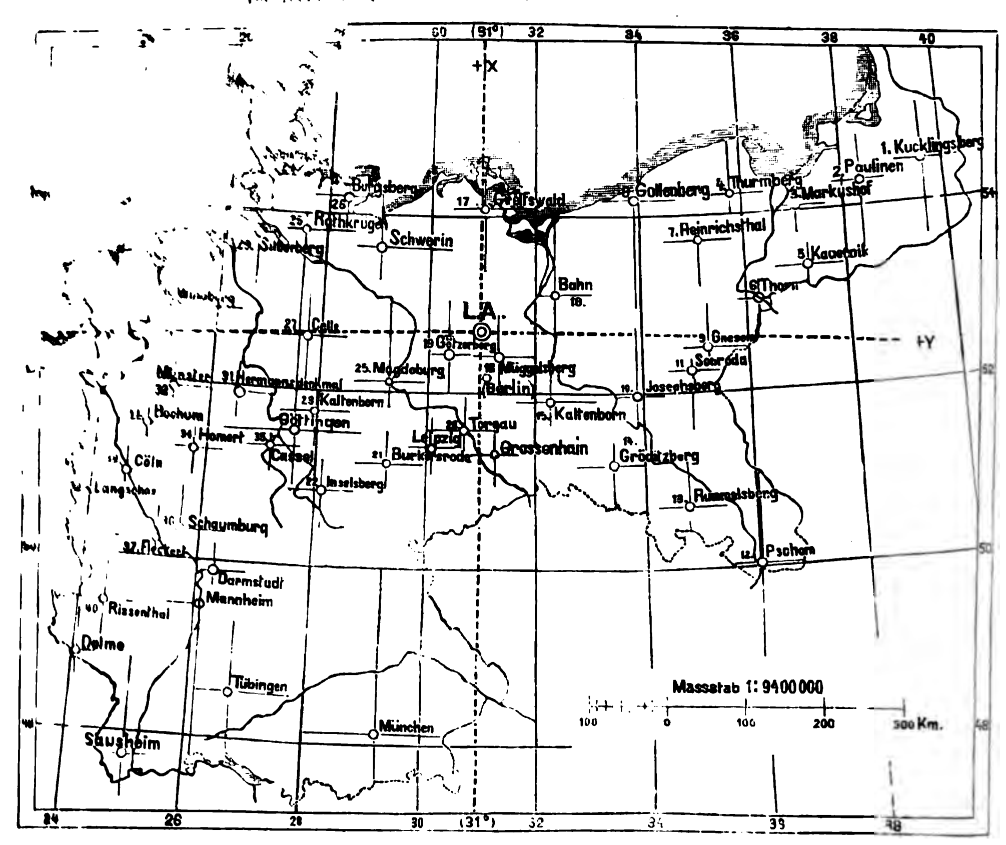
Die Sternwarte von Tübingen als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, und der Meridian von Tübingen, als x-Axe, wurde von *Bohnenberger* schon im vorigen Jahrhundert für seine Karte von Schwaben angenommen, das dabei orientierende Azimut Tübingen-Kornbühl wurde schon 1792 gemessen, und auch bis heute beibehalten, obgleich die Messung von 1819 eine Änderung um 15″ ergab, so dass also das heutige Württembergische System um 15″ gegen den Meridian von Tübingen verdreht ist.

Die ersten *Bohnenberger*schen rechtwinkligen Coordinaten im vorigen Jahrhundert waren als *eben* berechnet, was bei der damaligen geringen Winkelgenauigkeit ganz am Platze war; für die spätere *sphärische* Berechnung solcher Coordinaten giebt *Bohnenberger* selbst seinen süddeutschen Nachbar *Soldner* als Urheber an. Dagegen die Berechnung der *geographischen* Coordinaten aus rechtwinkligen Coordinaten hat *Bohnenberger* schon im Jahre 1802 ebenso genau gemacht, als es heute geschieht. (Alles, was wir hierüber Geschichtliches finden konnten, haben wir gesammelt und veröffentlicht in „*Jordan-Steppes*, Deutsches Vermessungswesen, 1882,“ I. S. 244—259.)

(Fortsetzung auf Seite 345.)

Fig. 1.

Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme des Deutschen Reichs.



1810	Baiern,	Coordinaten-Nullpunkt	München,
1792—1820	Württemberg	„ „	Tübingen,
1820—1840	Baden	„ „	Mannheim.
1830	Hessen-Darmstadt	„ „	Darmstadt,
1820—1840	Hannover	„ „	Göttingen,
1853	Kurhessen	„ „	Kassel,
1855	Nassau	„ „	Schaumburg,
1880	Mecklenburg	„ „	Schwerin,
1881	Preussen, 40 Coordinaten-Nullpunkte der Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881,		
1885	Sachsen,	Coordinaten-Nullpunkte	Grossenhain und Leipzig,
1889	Elsass-Lothringen	„ „	Delme und Sausheim.

1876 Allgemeines Coordinaten-System der trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landes-Aufnahme Nullpunkt (L. A.) auf dem 31ten Längengrad und auf der Breite 52° 42′ 2,53251″.

Baden.

Die topographische Vermessung des Grossherzogtums Baden wurde schon frühe auf *ein* rechtwinkliges Coordininaten-System bezogen, mit der Sternwarte in Mannheim als Nullpunkt und mit dem Meridian von Mannheim als x-Axe. Das zur Orientierung dienende Azimut Mannheim-Speyer (vgl. § 47. S. 267—268) ist schon im Jahre 1820 von *Nicolai* gemessen worden. Die Coordinaten waren früher als *eben* berechnet; das heutige sphärische rechtwinklige System der badischen Katastervermessung stammt etwa aus der Zeit von 1840 (vgl. *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen I," S. 274).

Hessen-Darmstadt.

In dem „Gesetz, die Vollendung des Immobiliar-Katasters betreffend" und Instruktion vom 30. Juni 1824, wird in Art. 8. bestimmt: „Sphäroidische Coordinaten, der Meridian von Darmstadt soll hiebei als Hauptaxe angenommen werden". Über einige Eigentümlichkeiten der Hessischen rechtwinkligen Coordinaten haben wir in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen I," S. 289, berichtet.

Hannover.

Für die Hannoversche Landesvermessung hat *Gauss* schon frühzeitig ein rechtwinkliges sphäroidisches konformes Coordinaten-System mit dem Ursprung Göttingen und dem Meridian von Göttingen als x-Axe angeordnet, dessen Theorie wir in erster Näherung in § 51. u. § 52. S. 281—287 behandelt haben. Dieses *Gauss*sche System wurde nun nach 1866 in 31 Partialsysteme zerfällt, mit Berücksichtigung der linearen Verzerrung der Projektion und der Meridian-Konvergenz. (Einiges weitere hierüber haben wir in der „Zeitschr. des Ing. und Arch.-Vereins zu Hannover, 1888", S. 150 156 mitgeteilt.)

Kurhessen.

Die Triangulierung von *Gerling* (s. o. S. 181) hatte kein rechtwinkliges Coordinaten-System, dagegen wurden die Längen und Breiten aller 48 Hauptpunkte im Anschluss an Göttingen berechnet (*Gerling*, „Beiträge zur Geographie Kurhessens, Cassel 1839", S. 200—204). An diese geographischen Coordinaten wurden dann von den Kataster-Behörden rechtwinklige Partial-Systeme angeschlossen, mit dem Kirchturm der jeweiligen Gemarkung als Ursprung und dem Meridian des jeweiligen Kirchturms als x-Axe. Wo der Anschluss an die Haupt-Triangulierung fehlte, mass man eine kleine Basis mit Messlatten und ein Azimut durch korrespondierende Sonnenhöhen, für jede Gemarkung besonders.

Als um das Jahr 1853 die General-Katastervermessungen in den Provinzen Hanau und Fulda ausgeführt und auf das übrige Hessen ausgedehnt werden sollten, wurden die geographischen Coordinaten der für Kataster-Vermessungen brauchbaren trigonometrischen Punkte in rechtwinklige sphärische Coordinaten für den Indifferenzpunkt Cassel, Martinsturm, umgerechnet.

(Vorstehendes ist zusammengestellt aus gütiger Mitteilung von Herrn Landesvermessungsrat *Kaupert*, sowie *Gehrmann*, in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen II.", S. 105.)

Thüringen-Gotha.

In einer Schrift „Über die Ergänzung der topographischen Aufnahme und Kartierung von Deutschland in Bezug auf Thüringen, von *C. Frhrn. von Gross*, Kammerherrn etc., Weimar 1848" ist auf S. 33—72 eine von dem Astronomen und Geodäten *Hansen* in Gotha verfasste „Instruktion für die Ausführung der Triangulation" veröffentlicht, welche in mancher Beziehung interessant ist, und in Hinsicht auf Coordinaten eine Meridian-x-Axe annimmt, von welcher die geographischen Längen nach Osten $+10'$, $+20'$ u. s. w., nach Westen $-10'$, $-20'$ u. s. w. gezählt werden. Auf diesem Meridian ist die Polhöhe 50° 36′ als Nullpunkt für die Abscissen x bestimmt. Die rechtwinkligen Coordinaten werden zuerst genähert als *eben* berechnet, ξ, η, S. 51, worauf noch Korrektionen von der Ordnung $\frac{s^2}{2r^2}$ $\left(\text{S. 53 } \varrho' = \frac{1}{2r^2}\right)$ hinzukommen, wodurch Coordinaten x, y erhalten werden, „auf der krummen Oberfläche der Erde, jedoch in einem etwas anderen Sinne, wie man diese Coordinaten früher aufgefasst hat" (S. 53). Die Theorie dieser Coordinaten wird nicht mitgeteilt, die angegebenen Formeln (S. 53) sind in Bezug auf x und y *symmetrisch* (was bei den *Soldner*schen Formeln nicht der Fall ist) und können durch Zufügung weiterer einfacher Glieder ebenfalls von der Ordnung $\frac{s^3}{r^3}$ (S. 72) in die rechtwinkligen ebenen Coordinaten der stereographischen Projektion übergeführt werden.

In den neueren Mitteilungen über die Thüringischen Vermessungen (*Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen, II.", S. 460—476) wird diese *Hansen*sche Instruktion von 1848 nicht erwähnt; es ist möglich, dass dieselbe mit ihren eigenartigen Coordinaten x y überhaupt nur Entwurf geblieben ist.

Nassau.

Das Herzogtum Nassau hat etwa um 1855 ein rechtwinkliges System mit dem Ursprung *Schaumburg* nach *Soldner*s Theorie angenommen. (Weiteres s. „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 315—316.)

Mecklenburg-Schwerin.

Die Landes-Vermessung hat etwa seit 1880 ein rechtwinkliges Coordinaten-System mit dem Schlossturm von Schwerin als Ursprung und dem Meridian des Schlossturms als x-Axe. Dieses rechtwinklige Coordinaten-System ist nicht das *Soldner*sche oder *Gauss*sche, sondern es beruht auf einer konformen *Kegel*-Abbildung und Abwicklung des Kegels in die Ebene.

Die amtlichen Quellen hiefür haben wir schon in unserem § 27. S. 187 angegeben und zitieren für das rechtwinklige Coordinaten-System noch besonders: „Gr. Meckl. Landes-Vermessung, II. Teil, 1882", S. VII—VIII und „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 363.

Preussen.

Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme grösserer Ausdehnung haben in Preussen verhältnismässig spät Eingang gefunden. In der Broschüre von General *Baeyer* „Mein Entwurf zur Anfertigung einer guten Karte u. s. w., Berlin 1868", welche für die geschichtliche Entwicklung des Preussischen Vermessungswesen die beste Quelle ist, werden die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, welche damals schon seit einem halben Jahrhundert sich in Süddeutschland bewährt hatten, nicht erwähnt.

Die „Anweisung vom 7. Mai 1868 für das Verfahren bei den Vermessungs-Arbeiten in den Provinzen Schleswig-Holstein, Hannover und Hessen-Nassau, zweite Ausgabe, Berlin 1870", sagt in § 40. S. 35: „Zum Zwecke des weiteren Gebranches der trigonometrischen Messungen ist die Lage der Dreieckspunkte gegeneinander nach rechtwinkligen Coordinaten zu berechnen, welche auf die wirkliche Mittagslinie eines nach der Bestimmung des Katasterinspektors hiezu zu wählenden geeigneten Punktes zu beziehen sind."

Die „Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, Berlin 1881, *R. v. Deckers* Verlag", giebt in dem Anhang S. 337—351 die „Bestimmungen vom 29. Dezember 1879 über den Anschluss der Spezial-Vermessungen an die trigonometrische Landes-Vermessung". Dadurch werden *40 Coordinaten-Nullpunkte* festgestellt, die wir in unserer Übersichtskarte S. 344 aufgezeichnet haben. (Die geographischen Coordinaten dieser 40 Nullpunkte mit ihren Geltungsbereichen sind u. A. auch abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 22.)

Sachsen.

Im Bereiche des Königreichs Sachsen sind auf unserer Übersichtskarte zwei Punkte, *Grossenhain* und *Leipzig* eingetragen, und zwar nach einer Mitteilung von Geh. Regierungsrat *Nagel* vom 5. Mai 1889, wornach als eigentlicher Nullpunkt für Sachsen der Pfeiler für den Basis-Zwischenpunkt ist, welcher den Namen Grossenhain führt. Der Pfeiler *B.* Leipzig auf der Pleissenburg in Leipzig gilt nur als Coordinatenanfang für die Leipziger Stadt-Vermessung.

Elsass-Lothringen.

Für die Kataster-Vermessung von Elsass-Lothringen wurden zwei Coordinaten-Nullpunkte angenommen, *Delme* und *Sausheim*, worüber eine erste Mitteilung von Vermessungs-Kontroleur *Rodenbusch* gemacht wurde in der „Zeitschr. f. Verm. 1888", S. 545—552. Die amtlichen Angaben hiezu sind enthalten in dem Werke: „Anweisung vom 30. Januar 1889 für das Verfahren bei der Stück-Vermessung von Gemarkungen zum Zwecke der Errichtung von Kataster-Urkunden, Strassburg 1889, Seite 9".

Überblickt man alle diese im Laufe von fast einem Jahrhundert angelegten Coordinaten-Systeme unseres Vaterlandes, so sieht man sofort, dass ihre Anlage nicht auf einer mathematisch-geodätischen Überlegung beruht, sondern, wie so vieles andere geschichtlich Gewordene, sozusagen dem Zufall, oder mit anderen Worten den unberechenbaren, in Verwaltungsbehörden u. s. w. wirkenden Ursachen seine heutige Form verdankt.

Auffällig ist u. A. bei den neueren Festsetzungen, dass niemals ein Meridian mit runder Länge als lang durchlaufende Abscissenaxe genommen ist, obgleich z. B. Celle, Kaltenborn und Inselsberg, oder Gollenberg und Josephsberg zusammen nahezu auf einem Meridian und nahe einem Meridian mit runder Länge liegen, so dass ein in Bezug auf x unbegrenztes System, wie wir es beispielshalber in (23)—(24) § 64. S. 336 berechnet haben, sich sehr empfohlen haben würde.

Das allgemeine konforme Coordinaten-System der preussischen Landes-Aufnahme.

Unabhängig von all den vorgenannten Landes- und Provinzial-Coordinaten-Systemen haben wir noch *ein* von der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme über ganz Preussen gelegtes rechtwinkliges konformes Coordinaten-System, dessen x-Axe der 31te Längengrad ist, mit dem Nullpunkt auf der Breite 52° 42′ 2,53251″ (entsprechend 42° 40′ Breite auf der Kugel der *Gauss*schen konformen Abbildung), der Nullpunkt dieses Systems ist auf unserer Karte S. 344 durch L.A. (Landes-Aufnahme) angedeutet. Zur Theorie sei hier nur bemerkt, dass unsere früheren, in § 51. entwickelten Formeln

die fragliche Theorie *in erster Näherung* darstellen. Die erste Mitteilung, welche über dieses grosse rechtwinklige Coordinaten-System in die Öffentlichkeit gekommen ist, besteht in dem Abschnitt, welchen General *Schreiber* veröffentlichen liess in dem Werke: „Deutsches Vermessungswesen von *Jordan-Steppes*, Stuttgart 1882, I." S. 151—154. Weiteres hierüber werden wir später behandeln.

Anmerkung zu § 62.—§ 66.

Wir haben in § 62.—65. mit möglichst wenig Theorie unsere früheren Entwicklungen so weit geführt, als zum Verständnis der deutschen Landes-Vermessungen mit ihren in § 66. beschriebenen Coordinaten-Systemen im allgemeinen nötig ist.

Insbesondere für Preussische Verhältnisse sei bemerkt, dass damit alles erledigt ist, was an höherer Geodäsie zur Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881 gebraucht wird.

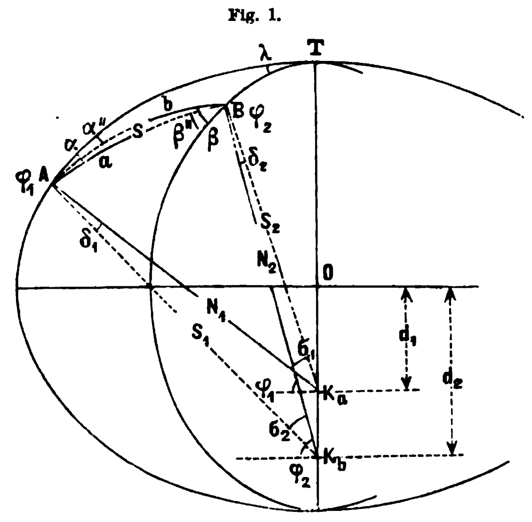
Wer als Feld- und Landmesser dieses Ziel auf möglichst kurzem Wege erreichen will, kann von unseren vorhergehenden Theorien zunächst die Abschnitte § 44., § 51.—52., § 55.—61. übergehen, insofern diese Abschnitte hauptsächlich Vorbereitung für die weitergehenden Theorien sind, zu denen wir nun mit § 67. uns wenden.

§ 67. Einführung eines sphärischen Hilfsdreiecks.*)

Nachdem wir schon in § 62. und § 63. ein sphärisches Hilfsdreieck benützt hatten, wollen wir den damals schon benützten Gedanken nun weiter ausführen.

Hiezu sind in Fig. 1. die Verhältnisse ausführlich dargelegt:

Fig. 1.



A und B sind zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, auf zwei Meridianen TA und TB, welche bei T den Längenunterschied λ zwischen sich fassen.

Die Breite von A sei φ_1 und die Breite von B sei φ_2; ferner sei AK_a die Normale von A und AK_b die Normale von B; die Axenschnitte K_a und K_b fallen nicht zusammen, wenn nicht etwa $\varphi_1 = \varphi_2$ ist.

Die Breiten φ_1 und φ_2 kommen bei K_a und K_b zum Ausdruck, denn es ist:

$$\text{Winkel } AK_aT = 90° - \varphi_1$$
$$BK_bT = 90° - \varphi_2$$

---

*) Den Grundgedanken eines solchen sphärischen Hilfsdreiecks, mit dem Centrierungswinkel δ, fanden wir in der Abhandlung „De computandis dimensionibus trigonometricis, in superficie terrae sphäroidica institutis etc. von Joan. Theophil. Friedr. *Bohnenberger*, Tübingae 1826, § 4.—9.", deren Hauptinhalt in unserer vorigen Auflage, 1878, § 65.—70. enthalten war. (Dieselbe ist inzwischen auch vollständig ins Deutsche übersetzt worden von *Hammer*: „Die Berechnung der trig. Vermessungen u. s. w., Stuttgart 1885.)

Unsere neue Bearbeitung geht über die *Bohnenberger*sche Abhandlung erheblich hinaus, und führt zu neuen und selbständigen Ergebnissen.

Diesem entsprechen die in Fig. 1. eingeschriebenen Zeichen φ_1 und φ_2, und es ist nur zu φ_2, sowie auch zu den sich selbst erklärenden Winkeln δ_1 und δ_2 sowie σ_1 und σ_2 zu bemerken, dass diese Zeichen zu den in *verschiedenen Ebenen* liegenden Winkeln gehören, und nicht etwa als Projektionen aufzufassen sind.

Ein Theodolit, in A richtig aufgestellt, wird seine vertikale Axe nach $A K_a$ gerichtet haben, und die Sicht nach B wird in $A a B$ erfolgen unter dem Azimut α. Zieht man auch noch $K_a B$, so ist das zwar nicht Normale in B, allein man hat nun doch ein Dreikant K_a, ABT mit der Spitze K_a, auf welches die sphärische Trigonometrie angewendet werden kann; die Seiten und Winkel dieses Dreikants, bzw. sphärischen Dreiecks, sind:

Eckpunkte	A		B		T		A	(1)
Winkel	α		$180°-\beta''$		λ			
Seiten		σ_1		$90° - (\varphi_2 - \delta_2)$		$90° - \varphi_1$		

In gleicher Weise kann man auch ein Dreikant mit der Spitze K_b bilden:

Eckpunkte	A		B		T		A	(2)
Winkel	α''		$180° - \beta$		λ			
Seiten		σ_2		$90°-\varphi_2$		$90° - (\varphi_1 + \delta_1)$		

Sobald je drei von diesen Stücken der Gruppen (1) und (2) gegeben sind, lassen sich die übrigen berechnen, und es ist wohl alles nach dem bisherigen geometrisch klar, mit Ausnahme der Winkel α'' und β''.

Während α und β zweifellos *Azimute* sind, d. h. Winkel zwischen Normalschnitten und einem Meridiane, und zwar sowohl für das Ellipsoid als auch für die beiden sphärischen Dreiecke, in welchen α und $180 - \beta$ vorkommen, ist dieses bei α'' und β'' nur noch der Fall für die *sphärischen* Hilfsdreiecke. aber nicht mehr für das Ellipsoid.

Z. B. der Winkel α'' kann als Azimut des Schnittes $A b B$ in A bezeichnet werden, allein nur bei Annahme eines fingierten Erdmittelpunktes K_b, welcher gar nicht in der Normalen von A liegt.

In Bezug auf das Ellipsoid hat der ebene Schnitt $A b B K_b$ im Punkte A überhaupt kein Azimut in dem gewöhnlichen Sinne, und wenn man dem Bogen $A b B$ dennoch auch in A ein ellipsoidisches Azimut zuteilen will, so kann man nur die *Tangente* des Bogens $A b B$ in A betrachten, indem man durch diese Tangente und die Normale $A K_a$ eine Ebene legt, welche mit der Meridian-Ebene $A T$ einen *anderen* Winkel α' bildet (der in Fig. 1. *nicht* angegeben ist).

Man kann schon jetzt überblicken, dass die beiden hier genannten Winkel α' und α'' nur sehr wenig von einander verschieden sind; dieses wird später (in § 69.) auseinandergesetzt werden; zunächst kam es nur darauf an, die geometrischen Begriffe völlig klar zu legen.

Nach diesem wollen wir an die Bestimmung der beiden kleinen Winkel δ_1 und δ_2 und der excentrischen Entfernungen S_1 und S_2 gehen.

Hiezu brauchen wir die mit d_1 und d_2 in Fig. 1. eingeschriebenen Abstände der Schnitte K_a und K_b vom Mittelpunkt des Ellipsoids.

Wenn y_1 die Ordinate von A ist, in dem Sinne der früheren Fig. 1. § 33. S. 208, und N_1 die Normale oder der Quer-Krümmungshalbmesser $A K_a$, so ist mit den Bezeichnungen von § 33. S. 210:

$$d_1 = N_1 \sin\varphi_1 - y_1 \quad , \quad N_1 = \frac{c}{V_1} \quad , \quad y = \frac{c\,(1-e^2)\sin\varphi_1}{V_1} \tag{3}$$

also:
$$d_1 = e^2 \frac{c \sin\varphi_1}{V_1}$$

und entsprechend: $d_2 = e^2 \dfrac{c \sin\varphi_2}{V_2}$

also:
$$d_2 - d_1 = e^2\, c \left(\frac{\sin\varphi_2}{V_2} - \frac{\sin\varphi_1}{V_1}\right) \tag{4}$$

Das schmale Dreieck $A K_a K_b$ von Fig. 1. giebt mit Verlängerung von $A K_a$:

$$\tang\delta_1 = \frac{(d_2-d_1)\cos\varphi_1}{N_1 + (d_2-d_1)\sin\varphi_1} = \frac{e^2\left(\dfrac{V_1}{V_2}\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right)\cos\varphi_1}{1+e^2\left(\dfrac{V_1}{V_2}\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right)\sin\varphi_1} \tag{5}$$

Die entsprechende Formel für δ_2 ist:

$$\tang\delta_2 = \frac{e^2\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\dfrac{V_2}{V_1}\right)\cos\varphi_2}{1-e^2\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\dfrac{V_2}{V_1}\right)\sin\varphi_2} \tag{6}$$

In ähnlicher Weise kann man auch die Entfernung S_1 nach Fig. 1. bestimmen:

$$S_1^2 = N_1^2 + (d_2-d_1)^2 + 2N_1(d_2-d_1)\sin\varphi_1$$

Mit Rücksicht auf (3) und (4) giebt dieses:

$$\left(\frac{S_1}{N_1}\right)^2 = 1 + 2e^2\left(\sin\varphi_2\frac{V_1}{V_2} - \sin\varphi_1\right)\sin\varphi_1 + e^4\left(\sin\varphi_2\frac{V_1}{V_2} - \sin\varphi_1\right)^2 \tag{7}$$

und für die andere Entfernung S_2:

$$\left(\frac{S_2}{N_2}\right)^2 = 1 - 2e^2\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\frac{V_2}{V_1}\right)\sin\varphi_2 + e^4\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \tag{8}$$

Diese Formeln (5), (6), (7), (8) sind streng richtig, und lassen sich auf beliebige Breiten φ_1 und φ_2 anwenden, wobei für $\log V_1^2$ und $\log V_2^2$ die Hilfstafel auf S. [2] — [22] unseres Anhangs angewendet werden kann

Indessen für kleine Breiten-Unterschiede empfiehlt sich Reihen-Entwicklung, zu welcher es nützlich ist, zuvor noch Umwandlungen vorzunehmen. Mit unseren gewöhnlichen Bezeichnungen, und weil $1 - e^2\sin^2\varphi_2 = (1-e^2)V_2^2$ ist, können wir (6) so schreiben:

$$\tang\delta_2 = \frac{e'^2\cos\varphi_2}{V_2^2}\;\frac{\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\dfrac{V_2}{V_1}\right)}{1 + e'^2\dfrac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{V_1 V_2}} \tag{9}$$

Die Reihen-Entwicklung macht sich am besten, wenn man die Mittelbreite einführt:

$$\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \varphi \quad \text{mit} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \varDelta\varphi \tag{10}$$

Zugleich setzen wir wie gewöhnlich:

$$\tang\varphi = t \quad , \quad e'^2\cos^2\varphi = \eta^2 \tag{11}$$

Damit erhält man:

$$\frac{V^2}{V_2^2} = 1 + \eta^2 \frac{\Delta\varphi}{V^2} t$$

$$\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \frac{V_2}{V_1} = \Delta\varphi \cos\varphi - \frac{\Delta\varphi^3}{24}\cos\varphi + \eta^2 \frac{\Delta\varphi}{V^2}\sin\varphi\, t - \eta^2 \frac{\Delta\varphi^2}{2}\cos\varphi\, t$$

Das übrige von (9) giebt sich leicht, und wenn man noch berücksichtigt, dass $1 - \eta^2 = \frac{1}{1+\eta^2} = \frac{1}{V^2}$, so findet man aus (9):

$$\delta_2 = \eta_2^2 \frac{\Delta\varphi}{V^2}\left\{1 - \frac{\Delta\varphi}{2V^2} t - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^2\right\} \tag{12}$$

Hier ist $V^2 = 1 + \eta^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi$ mit φ als *Mittel*breite; wenn man nach (10) statt φ überall φ_1 oder φ_2 einführt, so kann man statt (12) noch folgende zwei andere Formen finden:

$$\delta_2 = \eta_1^2 \frac{\Delta\varphi}{V_1^2}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{\Delta\varphi}{V_1^2} t_1 - \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta\varphi}{V_1^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{V_1^2}\right)^2 t_1^2\right\} \tag{13}$$

$$\delta_2 = \eta_2^2 \frac{\Delta\varphi}{V_2^2}\left\{1 + \frac{\Delta\varphi}{2V_2^2} t_2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{V_2^2}\right)^2\right\} \tag{14}$$

Dieselben Formeln (12), (13), (14) kann man auch zur Bestimmung von δ_1 benützen, denn es ist schon aus (5) und (6) zu ersehen, dass δ_1 und $-\delta_2$ gegenseitig ineinander übergehen, wenn man φ_1 und φ_2 gegenseitig vertauscht (also auch $\Delta\varphi$ negativ nimmt). Auf diese Weise erhält man aus (12), (13), (14):

$$\delta_1 = \eta^2 \frac{\Delta\varphi}{V^2}\left\{1 + \frac{\Delta\varphi}{2V^2} t - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{V^2}\right)^2\right\} \tag{12*}$$

$$\delta_1 = \eta_2^2 \frac{\Delta\varphi}{V_2^2}\left\{1 + \frac{3}{2}\frac{\Delta\varphi}{V_2^2} t_2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta\varphi}{V_2^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{V_2^2}\right)^2 t_2^2\right\} \tag{13*}$$

$$\delta_1 = \eta_1^2 \frac{\Delta\varphi}{V_1^2}\left\{1 - \frac{\Delta\varphi}{2V_1^2} t_1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{V_1^2}\right)^2\right\} \tag{14*}$$

In gleicher Weise kann man auch die Ausdrücke für $\frac{S_1}{N_1}$ und $\frac{S_2}{N_2}$ nach (7) und (8) in Reihen entwickeln; da wir aber δ_1 und δ_2 bereits entwickelt haben, können wir auch diese zur Entwicklung von $\frac{S_1}{N_1}$ und $\frac{S_2}{N_2}$ benützen, denn es ist z. B. nach Fig. 1.:

$$\frac{S_2}{N_2} = \frac{\sin(90° - \varphi_2)}{\sin(90° - (\varphi_2 - \delta_2))} = \frac{\cos\varphi_2}{\cos(\varphi_2 - \delta_2)} = 1 - \delta_2 \tan\varphi_2 + \ldots \tag{15}$$

Hier ist $\varphi_2 = \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}$, also mit $\tan\varphi = t$:

$$\tan\varphi_2 = t + \frac{\Delta\varphi}{2}(1 + t^2)$$

Nimmt man hiezu aus (12) abgekürzt:

$$\delta_2 = \eta^2 \frac{\Delta\varphi}{V^2} - \frac{\eta^2}{2}\Delta\varphi^2 t$$

so wird beim Einsetzen in (15) ein Glied mit $\Delta\varphi^2 t^2$ fortfallen und man hat:

$$\frac{S_2}{N_2} = 1 - \eta^2 \frac{\Delta\varphi}{V^2} t - \eta^2 \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \ldots \tag{16}$$

Wenn man in diesem Sinne weiter entwickelt,*) so findet man auf $\eta^4 \varDelta\varphi^2$ und $\eta^2 \varDelta\varphi^3$ einschliesslich genau:

$$\frac{S_2}{N_2} = 1 - \eta^2 \frac{\varDelta\varphi}{V^2} t - \frac{\eta^2}{2} \left(\frac{\varDelta\varphi}{V^2}\right)^2 (1 - \eta^2 t^2) + \frac{\eta^2}{6} \left(\frac{\varDelta\varphi}{V^2}\right)^3 t \tag{17}$$

Durch Zeichen-Änderung bekommt man hieraus auch:

$$\frac{S_1}{N_1} = 1 + \eta^2 \frac{\varDelta\varphi}{V^2} t - \frac{\eta^2}{2} \left(\frac{\varDelta\varphi}{V^2}\right)^2 (1 - \eta^2 t^2) - \frac{\eta^2}{6} \left(\frac{\varDelta\varphi}{V^2}\right)^3 t \tag{18}$$

In diesen beiden Formeln (17) und (18) bezieht sich $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ und $t = \operatorname{tang} \varphi$ auf die *Mittel*breite φ nach (10).

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir:

$$\left.\begin{array}{lll} & \varphi_1 = 49^\circ\, 30' & \varphi_2 = 50^\circ\, 30' \\ \text{also} & \varphi\ = 50^\circ\ \ 0' & \varDelta\varphi = 1^\circ = 3600' \end{array}\right\} \tag{19}$$

Damit wurde sowohl nach den geschlossenen Formeln als nach den verschiedenen Reihen berechnet:

$$\delta_1 = 10{,}06\,958'' \qquad \delta_2 = 9{,}86\,285'' \tag{20}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{S_1}{N_1} = 1{,}000\,057\,1638 & \dfrac{S_2}{N_2} = 0{,}999\,941\,9985 \\ \log \dfrac{S_1}{N_1} = 0{,}000\,0248{\cdot}252 & \log \dfrac{S_2}{N_2} = 9.999\,9748{\cdot}096 \end{array}\right\} \tag{21}$$

Wir haben auch noch die beiden unter (1) und (2) erwähnten sphärischen Dreiecke nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie ((4) und (5) S. 295) aufgelöst und gefunden:

I. Sphärisches Dreieck mit dem Kugelmittelpunkt K_a.

$$\varphi_1 = 49^\circ\, 30'\, 0'' \qquad \varphi_2 - \delta_2 = 50^\circ\, 29'\, 50{,}13715'' \tag{22}$$

$$\lambda = 1^\circ\, 0'\, 0''$$

$$\alpha = 32^\circ\, 25'\, 21{,}5294'' \qquad \beta'' = 33^\circ\, 11'\, 19{,}3674'' \tag{23}$$

$$\sigma_1 = 1^\circ\, 11''\, 11{,}22\,445'' \tag{24}$$

II. Sphärisches Dreieck mit dem Kugelmittelpunkt K_b.

$$\varphi_1 + \delta_1 = 49^\circ\, 30'\, 10{,}06958'' \qquad \varphi_2 = 50^\circ\, 30'\, 0'' \tag{25}$$

$$\lambda = 1^\circ\, 0'\, 0''$$

$$\alpha'' = 32^\circ\, 25'\, 21{,}4739'' \qquad \beta = 33^\circ\, 11'\, 19{,}4237'' \tag{26}$$

$$\sigma_2 = 1^\circ\, 11'\, 10{,}97855'' \tag{27}$$

Hieraus ziehen wir auch die Differenzen:

$$\alpha - \alpha'' = 0{,}0555'' \qquad \beta - \beta'' = 0{,}0563'' \tag{28}$$

Das sphäroidische Dreieck, das durch die beiden Breiten $\varphi_1 = 49^\circ\, 30'$, $\varphi_2 = 50^\circ\, 30'$ und durch $\lambda = 1^\circ\, 0'$ bestimmt ist, werden wir als kleines sphäroidisches Normal-Beispiel noch mehrfach benützen.

) Die nächsten Anwendungen, welche wir von den Entwicklungen (17), (18), sowie (12)—(14) zu machen haben, bedürfen der Glieder von der Ordnung $\varDelta\varphi^3$ nicht, und zu vielen Zwecken genügt sogar die Entwicklung nur bis $\eta^2 \varDelta\varphi$ bei δ und $\eta^2 \varDelta\varphi^2$ bei S. Indessen werden wir auch von den höheren Gliedern später noch Gebrauch machen.

§ 68. Ellipsenbogen eines Normalschnittes.

In Fig. 1. haben wir von der früheren Fig. 1. § 67. S. 347 einen Teil kleiner herausgezeichnet, nämlich alles was den Normalschnitt AB betrifft, der durch die Normale AK_a und durch den Punkt B geht.

Fig. 1.
Normalschnitt $AK_a B$.

Dass der Bogen AB ein *Ellipsen*bogen ist, weiss man aus der Natur des Ellipsoids, das durch eine Ebene AK_aB nur nach einem solchen Bogen geschnitten werden kann; und um die Bogenlänge $AB = s$ zu bestimmen, könnte man daran denken, die ganze Schnitt-Ellipse in ihrer Ebene zu betrachten, ihre Gleichung zu bestimmen, u. s. w.

Indessen für unsere Zwecke genügt es, in erster Näherung den Bogen s mit Hilfe der bereits bekannten Länge $K_aB = S_2$ zu untersuchen, denn es ist nach (16) § 67. S. 350 zunächst genähert:

$$\frac{S_2}{N_2} = 1 - \eta^2 \frac{\Delta\varphi}{V^2} t - \frac{\eta^2}{2} \Delta\varphi^2 \tag{1}$$

Aus Fig. 1. sieht man, dass eine Beziehung von S_2 zu N_1 erwünscht ist, und deswegen vergleichen wir nach (21) S. 210:

$$N_1 = \frac{c}{V_1} = c\left(1 - \frac{e'^2}{2} \cos^2\varphi_1 + e'^4 \ldots\right)$$

$$N_2 = \frac{c}{V_2} = c\left(1 - \frac{e'^2}{2} \cos^2\varphi_2 + e'^4 \ldots\right)$$

$$\frac{N_2}{N_1} = 1 - \frac{e'^2}{2} (\cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_1) = 1 + \frac{e'^2}{2} 2\,\Delta\varphi \sin\varphi \cos\varphi + \ldots$$

$$\frac{N_2}{N_1} = 1 + \eta^2 \Delta\varphi\, t \tag{2}$$

Nimmt man dieses (2) mit (1) zusammen, und setzt zunächst $V^2 = 1$, so fällt das Glied mit $\Delta\varphi$ fort und man hat:

$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \eta^2 \frac{\Delta\varphi^2}{2} \tag{3}$$

Diese erste Näherung ist bereits zu Vielem brauchbar; man kann aber auf dem betretenen Wege noch erheblich weiter gehen; wir wollen dabei eine abkürzende Bezeichnung einführen, nämlich:

$$\frac{\Delta\varphi}{V^2} = \Delta\varphi' \tag{4}$$

wo $\Delta\varphi'$ die verkürzte Breiten-Differenz im Sinne von § 63. ist; dann hat man nach (17) § 67. S. 351:

$$\frac{S_2}{N_2} = 1 - \eta^2 \Delta\varphi'\, t - \frac{\eta^2}{2} \Delta\varphi'^2 (1 - \eta^2 t^2) + \frac{\eta^2}{6} \Delta\varphi'^3\, t \tag{5}$$

Ferner wird entwickelt:

$$\frac{N_2}{N_1} = 1 + \eta^2 \Delta\varphi'\, t + \frac{\eta^4}{2} \Delta\varphi'^2\, t^2 - \frac{\eta^2}{6} \Delta\varphi'^3\, t \tag{6}$$

Wenn man (5) und (6) multipliziert, so findet man:

$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2}{2} \Delta \varphi'^2 + \eta^4 \Delta \varphi'^3 t \ldots \tag{7}$$

d. h. man hat in (7) nahezu wieder dieselbe Form wie in (3), nur mit dem Unterschiede, dass $\Delta \varphi'^2$ statt $\Delta \varphi^2$ steht; dann aber ist durch die genauere Berechnung (5) und (6) bewiesen, dass in (7) Glieder von der Ordnung $\eta^2 \Delta \varphi'^3$ und $\eta^4 \Delta \varphi'^2$ überhaupt nicht besonders vorkommen (soweit nicht $\eta^4 \Delta \varphi'^2$ als in $\eta^2 \Delta \varphi'^2$ mit enthalten betrachtet wird).

Nun können wir nach (28) § 63. S. 329 setzen:

$$\frac{\Delta \varphi}{V 2} = \Delta \varphi' = \sigma \cos \alpha + \sigma^2 + \ldots \tag{8}$$

Dabei soll für die nächsten Zwecke α in (8) als konstant gelten, was so viel bedeutet, als die Vernachlässigung der Glieder $\sigma^2 \ldots$ in (8). Die Näherung (8) in (7) gesetzt, giebt:

$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha \tag{9}$$

Zum nächsten Gebrauche dieser Formel soll auch η^2 als konstant gelten.

Nun sind wir genügend vorbereitet, um die Beziehung zwischen s und σ in der Schnitt-Ebene $A B K_\alpha$ zu untersuchen, wozu Fig. 2. besonders herausgezeichnet ist.

Durch die soeben aufgestellte Beziehung (9) zwischen S_2 und N_1 mit σ, ist die Kurve $A B$ in Polar-Coordinaten bestimmt, und um s in σ auszudrücken, hat man nur die Bogenlänge s durch Integration zu finden. Hiezu giebt Fig. 2. die Differential-Gleichung:

Fig. 2.
Schnitt-Ebene $A B K_\alpha$.

$$d s^2 = (S_2 \, d \sigma)^2 + (d S_2)^2 \tag{10}$$

Hier ist S_2 als Funktion der Veränderlichen σ nach (9) einzuführen; N_1 ist konstant, und auch α und η^2 gelten hier als konstant. Man hat daher aus (9):

$$\frac{d S_2}{d \sigma} = - N_1 \eta^2 \cos^2 \alpha \sigma \quad , \quad (d S_2)^2 = \eta^4 \ldots d \sigma^2 \tag{11}$$

Wenn wir Glieder mit η^4 nun vernachlässigen, können wir hiernach (10) mit (9) kurz so schreiben:

$$d s = S_2 \, d \sigma = N_1 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha\right) d \sigma$$

Die Integration mit den Grenzen $\sigma = 0$ und $\sigma = \sigma$ giebt:

$$s = N_1 \left(\sigma - \frac{\eta^2}{6} \sigma^3 \cos^2 \alpha\right)$$

oder auch:

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \cos^2 \alpha\right) \tag{12}$$

Das Korrektionsglied beträgt $\frac{\eta^2}{6} \left(\frac{s}{N_1}\right)^3 \cos^2 \alpha \, \varrho''$ in Sekunden. Mit $\varphi = \alpha = 45^\circ$ und $s = 100\,000^m$ giebt dieses nur 0,0002″ (man kann daher bei einzelnen Dreiecksseiten das zweite Glied von (12) vernachlässigen).

Wegen (8) kann man die Formel (12) auch wieder so schreiben:

$$\sigma = \frac{s}{N_1}\left(1 + \frac{\eta^2}{6}\,\Delta\varphi'^2\right) \quad \text{oder} \quad s = N_1\,\sigma\left(1 - \frac{\eta^2}{6}\,\Delta\varphi'^2\right) \tag{13}$$

In dieser Form haben wir das Zahlen-Beispiel am Schluss von § 67. behandelt, und aus (24) und (27) S. 351 berechnet:

$$s = N_1\,\sigma_1\,(1 - \ldots) = 132\,315{,}392^m - 0{,}019^m = 132\,315{,}373^m \tag{14}$$

$$s = N_2\,\sigma_2\,(1 - \ldots) = 132\,315{,}394^m - 0{,}019^m = 132\,315{,}375^m \tag{15}$$

Das Korrektionsglied von (13) macht also hier nur etwa 2 Centimeter aus. Die beiden Werte s nach (14) und (15) sind innerhalb der Rechenschärfe als *gleich* zu betrachten, und wir werden später auch finden, dass sie gleich lang sind, wie die geodätische Linie zwischen A und B.

Depressionswinkel der Sehne AB.

Nachdem die Beziehung zwischen S_2 und N_1 und damit die Kurve AB ermittelt ist, kann man auch den Winkel μ angeben, welchen die Tangente AB' mit der Sehne AB bildet. Die Tangente AB' ist in A rechtwinklig zu AK, was sowohl aus der geometrischen Entstehung des Schnittes AB als auch aus dem Differential-Quotienten $\frac{d\,S_2}{d\,\sigma}$ hervorgeht, indem dieser nach (11) mit $\sigma = 0$ verschwindet.

Fig. 3.

Man hat also zur Bestimmung von μ nach Fig. 3.:

$$tang\,(90^\circ - \mu) = \frac{S_2\,sin\,\sigma}{N_1 - S_2\,cos\,\sigma}$$

oder

$$tang\,\mu\,sin\,\sigma = \frac{N_1}{S_2} - cos\,\sigma \tag{16}$$

Wenn man hier die Bedeutung von $\frac{N_1}{S_2}$ nach (7) oder (9) einsetzt, und wenn man zugleich in (16) links $tang\,\mu\,sin\,\sigma = \mu\,\sigma$ setzt, so bekommt man:

$$\mu = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\,\eta^2\,cos^2\,\alpha \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{\sigma}{2} + \frac{\eta^2}{2}\,\frac{\Delta\varphi'^2}{\sigma} \tag{17}$$

In erster Näherung ist $\mu = \frac{\sigma}{2}$, d. h. der halbe Centriwinkel, was der Annahme entspricht, es sei AB ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt K.

Krümmungs-Halbmesser des Bogens AB.

Den Krümmungs-Halbmesser des Schnittbogens AB in dem Anfangspunkte A kennen wir bereits aus den allgemeinen Betrachtungen von § 34. und wir haben in (4) S. 214 entwickelt:

$$R = \frac{N}{1 + \eta^2\,cos^2\,\alpha}\,, \quad \text{wo } \eta^2 = e'^2\,cos^2\,\varphi \tag{18}$$

Diese Formel gilt für unseren Fall, wenn $N = N_1$ von Fig. 3. genommen wird.

In erster Näherung werden wir den Wert R nach (18) nicht bloss für den Anfangspunkt A der Schnittkurve AB benützen, sondern auch für irgend einen andern Punkt auf dem Verlauf von AB.

Um jedoch genau zu wissen, welche Glieder dadurch vernachlässigt werden, wollen wir den Krümmungs-Halbmesser der Schnittkurve AB nun genauer bestimmen, indem wir von der Gleichung (9) ausgehen, welche die Natur der Kurve in Polar-Coordinaten bestimmt.

Die analytische Geometrie bietet für den Krümmungs-Halbmesser R' einer Kurve in Polar-Coordinaten, mit den Bezeichnungen von Fig. 3. den strengen Ausdruck:

$$R' = S_2 \frac{\left(1 + \left(\frac{1}{S_2}\frac{d S_2}{d\sigma}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + 2\left(\frac{1}{S_2}\frac{d S_2}{d\sigma}\right)^2 - \frac{1}{S_2}\frac{d^2 S_2}{d\sigma^2}} \tag{19}$$

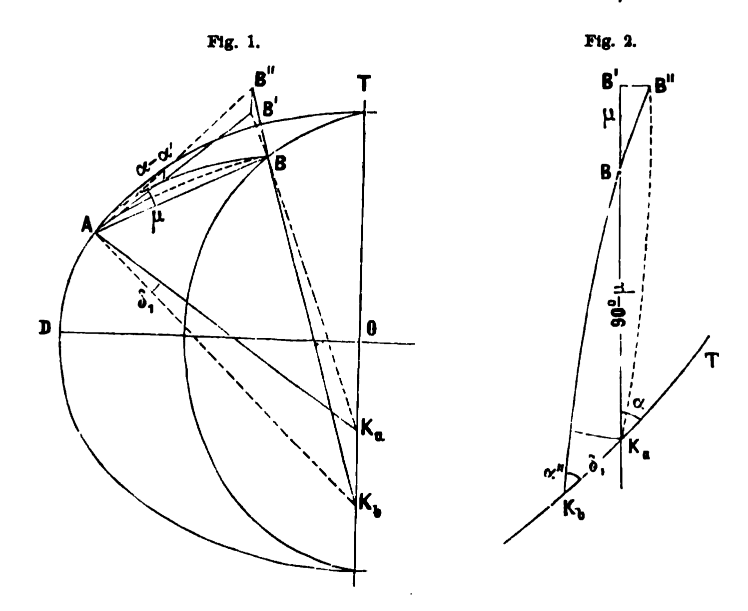
Wenn man hier wieder die Glieder $\left(\frac{d S_2}{d\sigma}\right)^2$, welche von der Ordnung $\eta^4\sigma^2$ sind, vernachlässigt, und mit gleicher Näherung (9) einsetzt, so bekommt man schliesslich:

$$R' = R\left(1 - \eta^2\,\sigma\cos\alpha\, t - \eta^2\frac{\sigma^2}{2}\cos^2\alpha + \ldots\right) \tag{20}$$

Dabei ist R der Krümmungs-Halbmesser eines Normalschnitts des Ellipsoids, in einem Punkte mit der Breite φ in dem Azimut α, und R' ist der Krümmungs-Halbmesser des Schnittbogens AB Fig. 3. im Abstand σ von dem Anfangspunkt A.

§ 69. Konvergenz der beiden Normalschnitte.

Die beiden Normalschnitte, welche zwischen zweien Punkten A und B bestehen, werden wir nun näher betrachten, und insbesondere in Hinsicht auf den kleinen Azimut-Unterschied $\alpha - \alpha'$, welcher in dem einen Punkte A hervorgebracht wird (sowie entsprechend $\beta - \beta'$ in dem anderen Punkte B).



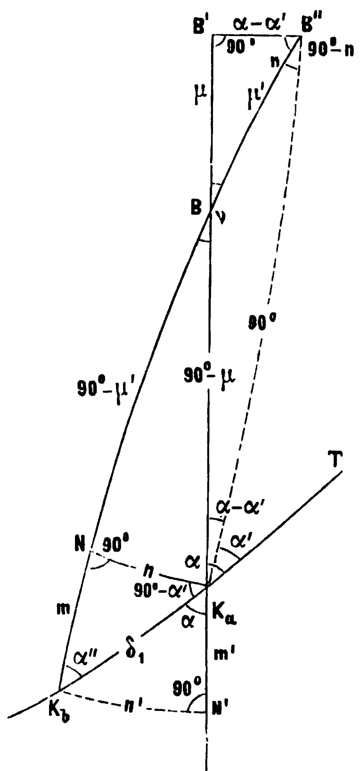
Zu diesem Zweck haben wir in vorstehender Fig. 1. im wesentlichen die Verhältnisse der früheren Fig. 1. § 67. S. 347 wiederholt, und dazu in Fig. 2. eine sphärische Figur gezeichnet, welche dadurch entsteht, dass man um A als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit beliebigem Halbmesser beschreibt, auf welcher jeder von A ausgehende Strahl sich als Punkt, und jede von A ausgehende Ebene sich als Grosskreisbogen zeigt.

Wir haben auch alle Punkte in Fig. 2. mit denselben Buchstaben bezeichnet, welche auf den entsprechenden Strahlen von Fig. 1. vorkommen, so dass also B in Fig. 2. dem Strahle AB von Fig. 1., K_a in Fig. 2. dem Strahle AK_a von Fig. 1. entspricht u. s. w.

Die Normalschnitt-Ebene ABK_a in Fig. 1. giebt den Bogen BK_a in Fig. 2., und die Meridian-Ebene ATK_aK_b von Fig. 1. giebt den Bogen TK_aK_b in Fig. 2., folglich ist der Winkel $BK_aT = \alpha$ das Azimut der Normalschnitt-Ebene ABK_a im Punkte A.

Weniger einfach ist das Auffinden des Azimutes α', welches der Gegen-Normalschnitt BK_bA in A hat. Als Winkel zweier Ebenen ist dieses Azimut α' in Fig. 1. zunächst nicht vertreten, weil die Ebene BK_bA in A nicht normal ist. Allerdings bildet diese Ebene BK_bA mit der Meridian-Ebene von A einen gewissen Winkel α'', welchen wir schon in Fig. 1. § 67. S. 347 kennen gelernt haben, und von dem wir auch schon wissen, dass er *nahezu* gleich dem Azimute α' ist; und jenen Winkel α'' finden wir in Fig. 2. leicht wieder, nämlich bei K_b zwischen dem Meridianbogen K_bK_aT und dem Gegen-Schnittbogen K_bB.

Fig. 3.
Vervollständigung von Fig. 2.



Das Gegen-Azimut α' selbst muss zunächst in Fig. 1. dadurch konstruiert werden, dass man die *Tangente* AB'' an die Gegen-Schnittkurve BA in A zieht; und wenn man gleichzeitig auch die Tangente AB' an den Schnittbogen AB in A zieht, so liegen diese beiden Tangenten in der Berührungs-Ebene des Punktes A, und fassen den kleinen Winkel $\alpha - \alpha'$ zwischen sich.

Auf diesem Wege ist die Differenz $\alpha - \alpha'$ auch leicht in Fig. 2. hinüber zu tragen; man macht den Bogen BB' entsprechend dem Depressions-Winkel μ der Sehne AB gegen die Tangente AB', dann $B'B''$ rechtwinklig zu BB', worauf sich B'' als Schnitt der Horizontalen $B'B''$ mit der Schiefen K_bBB'' ergiebt.

Indessen kann man nicht nur diese kleine Differenz $\alpha - \alpha'$, sondern auch das Azimut α' selbst in Fig. 2. auffinden, indem man den Bogen $B''K_a$ zieht, welcher der Ebene $B''AK_a$ entspricht, und mit dem Meridian K_aT das fragliche Azimut α' macht.

Um dieses und weitere Einzelheiten deutlicher zu zeigen, haben wir Fig. 3. als Vervoll-

ständigung von Fig. 2. gezeichnet, worin $B'' K_a T = \alpha'$ das Azimut des *Gegen*-Normalschnittes $B A$ in A ist.

Der soeben in Fig. 3. gezogene Bogen $B'' K_a$ ist $= 90°$, weil die Strahlen $A B''$ und $A K_a$ in Fig. 1. als Tangente und als Normale des Ellipsoids auf einander rechtwinklig sind, und ebenso ist auch $B' K_a = 90°$, also $B K_a = 90° - \mu$.

Nun wollen wir noch den kurzen Bogen $K_a N$ rechtwinklig zu $B'' K_b$ ziehen, wodurch auch $B'' N = 90°$ und folglich der Bogen $K_a N = n$, gleich dem Winkel n bei B'' wird.

Dieses n ist der Neigungs-Winkel der Normalen $A K_a$ gegen die Gegenschnitt-Ebene $B A K_b$, und eine entsprechende Neigung n' kann man $K_b N' = n'$ ebenfalls angeben, d. h. den Neigungs-Winkel n', welchen die jenseitige Normale $B K_b$ mit der diesseitigen Normalschnitt-Ebene $A B K_a$ bildet.

Unsere Fig. 3. zeigt bei B den Winkel ν, welchen die beiden Normalschnitt-Ebenen unter sich bilden, und endlich haben wir noch die kleine Seite $K_a K_b = \delta_1$ entsprechend dem kleinen Winkel $K_a A K_b = \delta_1$ in Fig. 1., den wir auch schon früher in Fig. 1. § 67. S. 347 kennen gelernt haben.

Nachdem wir so alle Winkel, die uns hier interessieren, in den sphärischen Dreiecken von Fig. 3. dargestellt haben, können wir alle Beziehungen, welche zwischen diesen Winkeln bestehen, durch die sphärische Trigonometrie aus Fig. 3. ableiten.

Wir gehen zuerst darauf aus, die Differenz $\alpha - \alpha''$ zu bestimmen; hiezu giebt eine Cotangenten-Gleichung der Gruppe (9) § 29. S. 195, auf das Dreieck $B K_a K_b$ angewendet:

$$cotg\,(90° - \mu)\,sin\,\delta_1 = cos\,\delta_1\,cos\,(180° - \alpha) + sin\,(180° - \alpha)\,cotg\,\alpha''$$

$$tang\,\mu\,sin\,\delta_1 = -\,cos\,\delta_1\,cos\,\alpha + sin\,\alpha\,cotg\,\alpha''$$

$$tang\,\mu\,sin\,\delta_1 = \left(2\,sin^2\frac{\delta_1}{2} - 1\right)cos\,\alpha + \frac{sin\,\alpha\,cos\,\alpha''}{sin\,\alpha''}$$

$$tang\,\mu\,sin\,\delta_1 - 2\,cos\,\alpha\,sin^2\frac{\delta_1}{2} = \frac{sin\,(\alpha - \alpha'')}{sin\,\alpha''} \tag{1}$$

Dadurch ist $\alpha - \alpha''$ bestimmt; und um auch die Differenz $\alpha'' - \alpha'$ zu finden, betrachten wir das kleine rechtwinklige Dreieck $K_a K_b N$, dessen sphärischer Exzess gerade zu $= \alpha'' - \alpha'$ ist, denn der Winkel dieses rechtwinkligen Dreiecks bei K_a ist $= 90° - \alpha'$, weil $K_a B''$ rechtwinklig auf $K_a N$ steht; es ist also:

$$\alpha'' + (90° - \alpha') = 90° + (\alpha'' - \alpha')$$

Hiefür giebt die Hypotenusen-Formel (2) S. 194:

$$cotg\,\alpha''\,cotg\,(90° - \alpha') = cos\,\delta_1$$

$$cos\,\alpha''\,sin\,\alpha' = sin\,\alpha''\,cos\,\alpha'\left(1 - 2\,sin^2\frac{\delta_1}{2}\right)$$

$$sin\,(\alpha'' - \alpha') = 2\,sin^2\frac{\delta_1}{2}\,sin\,\alpha''\,cos\,\alpha' \tag{3}$$

Nachdem durch (1) und (3) auch $\alpha - \alpha'$ bestimmt ist, erhält man aus dem oberen rechtwinkligen Dreieck $B B' B''$:

$$tang\,\nu = \frac{tang\,(\alpha - \alpha')}{sin\,\mu} \tag{4}$$

und

$$tang\,n = \frac{sin\,(\alpha - \alpha')}{tang\,\mu} \tag{5}$$

oder aus dem Dreieck $B K_a N$:

$$\sin n = \sin \nu \cos \mu \tag{6}$$

Dadurch ist n zweifach bestimmt, wie überhaupt noch manche Kontrollgleichung aus Fig. 3. abgelesen werden kann (wozu noch μ', m und m' eingeschrieben sind). Um n und n' auch unmittelbar in δ_1 auszudrücken, hat man aus den kleinen rechtwinkligen Dreiecken $K_a K_b N$ und $K_a K_b N$:

$$\sin n = \sin \delta_1 \sin \alpha'' \qquad \sin n' = \sin \delta_1 \sin \alpha \tag{7}$$

Reihen-Entwicklungen in erster Näherung.

Wenn man überall nur die ersten Näherungen haben will (welche zu vielen Zwecken ausreichen), so ist die Reihen Entwicklung sehr einfach. Man hat nach (12*) § 67. S. 350:

$$\delta_1 = \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{\sqrt{2}} + \ldots = \eta^2 \sigma \cos \alpha + \eta^2 \sigma^2 \ldots \tag{8}$$

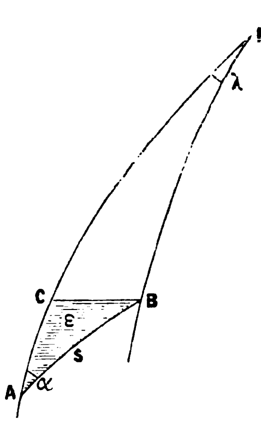
Ferner nach (17) § 68. S. 354 den Depressions-Winkel:

$$\mu = \frac{\sigma}{2} + \eta^2 \sigma \ldots \tag{9}$$

Damit giebt (1) in erster Näherung:

$$\alpha - \alpha'' = \mu \, \delta_1 \sin \alpha = \eta^2 \frac{\sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} \tag{10}$$


Fig 4.



Hier hat der zweite Faktor die geometrische Bedeutung eines sphärischen Exzesses, wie in Fig. 4. angedeutet ist, weshalb wir setzen:

$$\frac{\sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \varepsilon \tag{11}$$

Dieser Wert ε ist genähert der sphärische, oder sphäroidische Exzess eines Dreiecks ABC, welches bei C rechtwinklig ist, so dass BC nicht ein Parallel-Kreisbogen, sondern ein Bogen rechtwinklig zum Meridian ACN ist; doch kann in erster Näherung für die *Fläche* des Dreiecks ABC auch BC als Parallelbogen gelten.

Mit dieser Hilfs-Bezeichnung ε nach (11) lautet unsere Formel (10) kurz:

$$\alpha - \alpha'' = \eta^2 \varepsilon \tag{12}$$

Nach diesem betrachten wir die kleine Differenz $\alpha'' - \alpha'$, welche nach (3) in erster Näherung ist:

$$\alpha'' - \alpha' = \frac{\delta^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \eta^4 \varepsilon \cos^2 \alpha \tag{13}$$

Wenn wir aus (12) und (13) auch die Differenz $\alpha - \alpha'$ bilden wollen, so dürfen wir in erster Näherung nur schreiben:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \varepsilon, \quad \text{d. h. } \alpha - \alpha' = \alpha - \alpha'' \tag{14}$$

Denn das Glied $\eta^4 \varepsilon \cos^2 \alpha$ nach (13) kommt neben anderen überhaupt schon in (12) vernachlässigten Gliedern von der Ordnung η^4 nicht mehr in Betracht.

Dieselbe Formel (14), welche hier für $\alpha - \alpha'$ gefunden wurde, gilt in gleicher Näherung auch für die Azimut-Differenz in dem zweiten Punkte B, also:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \eta^2 \varepsilon \tag{15}$$

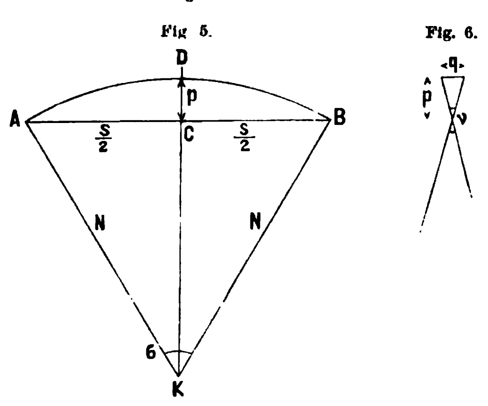
Nimmt man beispielshalber eine Entfernung $s = 100\,000^m$ unter dem Azimut $\alpha = 45°$, zugleich unter der Breite $\varphi = 45°$, so wird:

$$\varepsilon = 12{,}7'' \qquad \alpha - \alpha' = 0{,}043'' \tag{15a}$$

In gleicher Weise haben wir als erste Näherung für den Winkel ν, welchen die beiden Normalschnitt-Ebenen in der Sehne AB unter sich bilden, nach (4), (9) und (10):

$$\nu = \eta^2 \sigma \sin\alpha \cos\alpha = 2\eta^2 \frac{\varepsilon}{\sigma} \tag{16}$$

Dieser Schnittwinkel ν ist in Fig. 6. veranschaulicht. Denkt man sich in der Mitte der Sehne AB (Fig. 5.) eine Ebene KCD rechtwinklig gelegt, so wird diese ein nahezu gleichschenkliges kleines Dreieck ausschneiden (Fig. 6.), dessen beide Schenkel p den Winkel ν zwischen sich fassen und den Querabstand q dem Winkel ν gegenüber haben. Die Schenkellänge p ist gleich der Pfeilhöhe eines Bogens s für den Halbmesser N, d. h. nach Fig. 5.:

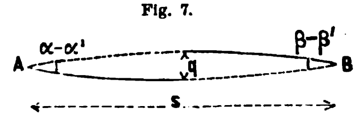


$$p = \frac{s^2}{8N}$$

dann hat man:

$$q = p\,\nu = \frac{s^2}{8N} 2\eta^2 \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{s}{4} \eta^2 \varepsilon \tag{17}$$

Diesen Querabstand q kann man auch noch durch eine andere Betrachtung finden, indem man nach Fig. 7. die beiden Schnitt-Kurven zwischen A und B näherungsweise in einer Ebene abbildet.



Wenn man nun nichts weiter weiss, als dass bei A und B die Schnittwinkel $\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \eta^2 \varepsilon$ nach (15) stattfinden, und wenn man noch die Annahme macht, dass beide Kurven in Hinsicht auf Krümmung symmetrisch gegen A und B sind, so kann man, *in Hinsicht auf den Querabstand q in der Mitte*, den Wert $\frac{q}{2}$ berechnen als Pfeilhöhe eines Kreisbogens, welcher mit seiner Sehne AB die Winkel $\frac{\alpha - \alpha'}{2}$ und $\frac{\beta - \beta'}{2}$ beide $= \frac{\eta^2 \varepsilon}{2}$ bildet. Damit berechnet man leicht den Halbmesser dieses Kreisbogens, $R = \frac{s}{\alpha - \alpha'}$ und $\frac{q}{2} = \frac{s^2}{8R}$; dieses giebt also den Querabstand q:

$$q = \frac{s}{4}(\alpha - \alpha') = \frac{s}{4}\eta^2 \varepsilon \tag{18}$$

Die Ausrechnung mit denselben Annahmen wie bei (15) und (15a); nämlich φ und $\alpha = 45°$, $s = 100\,000^m$ giebt:

$$q = 0{,}005^m \tag{18*}$$

Die Berücksichtigung der Konvergenzen $\alpha - \alpha'$ bei einer Triangulierung wäre also entsprechend der Berücksichtigung einer Centrierung von 5 Millimetern auf 50 000 Meter Entfernung.

Die Formel (18) stimmt mit der früheren (17), und das mag wohl auch für die Zulässigkeit der Herleitung von (18) aus Fig. 7. eine gewisse Bürgschaft sein; wir haben jedoch diese Herleitung aus Fig. 7. nur andeutungsweise behandelt und die Annahme zweier flacher *Kreis*bögen nur in *Hinsicht auf den Querabstand q in der Mitte* als zulässig bezeichnet. Wir werden eine ähnliche ebene Abbildung mit der geodätischen Linie später gründlicher behandeln, bemerken aber jetzt schon, dass bei dieser Darstellung von zwei *Kreis*bögen die Sehne AB in Fig. 7. nicht das Abbild der geodätischen Linie AB ist.

Schärfere Entwicklung von $(\alpha - \alpha'')$ und $(\alpha - \alpha')$.

Obgleich die erste Näherung für $(\alpha - \alpha'')$ nach (13) und (14) vollständig genügt zur Beantwortung der praktisch wichtigen Frage, ob und mit welcher Annäherung man berechtigt ist, die beiden Normalschnitte zwischen zwei Punkten als zusammenfallend zu betrachten, besteht doch noch ein gewisses, mehr mathematisches Interesse, die Entwicklung für die Azimut-Differenz $\alpha - \alpha''$ bzw. $\alpha - \alpha'$ noch weiter zu treiben.

Wir haben hiezu von (1) S. 357 durch Entwicklung:

$$\alpha - \alpha'' = \left(\mu\,\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha \tag{19}$$

Der von der Breiten-Verkürzung herrührende Winkel δ_1 ist nach (12*) § 67. S. 350:

$$\delta_1 = \eta^2 \varDelta\varphi' \left(1 + \frac{\varDelta\varphi'}{2}\,t\right) \tag{20}$$

Dabei ist gesetzt:

$$\frac{\varDelta\varphi}{\sqrt{2}} = \varDelta\varphi' \quad , \quad tang\,\varphi = t \tag{21}$$

Der Depressions-Winkel μ ist nach (17) § 68. S. 354:

$$\mu = \frac{\sigma}{2} + \frac{\eta^2}{2}\,\frac{\varDelta\varphi'^2}{\sigma} \tag{22}$$

Mit Einführung des *Mittel*-Azimutes α_m hat man nach (28) § 63. S. 329:

$$\varDelta\varphi' = \sigma\cos\alpha_m \tag{23}$$

und damit werden (20) und (22):

$$\delta_1 = \eta^2\varDelta\varphi'\left(1 + \frac{\sigma}{2}\cos\alpha_m\,t\right) \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \eta^2\cos^2\alpha_m\right) \tag{24}$$

Wenn man (24) in (19) einsetzt, und in dem *quadratischen* Gliede $\delta_1^2\cos\alpha$ in (19) die Näherung $\alpha = \alpha_m$ macht, so findet man (indem zwei Glieder $\eta^2\cos\alpha_m$ sich heben):

$$\alpha - \alpha'' = \eta^2\varDelta\varphi'\,\frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{2}\cos\alpha_m\,t\right)\sin\alpha \tag{25}$$

Dabei bezieht sich η^2 auf die *Mittel*breite, wie auch α_m das *Mittel*-Azimut ist; und um auch α auf α_m zu reduzieren, hat man nach (15) S. 315:

$$\alpha = \alpha_m - \frac{\sigma}{2} \sin \alpha_m \operatorname{tang} \varphi_m \tag{26}$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha_m - \frac{\sigma}{2} \sin \alpha_m \cos \alpha_m \operatorname{tang} \varphi_m$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha_m \left(1 - \frac{\sigma}{2} \cos \alpha_m t\right)$$

Setzt man dieses in (25) ein, so hebt sich der Faktor mit $\sigma \cos \alpha_m t$ fort und man hat kurz:

$$\alpha - \alpha'' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{\sigma}{2} \sin \alpha_m \tag{27}$$

Dabei ist:

$$\sigma = \frac{s}{N} \tag{28}$$

wo s die lineare Länge des Bogens AB und N der Quer-Krümmungshalbmesser für die Bogenmitte ist. Man hat also:

$$\alpha - \alpha'' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2N} \sin \alpha_m \tag{29}$$

Nachdem so $\alpha - \alpha''$ bestimmt ist, wollen wir auch noch $\alpha'' - \alpha'$ nach (3) S. 357 zuziehen, nämlich:

$$\alpha'' - \alpha' = \frac{\delta_1^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

Dieses giebt nach (20) und (23):

$$\alpha'' - \alpha' = \eta^4 \Delta \varphi' \frac{\sigma}{2} \cos^2 \alpha_m \sin \alpha_m \tag{30}$$

Dabei hatten wir α_m und α nicht mehr zu unterscheiden, da es sich nur um ein Glied von der Ordnung $\eta^4 \sigma^2$ handelte, also durch die Verwechslung von α_m mit α nur ein Glied $\eta^4 \sigma^3$ vernachlässigt ist. Nimmt man nun (28), (29) und (30) zusammen, so hat man:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2N} \sin \alpha_m (1 + \eta^2 \cos^2 \alpha_m) \tag{31}$$

Nun ist aber nach (4) S. 214:

$$R = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha} = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 \alpha}.$$

Dieses giebt mit (31) zusammen:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2R} \sin \alpha_m \tag{32}$$

Der Unterschied dieser Differenz $\alpha - \alpha'$ gegen $\alpha - \alpha''$ nach (29) besteht also darin, dass bei (29) der Quer-Krümmungshalbmesser N im Nenner steht, dagegen bei (32) der Krümmungshalbmesser R in der Richtung des Bogens AB.

Die Formeln (31) und (32) sind genau auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ und $\eta^4 \sigma^2$ einschliesslich, wobei wie gewöhnlich $\eta^2 = e'^2 \cos \varphi$ und $\Delta \varphi'$ der verkürzte Breiten-Unterschied nach (21) ist.

Da in der Formel (32) sich sowohl $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ auf die *Mittel*breite φ als auch α_m auf das *Mittel*-Azimut bezieht, und auch $\Delta \varphi'$ nach (21) mit dem *Mittel*wert V^2 zu berechnen ist, hat die Formel (32) jede Beziehung zu dem Ausgangspunkt A, woselbst die Azimute α und α' stattfinden, verloren und gilt deswegen ebenso genau auch für den anderen Punkt B, woselbst die Azimute β und β' stattfinden, d. h. die

Formel (32) ist deswegen so einfach geworden, weil überall Mittelwerte φ und α_m eingeführt worden sind. Wir können also nun als Erweiterung von (32) schreiben:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \frac{\varDelta\varphi}{V^2} \frac{s}{2R} \sin \alpha_m = \beta - \beta' \tag{32a}$$

Wenn man diese Formel auf das kleine sphäroidische Normal-Beispiel anwendet, das wir am Schlusse von § 67. S. 351 mit $\varphi_1 = 49° 30'$, $\varphi_2 = 50° 30'$ und $\lambda = 1° 0'$ angenommen haben, so hat man:

$$\varphi = 50° \quad , \quad \varDelta\varphi = 3600'' \quad , \quad \alpha_m = 32° 48' 20''$$

nach (14) und (15) § 68. S. 354: $s = 132\,315^m$;

nach S. [14] und [15] des Anhangs: $\log N = 6.805\,496$, $\log V^2 = 0.001\,204$, $\log \eta^2 = \log e'^2 \cos^2 \varphi = 7.443\,454$;

nach (7) oder (8) § 34. S. 214: $\log R = 6.804\,645$.

Damit findet man nach (33):

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = 0{,}0560'' \tag{33}$$

Um dieses mit $\alpha - \alpha'' = 0{,}0555''$ und mit $\beta - \beta'' = 0{,}0563$ nach (28) § 67. S. 351 zu vergleichen, sollte man noch die Reduktion $\alpha'' - \alpha'$ nach (30) anbringen, welche aber nur $0{,}0001''$ bringt, und neben unserer weniger genauen trigonometrischen Rechnung zu vernachlässigen ist. Hiernach stimmt (33) genügend mit dem früheren (28) § 67. S. 351.

Für manche Zwecke ist es besser, statt des Mittel-Azimuts α_m in (32) das Anfangs-Azimut α, und statt $\varDelta\varphi'$ den Bogen s einzuführen. Zu diesem Zwecke schreiben wir zunächst nach (23) und (28) die Formel (32) in diese Form:

$$\beta' - \beta = \alpha - \alpha' = \eta^2 \frac{s^2}{2NR} \sin \alpha_m \cos \alpha_m \tag{34}$$

Dabei ist nach (26):

$$\sin \alpha_m = \sin \alpha + \frac{\sigma}{2} \sin \alpha \cos \alpha\, t$$

$$\cos \alpha_m = \cos \alpha - \frac{\sigma}{2} \sin^2 \alpha\, t$$

und ferner:

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_m \quad , \quad \eta_1^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_1$$
$$\eta^2 = \eta_1^2 (1 - \sigma \cos \alpha\, t)$$

Setzt man all dieses in (32a) ein, so bekommt man:

$$\beta' - \beta = \alpha - \alpha' = \eta_1^2 \frac{s^2}{2NR} \sin \alpha \cos \alpha - \eta_1^2 \frac{s^3}{4N^2R} \sin \alpha\, t \tag{35}$$

Dabei ist übrigens bei den Krümmungs-Halbmessern N und R nicht unterschieden, ob sie sich auf den Anfang oder die Mitte des Bogens beziehen, denn das giebt nur Glieder $\eta^2 \sigma$, welche mit den übrigen Faktoren im ersten Gliede schon $\eta^4 \sigma^3$ gäbe, was wir überhaupt vernachlässigt haben.

Wir wollen hiebei die Bemerkung nicht unterdrücken, dass für solche Verhältnisse, wie wir sie in dem Zahlen-Beispiel (33) vorausgesetzt haben, kein praktisches Interesse besteht, so fein zu rechnen, wie dieses bei (32a) mit Unterscheidung von N und R und dergleichen geschieht. Den praktischen Zwecken ist durch die rohere Formel (15) S. 359 völlig genügt. Die theoretischen Formeln (32a) und ähnliche haben einen mittelbaren Nutzen, der sich bei späteren Vergleichungen zeigen wird.

Zum Schlusse der Betrachtungen von § 67.—69. wollen wir noch darauf aufmerksam machen, dass man mit den Formeln von § 67.—§ 69. die Konvergenz der Normalschnitte und alles damit Verwandte, z. B. auch die Neigungen n und n' für *beliebig weit entfernte Erdorte* durch geschlossene Formeln *streng* berechnen kann.

Denkt man sich zwei Erdorte unter den Breiten φ_1 und φ_2 mit dem Längenunterschiede λ, so bekommt man δ_1 und δ_2 sowie S_1 und S_2 aus (12)—(18) § 67. S. 350. Damit kann man die beiden *sphärischen* Dreiecke (1) und (2) § 67. S. 351 streng sphärisch auflösen, wodurch man σ_1, σ_2, α, α'' β, β'' bekommt.

Nach diesem giebt (16) § 68. S. 354 den einen Depressions-Winkel u in A und durch Formel-Umstellung auch den anderen Depressions-Winkel in B.

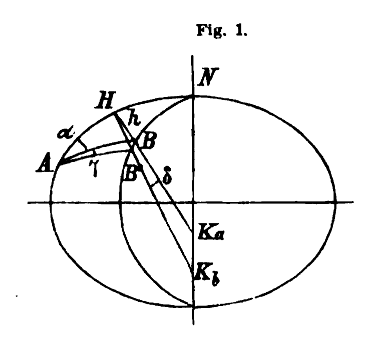
Damit ist die sphärische Figur Fig. 3. § 69. S. 356 vollständig bestimmt, sogar teilweise überbestimmt (α *und* α''), was zu Rechenproben führt; und da alle daraus hervorgehende sphärisch trigonometrischen Formeln streng richtig sind, hat man, wie oben behauptet, alle auf die beiden Normal-Schnittebenen bezüglichen Elemente streng berechnet.

In diesem Zusammenhange ist auch zu zitieren eine Schrift „Über das Geoid von *J. Bischoff*, München 1889", in welcher noch weitere trigonometrische Beziehungen zwischen $\alpha - \alpha'$, v, n, n' u. s. w. dadurch gefunden werden, dass statt unserer zwei sphärischen Dreiecke mit den Kugelmittelpunkten K_a und K_b Fig. 1. S. 347 ein sphärisches Hilfsdreieck aus φ_1, φ_2 und λ gebildet wird.

§ 70. Einfluss verschiedener Höhen.

Im Bisherigen haben wir immer die Voraussetzung gemacht, dass die in Betracht kommenden Punkte A, B beide auf der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoid liegen. Für Triangulierung, Azimutmessung u. dgl. zwischen zwei Punkten ist diese Annahme physisch nicht möglich, weil die Erde nicht durchsichtig ist. In Wirklichkeit befinden sich die Punkte auf Berghöhen, Türmen u. dgl., und es fragt sich, ob dadurch eine Änderung gegen die frühere Annahme stattfindet.

Fig. 1.



Wenn die Punkte in verschiedenen Höhen über der Ellipsoidfläche liegen, so denken wir uns dieselben auf das Ellipsoid projiziert mittelst der Ellipsoidnormalen (wobei von einer Krümmung der Lotlinien abgesehen wird). In Fig. 1. sei H ein hochgelegener Punkt und B' dessen Projektion, wobei HK_b die Normale von B ist. Wenn nun von einem entfernten Punkt A, der in der Ellipsoidfläche selbst liegt, mittelst des Theodolits nach B gemessen wird, so geschieht dieses in der Ebene AHK_a, welche in A normal ist, und der Theodolit projiziert den Punkt H nicht nach B', sondern nach B.

Um den dadurch entstehenden Azimutal-Fehler $BAB' = \gamma$ zu bestimmen, brauchen wir wieder den kleinen Winkel $K_a H K_b = \delta$, nämlich nach (12) § 67. S. 350 in erster Näherung:

$$\delta = \eta^2 \frac{\Delta\varphi}{V2} = \eta^2 \frac{s}{N} \cos\alpha$$

wobei s die lineare Entfernung AB und N der Quer-Krümmungshalbmesser ist. Damit hat man den Projektionsfehler BB' im Meridian:

$$BB' = h\delta = \eta^2 \frac{hs}{N} \cos\alpha$$

Der entsprechende Azimutfehler γ ist:

$$\gamma = \frac{BB' \sin\alpha}{s} = \eta^2 \frac{h}{N} \sin\alpha \cos\alpha$$

Mit φ und $\alpha = 45°$ giebt dieses:

$$\gamma = 0{,}054'' \frac{h}{1000}$$

Also für $h = 1000^m$ giebt dieses bereits $0{,}054''$.

Wenn der Punkt A selbst nicht in der Ellipsoidfläche liegt, sondern darüber, so ändert das an der bisherigen Betrachtung nichts, weil A in seiner eigenen Normalen $K_a A$ gehoben ist, wobei die vertikale Theodolit-Axe von A mit der Normalen $A K_a$ zusammenfällt.

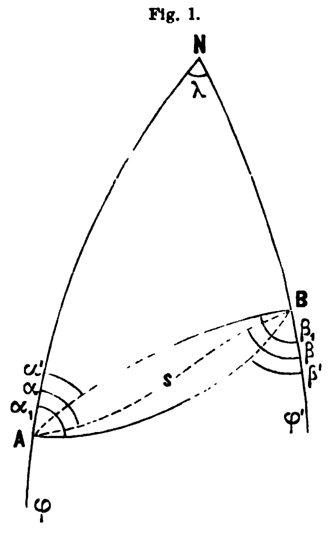
Ausser den wirklichen Höhen der Punkte A und B ist auch noch die scheinbare Erhebung durch Strahlenbrechung zu berücksichtigen.

§ 71. Sphärische Potenzreihen bis σ^3 mit sphäroidischen Korrektionsgliedern bis $\eta^2\sigma^3$.

Nachdem wir uns durch die Einführung eines sphärischen Hilfsdreiecks in § 67. überzeugt haben, dass man die geodätische Hauptaufgabe auf dem Ellipsoid durch gewisse Nebenberechnungen für δ, σ u. s. w. auf eine sphärische Aufgabe zurückführen kann, kommen wir zu der Überzeugung, dass es auch möglich sein muss, die sphärischen Reihen-Entwicklungen von § 59., welche bis σ^3 gehen, durch Zugabe sphäroidischer Glieder von § 67.—69. so umzuwandeln, dass sie zur geodätischen Übertragung von Breite, Länge und Azimut auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (Sphäroid) geeignet werden.

Wir können auf diese Weise Formeln finden, welche den später mit der geodätischen Linie abzuleitenden Formeln gleichwertig sind, welche wir sogar durch gewisse Umformungen mit den für die geodätische Linie giltigen Formeln *identisch* machen können.

Fig. 1.



Wenn dabei zu bemerken ist, dass die fraglichen Formeln sich aus der Theorie der geodätischen Linie viel *kürzer* ableiten lassen werden, als wir es nun thun, so ist uns doch auch die umständlichere Herleitung insofern sehr schätzbar, als dadurch eine grosse Kette von Entwicklungen, teils die vertikalen Schnitte, teils die geodätische Linie betreffend, in sich selbst abgeschlossen und kontrolliert werden wird. In diesem Sinne gehen wir an die Entwicklung von Formeln bis zur Ordnung σ^3 nebst $\eta^2\sigma^3$ einschliesslich. Die Bezeichnungen sind im Folgenden nach nebenstehender Fig. 1. genommen.

Als sphärisches Hilfsdreieck nehmen wir dasjenige, welches in Fig. 1. § 67. S. 347 den Kugelmittelpunkt K_a hat, mit dem Centriwinkel σ_1. Im übrigen die Bezeichnungen unserer nebenstehenden *neuen* Fig. 1. anwendend, haben wir von (8), (10), (15) § 59. S. 313—315 folgende drei *sphärische* Gleichungen (mit $tang\,\varphi = t$):

$$(\varphi') - \varphi = \sigma_1 \cos\alpha_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\sin^2\alpha_1\, t - \frac{\sigma_1^3}{6}\sin^2\alpha_1\cos\alpha_1\,(1+3t^2) \tag{1}$$

$$\lambda\cos\varphi = \sigma_1\sin\alpha_1 + \sigma_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\, t - \frac{\sigma_1^3}{3}\sin^3\alpha_1\, t^2 + \frac{\sigma_1^3}{3}\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1\,(1+3t^3) \tag{2}$$

$$\beta' - \alpha_1 = \sigma_1\sin\alpha_1\, t + \frac{\sigma_1^2}{2}\sin\alpha_1\cos\alpha_1\,(1+2t^2) - \frac{\sigma_1^3}{6}\sin^3\alpha_1\, t\,(1+2t^2)$$
$$+ \frac{\sigma_1^3}{6}\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1\, t\,(5+6t^2) \tag{3}$$

Der hier auftretende Wert σ_1 ist derselbe, der in (12) § 68. S. 353 mit σ bezeichnet ist, d. h. wir haben nun:

$$\sigma_1 = \frac{s}{N_1}\left(1 + \frac{\eta^2}{6}\sigma^2 \cos^2 \alpha_1\right)$$

Der Kürze wegen wollen wir schreiben:

$$\frac{s}{N_1} = \sigma \quad , \quad \text{also } \sigma_1 = \sigma\left(1 + \frac{\eta^2}{6}\sigma^2 \cos^2 \alpha_1\right) \tag{4}$$

Mit σ ist also bezeichnet der Quotient der linearen Entfernung $AB = s$, dividiert durch den Quer-Krümmungshalbmesser N_1 der Ausgangsbreite φ.

Das in (1) benützte Zeichen (φ') bedeutet die *sphärisch* berechnete jenseitige Breite, d. h. es ist nach (13) § 67 S. 350:

$$(\varphi') = \varphi' - \delta_2 = \varphi' - \eta_1^2 \frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2} t - \frac{2}{3}\left(\frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2}\right)^2 t^2\right\} \tag{5}$$

Dabei bezieht sich $t = tang\, \varphi$ auf die *Anfangs*breite φ, wie auch $\eta_1^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ und $V_1^2 = 1 + \eta_1^2$ sich auf die *Anfangs*breite φ beziehen.

Wenn man nun (5) nebst (4) in (1) einsetzt, so bekommt man eine Gleichung, welche $\varphi' - \varphi$, $(\varphi' - \varphi)^2$ und $(\varphi' - \varphi)^3$ enthält; diese Gleichung kann man stufenweise nach $\varphi' - \varphi$ auflösen (allgemeines Schema hiefür s. (50) S. 203); das Ergebnis dieser Auflösung ist:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi' - \varphi}{V_1^2} &= \sigma \cos \alpha_1 - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha_1\, t - \frac{3}{2}\eta^2 \sigma^2 \cos^2 \alpha_1\, t - \frac{\sigma^3}{6} \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 (1 + 3t^2) \\ &\quad - \frac{\eta^2}{2}\sigma^3 \cos^3 \alpha_1 (1 - t^2) + \frac{3}{2}\eta^2 \sigma^3 t^2 \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Einfacher ist die Umwandlung von (2); man hat nur (4) zu berücksichtigen, und findet:

$$\left.\begin{aligned}\lambda \cos \varphi &= \sigma \sin \alpha_1 + \sigma^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1\, t - \frac{\sigma^2}{3} \sin^3 \alpha_1\, t^2 \\ &\quad + \frac{\sigma^3}{3} \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1 (1 + 3t^2) + \frac{\eta^2}{6}\sigma^3 \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die dritte umzuwandelnde Formel (3) giebt vermöge ihrer sphärischen Herkunft die Azimut-Differenz $\beta' - \alpha_1$; wir wollen jedoch von (35) § 69. S. 362 hinzu nehmen mit Umsetzung in unsere neuen Bezeichnungen, und hinsichtlich R abgerundet:

$$\beta_1 - \beta' = \eta^2 \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \eta^2 \frac{\sigma^3}{4} \sin \alpha_1\, t \tag{8}$$

Wenn man dieses (8) nebst dem früheren (4) in (3) einsetzt, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}\beta_1 - \alpha_1 &= \sigma \sin \alpha_1\, t + \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 (1 + 2t^2) + \frac{\eta^2}{2}\sigma^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \\ &\quad - \frac{\sigma^3}{6} \sin^3 \alpha_1\, t(1 + 2t^2) + \frac{\sigma^3}{6} \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1\, t(5 + 6t^2) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{6}\sigma^3 \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_1\, t - \frac{\eta^2}{4}\sigma^3 \sin \alpha_1\, t\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die Formeln (6), (7) und (9) bieten das, was wir uns zunächst vorgesetzt haben zu bestimmen, nämlich die Breiten-, Längen- und Azimut-Übertragung von einem Punkte mit der Breite φ aus, mit einem Bogen s, der in einem *Normalschnitte* liegt, dessen Ausgangs-Azimut α_1 ist.

Ohne nun schon von der geodätischen Linie etwas zu wissen, können wir willkürlich statt des Azimutes α_1 ein *anderes* Azimut α einführen, entsprechend der (später in (33) § 75. zu begründenden) Formel:

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{\eta^2}{6}\sigma^2 \sin\alpha\cos\alpha + \sigma^3 \ldots \tag{10}$$

also

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha + \frac{\eta^2}{6}\sigma^2 \sin\alpha\cos^2\alpha$$

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha - \frac{\eta^2}{6}\sigma^2 \sin^2\alpha\cos\alpha$$

Dieses wollen wir überall in (6), (7) und (9) einführen (d. h. mit Vernachlässigung aller Glieder von der Ordnung η^4).

Ausserdem wollen wir aber auch noch in (9) eine zunächst willkürliche (später aus der Theorie der geodätischen Linie (35) § 75. folgende) Änderung machen, indem wir statt $\beta_1 - \alpha_1$ nun $\beta - \alpha$ bestimmen, wobei sein soll:

$$\beta - \alpha = \beta_1 - \alpha_1 + \eta^2 \frac{\sigma^3}{12} \sin\alpha\, t \tag{11}$$

Thut man all dieses, was wir bei (10) und (11) gesagt haben, so wird man folgende drei Schluss-Formeln finden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi'-\varphi}{V_1^2} = \sigma\cos\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\sin^2\alpha\, t - \frac{3}{2}\sigma^2\cos^2\alpha\,\eta^2 t - \frac{\sigma^3}{6}\sin^2\alpha\cos\alpha\,(1+3t^2)\\ -\frac{\sigma^3}{2}\cos^3\alpha\,\eta^2(1-t^2) + \frac{\sigma^3}{6}\sin^2\alpha\cos\alpha\,\eta^2(9t^2-1)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda\cos\varphi = \sigma\sin\alpha + \sigma^2\sin\alpha\cos\alpha\, t + \frac{\sigma^2}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha\,(1+3t^2)\\ -\frac{\sigma^3}{3}\sin^3\alpha\, t^2 + \frac{\eta^2}{3}\sigma^3\sin\alpha\cos^2\alpha\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}\beta - \alpha = \sigma\sin\alpha\, t + \frac{\sigma^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha\,(1+2t^2) + \frac{\eta^2}{2}\sigma^2\sin\alpha\cos\alpha\\ -\frac{\sigma^3}{6}\sin^3\alpha\, t\,(1+2t^2) + \frac{\sigma^3}{6}\sin\alpha\cos^2\alpha\, t\,(5+6t^2)\\ +\frac{\eta^2}{6}\sigma^3\sin\alpha\cos^2\alpha\, t - \frac{\eta^2}{6}\sigma^3\sin^3\alpha\, t\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Diese Gleichungen werden wir später in (25), (26), (27) § 78. wiederfinden.

Dadurch sollen sowohl die hier benützten Entwicklungen von § 67.—69. als auch die später folgenden Entwicklungen mit der geodätischen Linie gegenseitig versichert werden.

Wenn wir in den vorstehenden Gleichungen (10) und (11) bereits vorgreifend, gewisse Formeln über Azimute der geodätischen Linie u. s. w. zitiert haben, so geschah es in dem Sinne, dass später *nach* Entwicklung dieser Formeln, sowie *nach* Erledigung von § 78. nochmals auf den gegenwärtigen §. 71. zurückgeblickt werden soll, worauf die Bedeutung der vorstehenden Gleichungen (12), (13), (14) als Schlussglieder einer langen Kette anderer wichtiger Entwicklungen, von selbst in richtigem Lichte erscheinen werden.

Kapitel VII.

Die geodätische Linie.

§ 72. Geometrische Definition der geodätischen Linie.

Nachdem wir in § 62. und § 67. uns überzeugt haben, dass zwischen zwei Punkten A und B der ellipsoidischen Erdoberfläche im allgemeinen *zwei* verschiedene Normalschnitte bestehen, in welchen bei Theodolit-Beobachtungen von A nach B und von B nach A die Sicht-Linien sich befinden, können wir auch angeben, was für ein Linienzug erhalten wird, wenn man mehrere aufeinanderfolgende Punkte A, B, C (Fig. 1.) durch fortgesetztes Theodolit-Einweisen, wie eine Gerade in der Ebene, absteckt.

Fig. 1.

In Fig. 1. stehe in A ein Theodolit mit lotrechter Axe, mit welchem ein entfernter Punkt B angezielt, oder eingewiesen wird; wobei die Sicht $A a B$ stattfindet. Hierauf begiebt man sich mit dem Theodolit nach B, stellt denselben dort ebenfalls mit lotrechter Axe auf, zielt zurück nach A, was in der Sicht $B b A$ geschieht, dreht dann um 180° und bekommt die neue Sicht $B b C$. Hierauf geht man nach C, nimmt wieder die Sicht rückwärts $C c B$, und um 180° gedreht vorwärts $C c D$, und so fort.

Die Theorie von § 62. und § 67. hat uns gezeigt, dass bei diesem Verfahren allerdings im allgemeinen *zwei* Verbindungslinien zwischen je zwei Punkten A und B, B und C, u. s. w. in Betracht kommen, nämlich $A a B$ von A nach B und $B b A$ von B nach A u. s. w., doch sind die Abweichungen zwischen a und b, c und d u. s. w. so klein, dass sie selbst bei Dreiecksseiten von 100 000 Meter auf unserer Erdoberfläche noch vernachlässigt werden können.

Wäre unsere Erde stärker abgeplattet, so würden auch diese Abweichungen stärker sein; und im Sinne der Theorie kommt es auf den Grössenbetrag der Abweichungen nicht an, sondern darauf, dass das mathematische Gesetz des Linienzuges A, B, C, D erkannt werde.

Jedenfalls würden bei stetig sich ändernder positiver Krümmung, wie sie unser Erdellipsoid hat, die Abweichungen $a b$ immer kleiner. wenn die Zielweiten $A B$, $B C$ u. s. w. fortgesetzt verkürzt werden. Die kleinen Azimutverschiebungen $a A b$ u. s. w. wachsen nach (10) § 69. S. 358 nur mit dem *Quadrate* der Zielweiten; und lässt man die Zielweiten $A B$, $B C$.... selbst unendlich klein (im Sinne der Differential-Rechnung) werden, so werden die Schleifen $A a B b$ u. s. w. sich schliessen, und man bekommt statt des Schleifen-Zuges *eine* stetige Linie $A B C D$, welche *geodätische Linie* heisst, und im allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung ist.

Als Richtungswinkel, bzw. Azimute der geodätischen Linie, welche nach dem Zusammenfallen der Schleifen in Fig. 1. entsteht, sind die Winkel α, β, γ, δ zu betrachten, oder genauer die Grenzwerte, gegen welche diese Winkel α, β, γ, δ bei unbegrenzt abnehmenden Strecken AB, BC u. s. w. konvergieren.

Mit den Begriffen der Feld- und Landmessung in der Ebene kann man die geodätische Linie auch kurz so erklären:

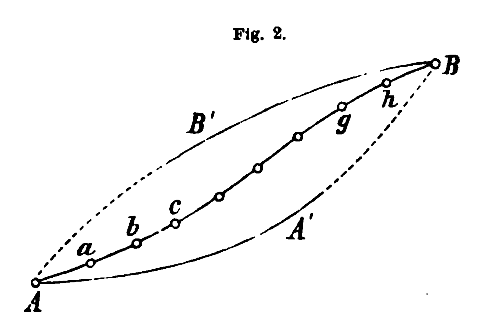
Man macht auf der ellipsoidischen Erdoberfläche genau dasselbe, was der Landmesser thut, wenn er eine sehr lange *Gerade* AD in der Ebene stückweise absteckt, indem er seinen Theodolit zuerst in A, dann in B, C, D aufstellt, und jedesmal einen Brechungswinkel von 180° absetzt.

Oder: eine geodätische Linie ist in Bezug auf fortgesetztes Einweisen mit kurzen Zielweiten auf einer krummen Fläche dasselbe, was in der Ebene ein gerade gestrecktes Polygon mit lauter Brechungswinkeln von 180° ist.

Eine geodätische Linie auf irgend einer krummen Fläche ist in der angegebenen Beziehung auch dasselbe, was auf einer Kugelfläche ein grösster Kreisbogen ist.

Wenn hiernach die Absteckung in kleinen *Teil*strecken in der Ebene für die Gerade, auf der Kugel für den Grosskreisbogen und auf dem Ellipsoid oder irgend einer andern krummen Fläche für die geodätische Linie, einander analog sind, so ist dagegen für die Absteckung oder Sichtung auf die *Gesamt*länge diese Analogie nicht mehr vorhanden, was durch Fig. 2. näher erläutert werden soll.

Fig. 2.



In Fig. 2. sei eine geodätische Linie $A\,a\,b\,c \ldots g\,h\,B$ durch schrittweises Abstecken mit den *kleinen* Zielweiten $Aa = ab = bc$ u. s. w. erhalten, wobei der Theodolit in a, b, c u. s. w. immer Brechungswinkel von 180° zeigt.

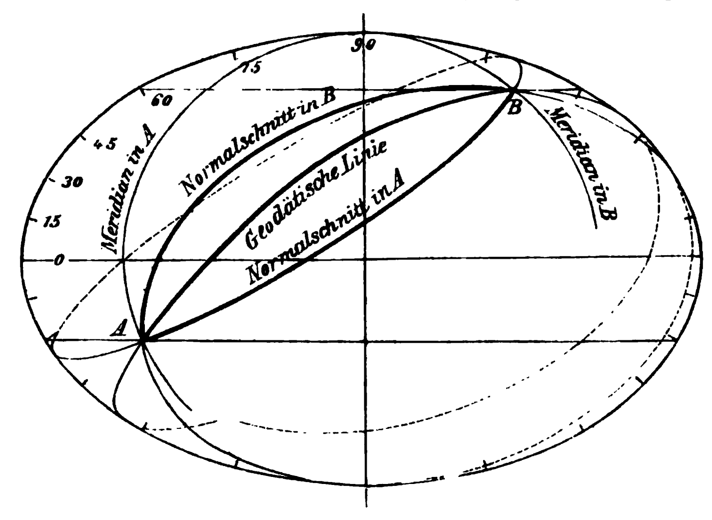
Stellt man aber nach Absteckung der Einzelpunkte den Theodolit wieder in A lotrecht auf, und zielt auf *einmal* nach dem Endpunkte B (sofern die Erdkrümmung dieses gestattet), so bekommt man eine ganz *andere* Sichtlinie als vorher, nämlich nun $A\,A'\,B$ als vertikalen Schnitt von A nach B, und ebenso in B die Sicht $B\,B'\,A$ als vertikalen Schnitt von B nach A.

Um dieses noch deutlicher zu zeigen, haben wir in Fig. 3. S. 369 die beiden Normalschnitte (Vertikalschnitte) zwischen zwei Punkten A und B, nebst der dazwischen verlaufenden geodätischen Linie auf einem Umdrehungs-Ellipsoid mit der Abplattung 1 : 3 dargestellt.

Diese Fig. 3. ist nach einem Modell gemacht, dessen grosse Halbaxe $a = 15^{cm}$ und dessen kleine Halbaxe $B = 10^{cm}$ ist. Es ist also die Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{3}$, die Exzentrizität $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = 0{,}745$ und $e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}} = 1{,}118$. Die Normalschnitte und die geodätische Linie sind nach mathematischen Gesetzen konstruiert.

Fig. 3. (zu S. 368).

Normalschnitte und Geodätische Linie auf einem Umdrehungs-Ellipsoid mit der Abplattung 1 : 3.



Schmiegungs-Ebene und Scheitel-Azimute.

Wenn wir die im vorstehenden, aus den Begriffen des Feld- und Landmessens hergeleitete Erklärung der geodätischen Linie in abstraktere Form fassen, so brauchen wir den Begriff der *Schmiegungs-Ebene* (Osculations-Ebene), d. h. einer Ebene, welche durch zwei aufeinander folgende Elemente einer Kurve, in unserem Falle zwei aufeinander folgende Elemente der geodätischen Linie geht.

Nach unserer Feld-Absteckungs-Erklärung ist dieses die Ebene, in welcher in jedem Punkte der rückwärts und vorwärts gerichtete Strahl eines Brechungswinkels von 180° liegt, und da diese Ebene durch die Vertikalaxe des Theodolits geht, ist sie Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie abgesteckt gedacht wird; und deswegen gilt der Satz:

Die Schmiegungs-Ebene der geodätischen Linie ist überall Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie verläuft.

Wenn in irgend einem Punkte der geodätischen Linie, z. B. B Fig. 1. S. 367, irgend eine Flächen-Tangente TT' gezogen wird, so sind die beiden Scheitelwinkel $bBT = \beta$ und $T'Bb = \beta$, welche die geodätische Linie mit dieser Tangente bildet, einander *gleich*.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob das selbstverständlich und bei *allen* Kurven der Fall wäre; allerdings sind Scheitelwinkel zwischen zweien Geraden, also auch zwischen zwei Flächen-Tangenten in einem Punkte einander gleich, und es wäre also im Punkte B für *jede* Kurve $\beta = \beta'$, wenn ABC als *ein* Element der Kurve gilt; wenn dagegen der Kurventeil ABC aus zwei oder mehr Elementen bestehend angenommen wird, oder mit anderen Worten, wenn man gerade in dem Punkte B die *Krümmung* der Kurve ABC untersuchen will, dann sind die beiden mit β bezeichneten Winkel nur für den Fall gleich, dass die beiden in dem Punkte B zusammentreffenden Elemente der Kurve gemeinsam in *einer* Ebene liegen, welche auch

die Flächen-Normale des Punktes B enthält, d. h. Schmiegungs-Ebene in B ist, so dass dann auch diese Flächen-Normale in B als Schnitt der Schmiegungs-Ebene und der durch TT' gehenden Flächen-Normalebene erscheint.

All dieses ist nun bei der geodätischen Linie erfüllt, und wenn man daher eine geodätische Linie $ABCD\ldots$ (Fig. 1.) durch eine Schar von anderen geodätischen Linien MN, $M'N'$ u. s. w. schneidet, so sind alle dabei auftretenden Schnittwinkel β und β in B, γ und γ in C u. s. w. einander gleich.

Wir werden als geodätische Linien MN, $M'N'$ u. s. w. von Fig. 1., welche sämtlich von einer geodätischen Linie $ABCD$ geschnitten werden, später namentlich die *Meridiane* des Umdrehungs-Ellipsoids finden, wo α, β, γ die Azimute sind, und deswegen sprechen wir das, was über die Winkel β, β, sowie γ, γ u. s. w. erkannt wurde, sofort aus in dem Satze: *die geodätische Linie schneidet jeden Meridian unter gleichen Scheitel-Azimuten.*

Krümmungs-Linien.

Zur allgemeinen Klärung der Begriffe, empfiehlt es sich, neben der geodätischen Linie auch noch die Krümmungslinie zu erwähnen. Eine auf einer krummen Fläche gezogene Krümmungslinie hat die Eigenschaft, dass je zwei aufeinander folgende, ihr zugehörige Flächen-Normalen sich schneiden, was bei der geodätischen Linie nicht der Fall ist, wie z. B. aus den zwei Punkten K_a und K_b Fig. 1. § 62. S. 325 zu ersehen ist.

Eine Krümmungslinie folgt stets der grössten oder der kleinsten Krümmung, deren Richtungen nach dem *Euler*schen Satze ((1) § 34. S. 213) zu einander rechtwinklig sind; und daher bilden die sämtlichen Krümmungslinien einer Fläche zwei Scharen von Kurven, die sich überall gegenseitig rechtwinklig schneiden.

Ein Flächenpunkt, in welchem die beiden Haupt-Krümmungshalbmesser (und damit auch alle Normalschnitts-Krümmungshalbmesser) gleich sind, heisst *Nabelpunkt* der Fläche. Z. B. sind die beiden Pole des Umdrehungs-Ellipsoids Nabelpunkte in diesem Sinne; die Meridiane sind Krümmungs-Linien der einen Schar, und die Parallelkreise sind Krümmungs-Linien der zweiten Schar Das strahlenförmige Ausgehen der Meridiane als erster Schar vom Pol als Nabelpunkt ist jedoch nur besonderer Fall, und findet z. B. bei den 4 Nabelpunkten des dreiaxigen Ellipsoids nicht statt.

Wenn eine Krümmungslinie zugleich geodätische Linie sein soll, so muss sie ganz in einer *Ebene* liegen, weil jede Flächen-Normale sowohl von den beiden benachbarten Flächen-Normalen geschnitten werden, als auch in der Ebene zweier benachbarten Kurven-Elemente liegen muss, was bloss bei einer ebenen Kurve möglich ist; dagegen umgekehrt eine Krümmungs-Linie, die in einer Ebene liegt, ist deswegen nicht notwendig geodätische Linie.

Auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (sowie auf jeder anderen Umdrehungsfläche) ist jeder Meridian geodätische Linie *und* Krümmungslinie; ein Parallelkreis ist Krümmungs-Linie aber *nicht* geodätische Linie.

Weiteres über die allgemeine Theorie der geodätischen Linie, der Krümmungs-Linien u. s. w. giebt „Analytische Geometrie der Kurven im Raume und der algebraischen Flächen von *Salmon*, deutsch bearbeitet von *Fiedler*, Leipzig 1865“.

§ 73. Differential-Gleichungen der geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid.

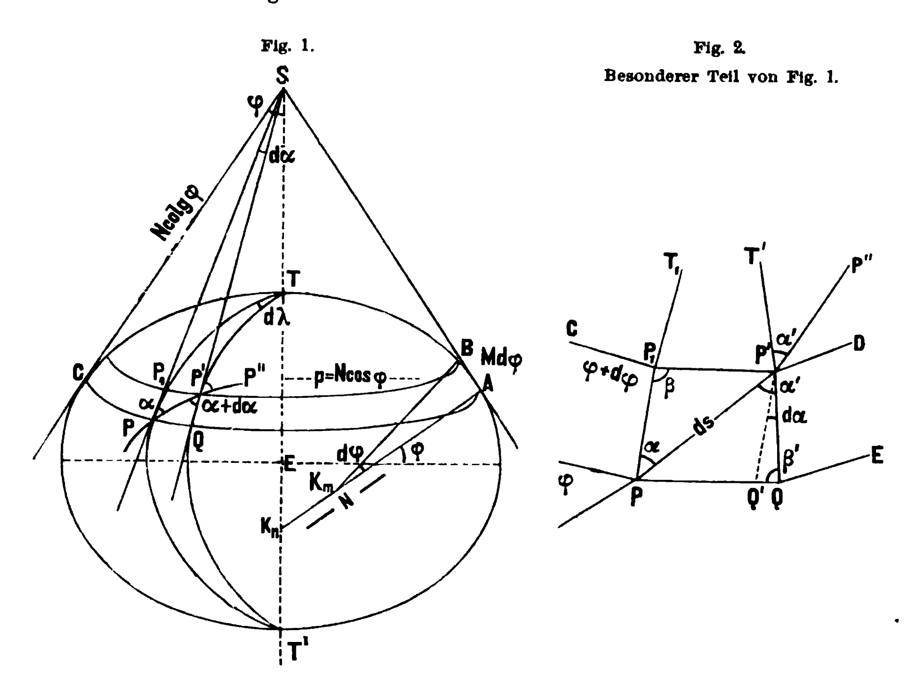
Nachdem wir am Schluss des vorigen § 72. den Satz von den gleichen Scheitel-Azimuten der geodätischen Linie gefunden haben, können wir die Differential-Gleichungen dieser Linie auf irgend einer Umdrehungsfläche aufstellen, in ähnlicher Weise wie wir früher bei Fig. 1. § 56. S. 302 die Differential-Gleichungen des grössten Kreises auf der Kugel durch geometrische Betrachtungen nachgewiesen haben.

Obgleich die nachfolgenden Betrachtungen auf jede beliebige Umdrehungsfläche bezogen werden können, legen wir doch sofort in Fig. 1. unser Umdrehungs-Ellipsoid zu Grunde, weil wir für andere Flächen keine Anwendung haben.

Im Anschluss an Fig. 1. und Fig. 2. stellen wir eine geometrische Differential-Betrachtung an, welche ganz analog dem früheren Falle auf der Kugel (Fig. 1. und Fig. 2. § 56. S. 302) ist. Wir betrachten dabei Fig. 2. als polyedrisches Analogon zu der wirklichen krummen Fläche, und haben dabei den Grenzfall für unbegrenzt abnehmendes ds im Auge.

Fig. 1.

Fig. 2. Besonderer Teil von Fig. 1.



Eine geodätische Linie $PP'P''$ schneidet schief über zwei Meridiane und zwei Parallelkreise des Umdrehungs-Ellipsoids hin, wodurch ein Trapez $PP_1P'Q$ für uns von Wichtigkeit wird, dessen Diagonale PP' ein Stück ds der geodätischen Linie ist.

Indem wir die Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ und den Längenunterschied $\Delta\lambda$ sowie den Meridian-Krümmungshalbmesser M und den Quer-Krümmungshalbmesser N nach alter Bezeichnung annehmen, haben wir (nach Andeutung von K_m und K_n in Fig. 1. und Fig. 2.) die Seiten des Trapezes:

$$AB \text{ oder } PP_1 = M\,d\varphi \tag{1}$$

$$PQ \text{ oder } P_1P' = N\cos\varphi\,d\lambda \tag{2}$$

Wenn nun das Azimut der geodätischen Linie bei P den Wert α hat, und das Element der geodätischen Linie selbst $= ds$ gesetzt wird, so erhält man in erster Näherung, da der Winkel β bei P_1 mit unbegrenzt abnehmendem ds gegen 90° konvergiert:

$$\text{aus (1):} \qquad ds\cos\alpha = M\,d\varphi \tag{3}$$

$$\text{aus (2):} \qquad ds\sin\alpha = N\cos\varphi\,d\lambda = p\,d\lambda \tag{4}$$

Um auch für $d\alpha$ eine Differential-Formel zu erhalten, betrachten wir das langgestreckte schmale Dreieck $PP'S$, welches oben bei S den Winkel $d\alpha$ enthält; das-

selbe giebt genau in derselben Weise, wie früher in (3a) § 56. S. 303 gezeigt wurde, die Gleichung:

$$d\alpha = d\lambda \sin\varphi \tag{5}$$

Dabei ist aber zu beachten, dass dieses $d\alpha$ zunächst nur gilt für die Differenz:

$$QP'P - P_1PP' = d\alpha \tag{6}$$

allein wegen des Satzes von den gleichen Scheitel-Azimuten der geodätischen Linie, den wir eingangs zitiert haben, sind die *beiden* in Fig. 2. bei P' mit α' bezeichneten Azimute einander *gleich*, oder noch ausführlicher geschrieben:

$$T'P'P'' = QP'P, \quad \text{also nach (6):} \quad T'P'P'' - P_1PP' = d\alpha \tag{7}$$

Nun haben wir in (3), (4) und (5) bereits die gesuchten Differential-Gleichungen der geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, und überzeugen uns auch, dass dieselben ähnliche Form haben wie die früheren Gleichungen (1), (2), (3) S. 302, welche für den Grosskreisbogen auf der Kugel gelten.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ kann man auch dadurch darstellen, dass man in Fig. 2. eine Parallele $P'Q'$ zu P_1P zieht, dann wird der kleine Winkel $Q'P'Q = d\alpha$ derselbe Wert wie $d\alpha$ an der Spitze S von Fig. 1. Dieses führt auch auf eine neue Formel für $d\alpha$, denn es ist nach Fig. 2.:

$$d\alpha = \frac{Q'Q}{P'Q'} = \frac{Q'Q}{ds\cos\alpha} \tag{8}$$

Nun ist QQ' das Differential von PQ oder von P_1P', wofür wir diesesmal den Parallelkreishalbmesser $N\cos\varphi = p$ einführen wollen, indem $PQ = p\,d\lambda$ ist. Damit wird:

$$QQ' = -d(p\,d\lambda) = -dp\,d\lambda \tag{9}$$

Wir haben dieses negativ genommen, weil der Parallelkreisbogen bei wachsender Breite ($d\varphi$ positiv) abnimmt. Wir haben also nun aus (8) und (9):

$$d\alpha = -\frac{dp\,d\lambda}{ds\cos\alpha}$$

Wenn man hiezu wieder (4) nimmt, und $d\lambda$ eliminiert, so hat man:

$$p\cos\alpha\,d\alpha = -dp\sin\alpha \tag{10}$$

Dieses ist das Differential von:

$$p\sin\alpha = k \text{ (konstant)} \tag{11}$$

und damit haben wir als erste Integration der Differential-Gleichungen der geodätischen Linie einen wichtigen Satz (11), welcher in Worten lautet:

Das Produkt aus dem Parallelkreishalbmesser p in den Sinus des Azimuts α ist für den ganzen Lauf der geodätischen Linie konstant.

Dieser Satz, welchem auf der Kugel der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie entspricht, giebt sofort Aufschluss über den Gesamtverlauf einer geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid.

Die beiden Faktoren p und $\sin\alpha$, deren Produkt nach (11) konstant $= k$ bleiben muss, schwanken selbst zwischen leicht angebbaren Grenzen. Das Azimut α kann im allgemeinen nicht $=$ Null werden (was dem besonderen Fall des Meridians entspricht), sondern hat seinen kleinsten Wert dann, wenn p seinen grössten Wert hat, d. h. im Äquator, wo $p = a$ ist; also:

$$\sin\alpha_{min} = \frac{k}{a} \tag{12}$$

Der grösste Wert von α, d. h. 90°, entspricht dem kleinsten Wert von p, d. h. mit $\sin\alpha = 1$ hat man:

$$p_{min} = k \tag{13}$$

Die Konstante k der Formel (11) ist also der Halbmesser des nördlichsten oder südlichsten Parallelkreises, den die geodätische Linie erreichen kann; und dadurch ist auch eine gewisse äusserste geographische Breite bestimmt, über welche eine geodätische Linie nicht hinaus kommen kann.

In Fig. 3. § 72. S. 369 ist diese äusserste Breite = 60°. Die geodätische Linie berührt abwechselnd den nördlichen und den südlichen äussersten Parallelkreis, und da sie im allgemeinen nicht in sich selbst zurückkehrt, umläuft sie zwischen den genannten äussersten Parallelen das Sphäroid in unendlich vielen spiralförmigen Windungen.

Übersicht der Haupt-Formeln.

Wir wollen unsere gefundenen Formeln, die zu weiterem gebraucht werden, nochmals zusammenstellen:

(3) $$ds \cos\alpha = M\,d\varphi \tag{φ}$$

(4) $$ds \sin\alpha = N \cos\varphi\, d\lambda \tag{λ}$$

(5) und (4) $$d\alpha = d\lambda \sin\varphi \quad \text{oder} \quad d\alpha = \frac{ds}{N} \sin\alpha \tang\varphi \tag{α}$$

(11) $$p \sin\alpha = k \qquad (p = N\cos\varphi) \tag{ψ}$$

Dabei ist M der Meridian-Krümmungshalbmesser, N der Quer-Krümmungshalbmesser und p der Parallelkreis-Halbmesser für die Breite φ.

Die letzte der vorstehenden Gleichungen, welche wir mit (ψ) bezeichnet haben, weil sie nachher auf die „reduzierte Breite" ψ angewendet wird, kann man auch unmittelbar aus Fig. 2. herleiten, indem man in erster Näherung setzt:

$$P_1 P' = ds \sin\alpha \quad \text{und} \quad PQ = ds \sin\alpha' \tag{14}$$

also
$$P_1 P' \sin\alpha' = PQ \sin\alpha \tag{15}$$

$$p' \sin\alpha' = p \sin\alpha = \text{Konstant.} \tag{16}$$

Diese letztere Begründung, welche zu der ersten Veröffentlichung unserer vorstehenden elementaren Herleitung der geodätischen Grundformeln („Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 298) in der „Zeitschr. f. Verm. 1880" S. 337 von *Wiener* als Zusatz beigefügt wurde, entspricht weniger unseren Zwecken als die erste Herleitung (11) durch Integration von (10), denn dadurch wird gezeigt, dass die wichtige Gleichung (ψ) eine erste *Folgerung* aus den zuerst aufzustellenden, und jedenfalls nötigen Differential-Grundformeln (φ), (λ), (α) (bzw. aus (λ) und (α)) ist, während die Herleitung (14), (15), (16) zu der Anschauung führen könnte, dass die Gleichung (ψ) eine *neue*, in den vorhergehenden Formeln noch nicht enthaltene sei.

Dieses veranlasst auch zu einer näheren Betrachtung der von uns gemachten Annahme, dass die Winkel β und β' in Fig. 2. bei unbegrenzt abnehmendem ds gegen 90° konvergieren, und dass deswegen die Formeln (3) und (4) wie für ein *rechtwinkliges* Dreieck angeschrieben werden durften.

Wenn man die Winkel β und β' zunächst nicht = 90° setzt, so hat man nach Fig. 2.:

$$PP_1 = \frac{ds}{\sin\beta} \sin(\alpha+\beta) \quad , \quad P'Q = \frac{ds}{\sin\beta'} \sin(\alpha'+\beta') \tag{17}$$

$$P_1 P' = \frac{ds}{\sin\beta} \sin\alpha \quad , \quad PQ = \frac{ds}{\sin\beta'} \sin\alpha' \tag{18}$$

Dabei ist
$$\beta = 90° + \frac{d\alpha}{2} \qquad \beta' = 90° - \frac{d\alpha}{2} \tag{19}$$

Führt man dieses weiter aus, und vernachlässigt höhere Glieder, so kommt man wieder auf die Formeln (3) und (4).

Die wichtige Frage der gleichen Scheitel-Azimute α' und α' in Fig. 2. wollen wir dadurch

weiter aufklären, dass wir zeigen, dass z. B. der Parallelkreis $C P_1 P' D$ solche gleiche Scheitel-Azimute *nicht* hat.

Der Parallel-Kreisbogen hat bei dem Überschreiten des Meridians bei P' zwei Scheitel-Azimute, deren Differenz zunächst mit δ bezeichnet sei, d. h.:

$$P_1 P' Q - T' P' D = \delta \tag{20}$$

Hier ist innerhalb der Grössenordnung $d\alpha$ genau: $T' P' D = P' Q E$ oder auch $= P' Q P = \beta$ also auch wegen (19):

$$P_1 P' Q - P' Q P = \delta \quad \text{oder} \quad 90^\circ - \frac{d\alpha}{2} - \left(90^\circ + \frac{d\alpha}{2}\right) = - d\alpha = \delta \tag{21}$$

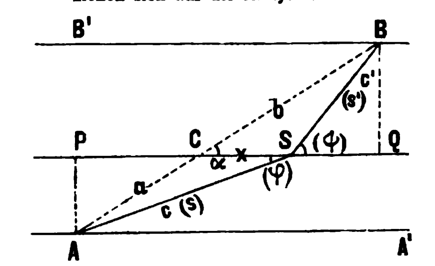
d. h. die Scheitel-Azimute des Parallelkreises sind *nicht* gleich, sondern differieren gerade um die Meridian-Konvergenz $d\alpha$, welche bei der geodätischen Linie die Differenz der Azimute auf *zwei* aufeinander folgenden Meridianen ist.

§ 74. Die geodätische Linie als kürzeste Linie.

Im Anschluss an Fig. 1. nehmen wir zuerst folgende Aufgabe: Man habe ein Prisma mit den drei Kanten AA', $B'B$, PQ; die wir (zur Vereinfachung der Anschauung) so gelegt denken, dass AA' und $B'B$ in einer horizontalen Ebene und PQ im Abstand h darüber sich befindet. Es soll auf der oberen Kante ein Punkt S so bestimmt werden, dass die Summe der *schiefen* Verbindungen $AS + SB = (s) + (s')$ nach zwei festen Punkten A und B möglichst klein werde.

Fig. 1.

Die eingeklammerten Masse (s), (s'), (φ), (ψ) beziehen sich auf die *schiefen* Ebenen.



Wenn die in Fig. 1. eingeschriebenen Masse a, b, c, c', x nebst dem Winkel α für die Grundriss-Ebene gelten, so hat man:

$$c^2 = a^2 + x^2 + 2\,a\,x\cos\alpha \quad , \quad c'^2 = b^2 + x^2 - 2\,b\,x\cos\alpha \tag{1}$$

Wenn weiter (s) und (s') die *schiefen* Entfernungen AS und SB bedeuten, und h die Höhe von S über A und B, so ist:

$$(s)^2 = c^2 + h^2 \qquad (s')^2 = c'^2 + h^2 \tag{2}$$

Nun soll $(s) + (s')$ ein Minimum werden, d. h.:

$$\sqrt{a^2 + x^2 + 2\,a\,x\cos\alpha + h^2} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2\,b\,x\cos\alpha + h^2} = \text{Minimum} \tag{3}$$

Wenn man dieses nach der unabhängigen Veränderlichen x differentiirt, so findet man:

$$\frac{x + a\cos\alpha}{(s)} + \frac{x - b\cos\alpha}{(s')} = 0 \tag{4}$$

Es ist aber nach Fig. 1.:

$$x + a\cos\alpha = PS \quad , \quad b\cos\alpha - x = QS$$

Damit wird (4):

$$\frac{PS}{(s)} = \frac{QS}{(s')} \quad \text{oder} \quad \cos(\varphi) = \cos(\varphi')$$

$$\text{also: } (\varphi) = (\varphi') \tag{5}$$

Diese Gleichung (5) sagt: der kürzeste Weg auf zweien sich schneidenden Ebenen, über die Kante PQ hinweg, liegt so, dass auf der Scheitel-Kante PQ die beiden Winkel (φ) und (ψ) einander *gleich* sind.

Wenn wir diese einfache Betrachtung dazu anwenden, um die Differential-Eigenschaft der kürzesten Linie auf irgend einer krummen Fläche, insbesondere auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, zu bestimmen, so können wir an Stelle der Kanten AA', BB' u. s. w. die aufeinander folgenden Meridiane treten lassen, und wir wissen nun, dass eine Kurve alle diese Meridiane auf kürzestem Wege überschreitet, wenn die dabei vorkommenden *Scheitel-Azimute gleich* sind, d. h. die kürzeste Linie hat, in Hinsicht auf die Azimute, dieselbe Eigenschaft wie die geodätische Linie, wie wir am Schluss von § 72. S. 370 gesehen haben.

Wir schliessen hieraus, dass die geodätische Linie und die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten identisch sind.

Dabei und bei allen ähnlichen Betrachtungen nehmen wir stillschweigend an, dass zwischen zwei Punkten nur *eine* geodätische Linie und nur *eine* kürzeste Linie bestehe, wir schliessen also Fälle, welche z. B. einem Centriwinkel über 180° auf der Kugel entsprechen, und ähnliche aus, weil solche Fälle unserem Zwecke der mathematischen Vorbereitung praktisch geodätischer Formeln nicht entsprechen.

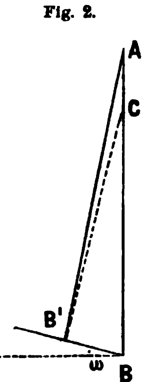
Geodätischer Kreis und geodätische Parallele.

Aus dem Begriffe der *kürzesten* Linie lassen sich durch einfache geometrische Betrachtung zwei Sätze herleiten, betreffend den „*geodätischen Kreis*" und die „*geodätische Parallele*". *Gauss* hat in der Abhandlung „Disquisitiones generales circa superficies curvas", Art. 15. und 16. dieses so dargestellt:

Geodätischer Kreis. Wenn auf einer krummen Fläche von einem Anfangspunkte unendlich viele kürzeste Linien, alle von gleicher Länge ausgehen, so ist die ihre Enden verbindende Linie zu allen einzelnen normal.

Es seien in Fig. 2. AB und AB' zwei gleich lange kürzeste Linien, welche den unendlich kleinen Winkel A zwischen sich fassen; und wir wollen zunächst annehmen, die beiden Winkel bei B und B' seien *nicht* beide $= 90°$, sondern weichen um eine endliche Grösse von 90° ab, so dass nach dem Gesetz der Stetigkeit der eine grösser, der andere kleiner als 90° wäre, z. B. $B = 90° - \omega$. Dann nehmen wir auf der Linie BA einen Punkt C so an, dass $BC = BB' \operatorname{cosec} \omega$ wird; und insofern das unendlich kleine Dreieck $BB'C$ als eben angesehen werden kann, folgt hieraus $CB' = BC \cos \omega$ und ferner:

Fig. 2.



$$AC + CB' = AC + BC \cos \omega = AB - BC(1 - \cos \omega).$$

Es ist aber von vornherein angenommen, dass $AB = AB'$ sei, also:
$$AC + CB' = AB' - BC(1 - \cos \omega).$$

Hiernach würde man von A nach B' einen *kürzeren* Weg über C haben als unmittelbar AB', was der Annahme, dass AB' selbst eine Kürzeste sei, widerspricht. Es kann also ω keine endliche Grösse sein, sondern die Winkel bei B und bei B' sind beide $= 90°$.

Geodätische Parallele. Wenn auf einer krummen Fläche eine beliebige Linie gezogen wird, von deren einzelnen Punkten rechtwinklig zu der Linie und nach derselben Seite kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen, so schneidet die Kurve, welche ihre Enden verbindet, sie alle rechtwinklig.

Man kann dieses ganz ähnlich beweisen wie bei Fig. 2., indem man wieder einen Winkel ω einführt und $\cos^2 \omega$ benützt.

Ein naheliegendes Beispiel für geodätische Kreise *und* für Parallelen bietet das System der Meridiane und der Parallelkreise auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (und auf anderen Umdrehungs-Flächen). Die Parallelkreise sind geodätische Kreise in Bezug auf den Pol als Centralpunkt der Meridiane und geodätische Parallelen in Bezug auf irgend einen Parallelkreis.

Ebenso wie diese Parallelkreise selbst *nicht* geodätische Linien sind, sind auch die geodätischen Kreise und geodätischen Parallelen im allgemeinen selbst nicht geodätische Linien.

Kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche.

Bei der geometrischen Betrachtung von Fig. 1. sind die Kanten BB' und AA' selbst unwesentlich, es handelt sich nur um zwei *Punkte* A und B, welche über die *dritte* Kante PQ hinweg verbunden werden sollen. Durch A und B selbst können beliebige andere Gerade gehen. Man kann deswegen aus Fig. 1. auch schliessen, dass eine kürzeste Linie auf einer *abwickelbaren* Fläche nach Abwicklung in die Ebene eine *Gerade* sein muss (Gleichheit der Winkel (φ) und (ψ)). Die Kanten AA', BB' und PQ, welche in unserer Fig. 1. parallel angenommen wurden, können auch auf einer abwickelbaren Fläche parallel sein (Cylinder), im allgemeinen aber müssen, wenn die Fläche abwickelbar sein soll, je zwei aufeinander folgende solcher Geraden sich *schneiden*.

§ 75. Vergleichung der geodätischen Linie mit den Normal-Schnitten.

Die geodätische Linie erscheint auf kurze Erstreckung im Sinne des Feldmessens in allen ihren Teilen wie eine *Gerade*; würde man dieselbe in kurzen Strecken als polygonalen Zug aufnehmen, so würde man lauter Brechungswinkel von 180° finden, wie bei einer Geraden in der Ebene.

Dagegen ein Normal-Schnitt auf weitere Entfernung erscheint nur in unmittelbarer Nähe des Punktes, in welchem er normal ist (durch dessen Lotlinie er geht) im Sinne des Feldmessens als Gerade, in seinem weiteren Verlaufe würde er durch eine Polygon-Aufnahme nicht mehr Brechungswinkel von 180° geben, sondern eine Aufnahme liefern wie eine flache *Kurve* in der Ebene.

Wir wollen darauf ausgehen, von einem Normal-Schnitt als Kurve in diesem Sinne den *Krümmungshalbmesser* zu bestimmen; dadurch wird es möglich werden, eine geodätische Linie mit den Normal-Schnitten sowohl in Bezug auf Azimute als auch in Bezug auf die lineare Ausdehnung zu vergleichen.

Wir brauchen zuerst die Neigung n, welche eine Normalschnitt-Ebene im Abstande s von dem Punkte, in welchem sie selbst normal ist, mit der Flächen-Normale des Ellipsoids bildet. Mit dieser Neigung haben wir uns in § 69. ausführlich beschäftigt, und wir haben daselbst in (7) S. 358 gefunden:

$$\sin n = \sin \delta_1 \sin \alpha'' \quad \text{oder genähert} \quad n = \delta_1 \sin \alpha \qquad (1)$$

Um diese Formel unserer vorliegenden Aufgabe anzupassen, haben wir zuerst in Fig. 1. S. 377 alle Verhältnisse veranschaulicht; die Gerade AB stellt eine geodätische Linie zwischen zwei Punkten A und B vor; AaB ist der Normal-Schnitt in A, und BbA der Normal-Schnitt in B. Das sind dieselben Bezeichnungen wie in Fig. 1. § 67. S. 347, während nun die Azimutal-Bezeichunngen verschieden von Fig. 1. § 67. S. 347, dagegen mit Fig. 1. § 71. S. 364 übereinstimmend sind, nämlich Azimute der geodätischen Linie in A und B, bzw. α und β, dann α_1 das Azimut AaB und α' das Azimut AbB, und entsprechend bei B. Die Differenzen $\alpha_1 - \alpha'$ und $\beta_1 - \beta'$ sind, wie wir in § 69. gesehen haben, nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^2$; und da auch die

Differenzen $\alpha_1 - \alpha$ und $\alpha - \alpha'$ u. s. w. nur von diesem Range sind, werden wir, von Anfang an, entsprechend kleine Vernachlässigungen eintreten lassen. Wenn die Formel (1) mit α sich auf den Punkt A bezieht, so gilt entsprechend für den Punkt B die Formel:

$$n' = \delta_2 \sin \beta \qquad (2)$$

Hiezu ist nach (13) § 67. S. 350:

$$\delta_2 = \eta_1^2 \frac{\Delta \varphi}{V_1^2} - \frac{3}{2} \eta_1^2 \left(\frac{\Delta \varphi}{V_1^2}\right)^2 t_1 + \ldots \qquad (3)$$

Nun hat man aus den Reihen-Entwicklungen von § 59. in Verbindung mit (28) § 63. S. 329:

$$\frac{\Delta \varphi}{V_1^2} = \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 \alpha \, t_1 \qquad (4)$$

Fig. 1.

und: $$\beta = \alpha + \sigma \sin \alpha \, t_1 \qquad (5)$$

also: $$\sin \beta = \sin \alpha + \sigma \sin \alpha \cos \alpha \, t_1$$

dabei ist: $$\sigma = \frac{s}{N} \qquad t_1 = \operatorname{tang} \varphi_1 \qquad (6)$$

Setzt man (3), (4) und (5) in (2), so bekommt man:

$$n' = \eta_1^2 \, \sigma \sin \alpha \cos \alpha - \eta_1^2 \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \, t_1 \qquad (7)$$

Dieses ist die Neigung, welche die Schnitt-Ebene $A a B$ im jenseitigen Punkte B mit der Flächen-Normalen von B bildet, und wenn wir noch den Krümmungshalbmesser R' der Schnitt-Kurve $A a B$ im Punkte B wüssten, so könnten wir sofort den Krümmungshalbmesser ϱ der Kurve $A a B$ im Horizont von B angeben:

$$\varrho = \frac{R'}{\sin n'} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\sin n'}{R'} = \frac{n'}{R'} \qquad (8)$$

Ausführlicher beschrieben ist ϱ der Krümmungshalbmesser derjenigen Kurve, welche durch Projektion der Schnitt-Kurve $A a B$ auf die Berührungs-Ebene von B entsteht.

Den nun erforderlichen Krümmungshalbmesser R' haben wir in Voraussicht dieses Falles früher am Schlusse von § 68. (20) S. 355 bestimmt, nämlich:

$$R' = R\left(1 - \eta^2 \frac{\Delta \varphi}{2} t + \ldots\right) \qquad (9)$$

Dabei bedeutet R den Krümmungshalbmesser der Schnitt-Kurve $A a B$ in der Mitte von $A B$, und da wir nun aus (7), (8) und (9) sehen, dass die Mitführung des zweiten Gliedes von (9) nur eine Korrektion von der Ordnung $\eta^4 \sigma^2$ geben würde, deren Ordnung in (7) ohnehin vernachlässigt ist, nehmen wir nun schlechthin $R' = R$ als konstant, und bilden aus (7), (8) und (9):

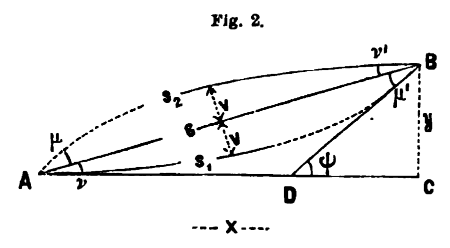
$$\frac{1}{\varrho} = \eta_1^2 \frac{s}{R N} \sin \alpha \cos \alpha - \eta_1^2 \frac{s^2}{2 R N^2} \sin \alpha \, t_1 \qquad (10)$$

Nun denken wir uns die drei Kurven von Fig. 1. durch ein rechtwinkliges Coordinaten-System in folgender Art verbunden:

In einer Ebene wird eine *Gerade* $A B$ gezogen, welche als Abbild einer geodätischen Linie $A B$ auf dem Ellipsoid betrachtet wird. Diese Linie dient als Ab-

scissen-Axe; und durch kurze geodätische Ordinaten-Linien rechtwinklig hiezu, werden benachbarte Punkte auf die geodätische Abscissen-Linie bezogen, ähnlich wie in der Ebene, und auf der Kugel bei den *Soldner*schen Coordinaten (S. 261).

Was die nun nötigen Vernachlässigungen betrifft, so wissen wir schon von (17) § 69. S. 359, dass die Ordinaten eines solchen Systems nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ sind. Die Ordinaten-Konvergenz (in erster Näherung sphärisch nach Fig. 3. S. 266 berechnet), wird dann nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^4$, woraus man weiter schliesst, dass es für unsere Zwecke genügt, die fraglichen Coordinaten wie *ebene* rechtwinklige Coordinaten zu behandeln.



Diesen Bedingungen entsprechend ist das Coordinaten-System in nebenstehender Fig. 2. gezeichnet. AB ist das geradlinig erscheinende Abbild der geodätischen Linie AB; jedoch als Abscissen-Axe des Coordinaten-Systems wird nicht AB, sondern die Tangente AC des Normalschnittes von $A s_1 B$ genommen.

Die Normalschnitt-Kurve $A s_1 B$ von A nach B habe eine Gleichung, deren zweiter Differential-Quotient sei:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = P x + Q \frac{x^2}{2} \tag{11}$$

Diesen zweiten Differential-Quotienten dürfen wir in bekannter, hier genügender, Annäherung gleich der Reciproken des Krümmungshalbmessers ϱ nach (10) setzen, ebenso ist auch $s = x$ zu setzen, und damit folgt aus (10) und (11):

$$P = \frac{\eta_1^2}{RN} \sin\alpha \cos\alpha \quad , \quad Q = -\frac{\eta_1^2}{RN^2} \sin\alpha\, t_1 \tag{12}$$

Damit ist auch bestimmt, dass die zunächst unbestimmt angenommene Gleichung (11) kein Glied ohne x hat. Man kann die Kurven-Gleichung (11) zweimal integrieren:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} + \frac{Qx^3}{6} \tag{13}$$

$$y = \frac{Px^3}{6} + \frac{Qx^4}{24} \tag{14*)}$$

Nun ist es leicht, die Winkel ν und μ anzugeben, welche, nach Fig. 2., die Kurve $A s_1 B$ an beiden Enden mit der geodätischen Linie (Sehne) AB bildet.

Aus (14) findet man mit $x = s$:

$$\nu = \frac{Ps^2}{6} + \frac{Qs^3}{24}$$

und ebenso aus (13):

$$\psi = \nu + \mu' = \frac{Ps^2}{2} + \frac{Qs^3}{6} \quad \text{also} \quad \mu' = \frac{Ps^2}{3} + \frac{Qs^3}{8}$$

Durch Einsetzen der Coëfficienten P und Q von (12) geben diese beiden Gleichungen:

*) Diese Gleichung (14) ist in erster Näherung (mit Vernachlässigung von x^4) die Gleichung einer kubischen Parabel, d. h. derselben Kurve, welche wir in Band II, S. 690 als Übergangs-Kurve für Eisenbahnen kennen gelernt haben.

$$\nu = \frac{\eta_1^2}{6} \frac{s^2}{RN} \sin\alpha \cos\alpha - \frac{\eta_1^2}{24} \frac{s^3}{RN^2} \sin\alpha\, t_1 \tag{15}$$

$$\mu' = \frac{\eta_1^2}{3} \frac{s^2}{RN} \sin\alpha \cos\alpha - \frac{\eta_1^2}{8} \frac{s^3}{RN^2} \sin\alpha\, t_1 \tag{16}$$

Die Länge s_1 der Kurve $A\, s_1\, B$ findet sich, indem $AC = c$ gesetzt wird, in erster Näherung:

$$s_1 = \int_0^c \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^c \left(1 + \frac{P^2 x^4}{8}\right) dx = c + \frac{P^2 c^5}{40} \tag{17}$$

Zur Vergleichung hat man die Länge der Geraden AB:

$$s = \sqrt{c^2 + \left(\frac{P c^3}{6}\right)^2} = c + \frac{P^2 c^5}{72} \tag{18}$$

Aus (17) und (18) hat man die Differenz, indem $c = AC$ nun genügend $= s$ gesetzt wird:

$$s_1 - s = \frac{P^2 s^5}{90} = \frac{\eta_1^4}{90} \frac{s^5}{R^2 N^2} \sin^2\alpha \cos^2\alpha \tag{19}$$

Auch den Querabstand v findet man leicht als Differenz der Mittel-Ordinaten, in erster Näherung:

$$v = \frac{1}{2} \frac{P s^3}{6} - \frac{P}{6} \left(\frac{s}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} P s^3 = \frac{\eta_1^2}{16} \frac{s^3}{RN} \sin\alpha \cos\alpha \tag{20}$$

Bei diesen Formeln (19) und (20) haben wir die zweiten Glieder mit Q vernachlässigt, welche in (15) und (16) noch beibehalten sind.

Wir wollen nun die wichtigen Formeln (15) und (16) noch umformen, so dass die *Mittel*breite und das *Mittel*azimut eingeführt werden.

Wir setzen hiezu:

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi_m \qquad \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha_m \tag{21}$$

Damit wird:

$$\eta_1^2 = e'^2 \cos^2\varphi_1 \quad , \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi_m$$

$$\eta_1^2 = \eta^2 (1 + 2 (\varphi_m - \varphi_1) \tan\varphi_m) = \eta^2 (1 + \sigma \cos\alpha\, t) \tag{22}$$

$$\alpha = \alpha_m - \frac{\sigma}{2} \sin\alpha\, t \tag{23}$$

$$\sin\alpha = \sin\alpha_m - \frac{\sigma}{2} \sin\alpha \cos\alpha\, t \tag{24}$$

$$\cos\alpha = \cos\alpha_m + \frac{\sigma}{2} \sin^2\alpha\, t \tag{25}$$

All dieses (22), (24), (25) in (15) und (16) eingesetzt, giebt:

$$\nu = \frac{\eta^2}{6} \frac{s^2}{RN} \sin\alpha_m \cos\alpha_m + \frac{\eta^2}{24} \frac{s^3}{RN^2} \sin\alpha\, t \tag{26}$$

$$\mu' = \frac{\eta^2}{3} \frac{s^2}{RN} \sin\alpha_m \cos\alpha_m + \frac{\eta^2}{24} \frac{s^3}{RN^2} \sin\alpha\, t \tag{27}$$

Wenn man nun auch noch die Winkel ν' und μ von Fig. 2. haben will, so muss man die vorstehende Entwicklung von den Anfangs-Gleichungen (2) und (3) an für den Fall der zweiten Kurve *wiederholen* (was wir hier nicht ausführen); dadurch wird man die Werte ν' und μ finden, die wir nun im Zusammenhang mit den vorstehenden ν und μ' in abgekürzter Bezeichnung zusammenstellen. Wir wollen dabei setzen:

$$\frac{s^2}{2RN} \sin \alpha_m \cos \alpha_m = \varepsilon \tag{28}$$

$$\frac{s}{N} \sin \alpha\, t = \gamma \quad , \quad \frac{s}{R} = \sigma \tag{29}$$

Es ist nämlich ε in erster Näherung der sphärische Excess eines Dreiecks nach Fig. 4. § 69. S. 358, und γ ist in erster Näherung die Meridian-Konvergenz zwischen den beiden Punkten A und B, welche wir auch sonst mit γ bezeichnet haben.

Damit erhalten die 4 kleinen Winkel von Fig. 2. folgende Formeln:

$$\mu = \eta^2\left(\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{\sigma^2}{24}\gamma\right) \qquad \nu' = \eta^2\left(\frac{1}{3}\varepsilon - \frac{\sigma^2}{24}\gamma\right) \tag{30)*}$$

$$\nu = \eta^2\left(\frac{1}{3}\varepsilon + \frac{\sigma^2}{24}\gamma\right) \qquad \mu' = \eta^2\left(\frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\sigma^2}{24}\gamma\right) \tag{31)*}$$

$$\mu + \nu = \eta^2 \varepsilon \qquad \nu' + \mu' = \eta^2 \varepsilon \tag{32}$$

Diese beiden letzten Formeln (32) stimmen mit den früheren (15) und (32) § 69. S. 359—361. Wenn man auch wieder die Azimute selbst nach Fig. 1. einführt, so hat man die zwei wichtigsten der vorstehenden Formeln so:

$$\alpha_1 - \alpha = \nu = \eta^2\left(\frac{1}{3}\varepsilon + \frac{\sigma^2}{24}\gamma\right) \tag{33}$$

$$\beta_1 - \beta = \nu' = \eta^2\left(\frac{1}{3}\varepsilon - \frac{\sigma^2}{24}\gamma\right) \tag{34}$$

Hieraus auch:

$$(\beta - \alpha) - (\beta_1 - \alpha_1) = \eta^2 \frac{\sigma^2}{12}\gamma = \eta^2 \frac{\sigma^3}{12} \sin \alpha\, t \tag{35}$$

(Diese Formel haben wir schon früher in (11) § 71. S. 366 angewendet.)

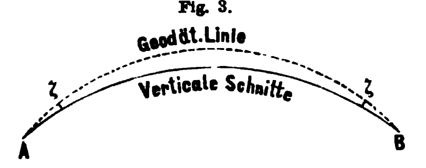
Wenn man die Abkürzungen (28) und (29) auch in (19) und (20) einführt, so bekommt man (ohne Unterscheidung von η_1 und η):

$$v = \frac{1}{8}\eta^2 s \frac{\varepsilon}{\varrho} \quad \text{und} \quad s_1 - s = \frac{2}{45}\eta^4 s \left(\frac{\varepsilon}{\varrho}\right)^2 \tag{36}$$

Die Formeln (30) und (31) mit der zugehörigen Fig. 2. geben über den Lauf der geodätischen Linie zu erkennen, dass dieselbe im allgemeinen *zwischen* den beiden Normalschnitten liegt.

Jedoch ist hier der besondere Fall zu beachten, dass die Punkte A und B, zwischen welchen die geodätischen Linien und die beiden Normalschnitte gezogen sind, auf *gleicher Breite* liegen, wie in Fig. 3. angedeutet ist. In diesem Falle fallen die beiden Nor-

Fig. 3.



*) Diese Formeln (bezw. die vorhergehenden von (26) und (27) S. 379) sind bis auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ übereinstimmend mit den früher von *Andrae* aufgestellten Formeln in dem Werke: „Den Danske Gradmaaling, IV. Bind, Kjobenhavn 1884", S. 390 und Problèmes de haute géodésie, extraits de l'ouvrage Danois: „Den Danske Gradmaaling" par *C. G. Andrae*, 1er Cahier, Copenhague 1881, S. 17.

Unsere Entwicklung (welche in erster Näherung in der „Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 238—241 mitgeteilt wurde) ist unabhängig entstanden und unterscheidet sich von den mehrfachen anderen Lösungen der vorliegenden Aufgabe durch die Kürze der Begründung aus unmittelbarer geometrischer Anschauung.

malschnitte (vertikale Schnitte) in *einen* zusammen, und die geodätische Linie kann daher nicht mehr *zwischen* den beiden liegen.

Dass die geodätische Linie nicht selbst mit diesen beiden ebenen Schnitten zusammenfallen kann, ist unmittelbar einzusehen, insofern die geodätische Linie in diesem Fall nicht selbst eine ebene Kurve sein kann.

Die Formeln (28) — (31) geben weitere Aufklärung:

Das *Mittel*-Azimut ist in diesem Falle $\alpha_m = 90°$, wodurch nach (28) $\varepsilon = 0$ wird, während damit γ nach (29) nicht verschwindet, sondern seinen grössten Wert $= \sigma t$ annimmt. Die Formeln (30) und (31) geben nun:

$$\mu = \nu' = -\eta^2 \frac{\sigma^2}{24}\gamma \quad , \quad \nu = \mu' = +\eta^2 \frac{\sigma^2}{24}\gamma \tag{37}$$

Die geometrische Deutung dieser beiden Formeln ist in Fig. 3. gegeben; die geodätische Linie verläuft über den beiden vertikalen Schnitten, und bildet mit denselben bei A und bei B einen kleinen Winkel ζ, dessen absoluter Werth nach (37) ist:

$$\zeta = \eta^2 \frac{\sigma^2}{24}\gamma = \eta^2 \frac{\sigma^3}{25} t \quad \text{oder} \quad = e'^2 \frac{\sigma^3}{24} \sin\varphi \cos\varphi \tag{38}$$

Denkt man sich eine Dreiecksseite $s = 100\,000^m$ in der Breite $\varphi = 45°$, so giebt dieses nur $\zeta = 0{,}0001''$.

Von ähnlich kleinem Werte sind auch die übrigen höheren Glieder von der Ordnung σ^3 in den vorstehenden Formeln; und für messbare Dreiecksseiten kommen diese höheren Glieder nicht in Betracht.

Zu einem ersten Zahlen-Beispiel nehmen wir rund:

$$s = 100\,000^m \quad , \quad \varphi = \alpha = 45°.$$

Damit wird nach S. 215, $\log N = 6.8054$, $\log R = 6.8046$ und damit zunächst $\varepsilon = 12{,}66''$, und im übrigen nach den vorstehenden Formeln:

$$\mu = \frac{2}{3}\eta^2 \varepsilon = 0{,}028'' \qquad \nu = \frac{1}{3}\eta^2 \varepsilon = 0{,}014'' \tag{39}$$

$$2v = 0{,}0052^m \qquad s_1 - s = s_2 - s = 0{,}000\,000\,0002^m \tag{40}$$

Ein zweites Beispiel (kleines sphäroidisches Normal-Beispiel (2) § 77. S. 386) mit der Mittelbreite $\varphi = 50°$, Breiten-Unterschied $= 1°$ und Längen-Unterschied $= 1°$ giebt:

$$s = 132\,315^m \quad , \quad \alpha = 32°\ 48'\ 20''$$
$$\log N = 805\,496 \quad , \quad \log R = 6.804\,645$$
$$\log \eta^2 = 7.443\,454 \quad , \quad \eta^2 \varepsilon = 0{,}056\,015$$

Also in erster Näherung:

$$\nu = \nu' = \frac{1}{3}\eta^2 \varepsilon = 0{,}018\,672'' \quad \text{und} \quad \mu = \mu' = \frac{2}{3}\varepsilon = 0{,}037\,343''$$

Dagegen nach den genaueren Formeln (30) und (31) hat man noch ein zweites Glied:

$$\eta^2 \frac{\sigma^2}{24}\gamma = \eta^2 \frac{\sigma^3}{24} \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi\, \varrho'' = 0{,}000\,137''$$

und damit wird:

$$\mu = 0{,}037\,206'' \qquad \nu' = 0{,}018\,535'' \tag{41}$$
$$\nu = 0{,}018\,809'' \qquad \mu' = 0{,}037\,480'' \tag{42}$$
$$\mu + \nu = 0{,}056\,015'' \qquad \nu' + \mu' = 0{,}056\,015'' \tag{43}$$

Diese Summen $\mu + \nu = \nu' + \mu'$ stimmen hinreichend mit dem früheren (28) § 67. S. 351 und namentlich mit (33) § 69. S. 362.

Nach (36) berechnen wir auch noch:

$$2\nu = 0{,}0090^{m} \quad \text{und} \quad s_1 - s = s_2 - s = 0{,}000\,000\,000\,4^{m} \qquad (44)$$

Die Differenz $s_1 - s = s_2 - s$ zwischen der linearen Grösse eines Normalschnittes und der geodätischen Linie ist nach (40) und (44) eine nicht einmal mehr mikroskopisch messbare Grösse. Auch für $s = 1\,000\,000^{m}$, mit α und $\varphi = 45°$, erreicht diese Differenz nur den Wert von $0{,}02^{mm}$. Diese Differenz ist in allen praktischen Fällen zu vernachlässigen.

§ 76. Bedeutung der geodätischen Linie für die praktischen Vermessungen.

Die geodätische Linie ist niemals Gegenstand der unmittelbaren *Messung*, sondern nur der *Berechnung*, und dadurch mittelbar ein Hilfsmittel für ausgedehnte geodätische Messungen.

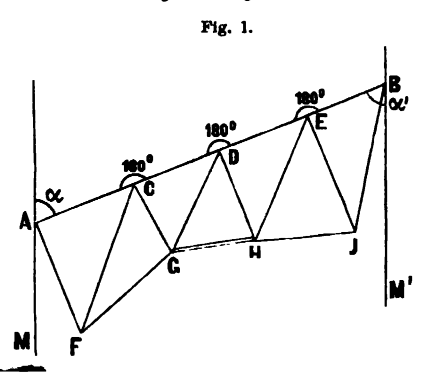
Bei der Messung der einzelnen Dreiecke ist von geodätischen Linien nicht die Rede, denn die Sichten der Theodolit-Messung erfolgen zweifellos in vertikalen Schnitten, und nicht in geodätischen Linien; und auch die astronomischen Azimut-Messungen beziehen sich nicht auf die geodätische Linie, sondern ebenfalls auf vertikale Schnitte.

Nun kann man die gemessenen Azimute und die gemessenen Horizontal-Winkel von den vertikalen Schnitten auf die geodätischen Linien *reduzieren*, wie im vorigen § 75. bei Fig. 2. S. 378 gezeigt worden ist; die Reduktion beträgt sehr wenig, nämlich für 45° Breite und Azimut 45° bei einer Entfernung von $100\,000^{m}$ nur 0,04″ im Azimut, so dass diese Reduktion meist vernachlässigt wird; und jedenfalls kann die Reduktion für die Entfernung selbst immer vernachlässigt werden.

Sei es nun, dass man diese kleinen Reduktionen (nebst anderen, z. B. von § 70.) vernachlässigt, oder sie in Rechnung bringt; jedenfalls *kann* man letzteres thun, und an Stelle eines in Normalschnitten gemessenen Dreiecks-Netzes kann man also nun ein Dreiecks-Netz setzen, dessen Seiten geodätische Linien sind, und dessen Winkel von den horizontalen Tangenten der geodätischen Linien in den Eckpunkten eingeschlossen werden.

Wie man ein solches sphäroidisches Dreiecks-Netz geodätischer Linien in theoretischer Strenge berechnen kann, werden wir erst in unserem späteren Kapitel X. kennen lernen; in der Praxis genügt fast immer die *sphärische* Dreiecks-Berechnung, welche wir in § 39. — § 42. behandelt haben.

Fig. 1.



Um nun weiter zu langen geodätischen Linien überzugehen, welche die Ausdehnung nicht bloss einzelner Dreiecks-Seiten, sondern ganzer Dreiecks-*Ketten* haben, wollen wir nach Fig. 1. die Annahme machen, eine Dreiecks-Kette zwischen den Punkten A und B enthalte einen Zug $ACDEB$, welcher in C, D und E bei der Messung *zufällig* Winkel von 180° geliefert habe.

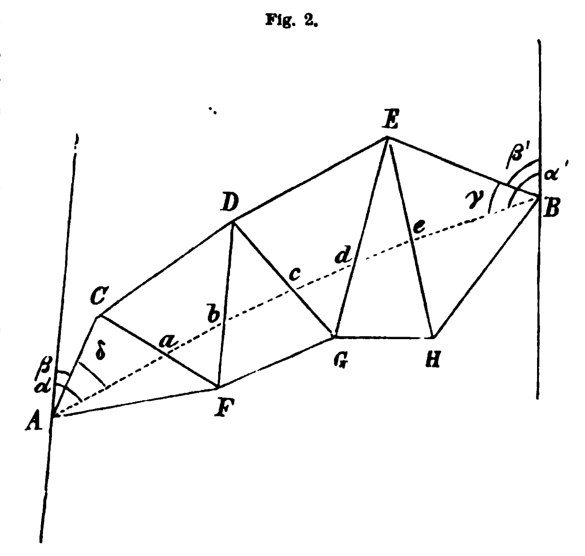
In diesem Falle kann die Linie $AC + CD + DE + EB = AB$, mit den Azimuten α und α' an ihren Endpunkten ge-

radezu als *eine* lange geodätische Linie weiter behandelt werden, indem man in den einzelnen Strecken AC, CD u. s. w. die Azimut-Reduktionen zwischen der geodätischen Linie und den Normalschnitten entweder vernachlässigt, oder nach den Formeln (33) und (34) § 75. S. 380 in allen Beziehungen in Rechnung gebracht denkt.

Ohne diese kleinen Reduktionen erscheinen die Strecken AC, CD, DE u. s. w. mit Brechungs-Winkeln von 180°, als Elemente der geodätischen Linie AB in dem differentialen Sinne der früheren Fig. 2. § 72. S. 368.

Die in Fig. 1. gemachte Annahme, dass bei der Triangulierung zwischen A und B in den Punkten C, D und E Brechungs-Winkel von 180° erhalten werden, kann als Vorbereitung des allgemeineren Falles von Fig. 2. dienen, wobei die geodätische Linie zwischen A und B nicht mit Dreiecksseiten selbst zusammenfällt, sondern verschiedene Dreiecks-Seiten in den Punkten $a\ b\ c\ d\ e$ schneidet, und am Anfang und am Ende gewisse Winkel δ und γ mit Dreiecks-Seiten bildet.

Fig. 2.



Sobald man *einen* dieser Winkel δ und γ wüsste, könnte man die ganze geodätische Linie $A\ a\ b\ c\ d\ e\ B$ sphärisch berechnen, indem man die einzelnen Strecken als Seiten sphärischer Dreiecke behandelte, z. B. Aa als Seite des Dreiecks ACa oder AFa, dann ab als Seite des Dreiecks aFb u. s. w. Die Azimut-Übertragung in a, b u. s. w. müsste stets nach dem Gesetz der gleichen Scheitel-Winkel geschehen, also so, dass Winkel AaC = Winkel baF u. s. w.

All dieses setzt, wie schon erwähnt, voraus, dass man den einen Winkel δ oder γ kenne, und da das in Wirklichkeit nicht genau der Fall ist, kann das ganze Verfahren nur *mittelbar* angewendet werden. Man rechnet nämlich die ganze Dreiecks-Kette, mit Annahme eines mittleren Krümmungshalbmessers zuerst sphärisch durch, und dadurch sind auch die beiden Winkel δ und γ sphärisch bestimmt. Man kann zu ihrer Ausmittlung z. B. *Soldner*sche Coordinaten (§ 46. — § 48.) oder sphärische geographische Coordinaten (§ 57. — § 60.) oder irgend welche andere geschlossene oder entwickelte Formeln der sphärischen Trigonometrie anwenden; erste Näherungen der Winkel δ und γ werden sich jedenfalls finden lassen.

Mit einer solchen Näherung, z. B. für δ, beginnt man nun eine zweite schärfere Rechnung, formell auch sphärisch, aber so, dass in jedem der Dreiecke AaF, baF, u. s. w. ein *besonderer*, der mittleren geographischen Breite des Dreiecks entsprechender Krümmungshalbmesser angewendet wird. Wenn dann am Ende das letzte Dreieck EeB oder eHB nicht schliesst, d. h. wenn man den Endpunkt B verfehlt hat, so

kann man aus der Querabweichung und der Gesamtlänge AB leicht eine Verbesserung berechnen, mit welcher die ganze Rechnung wiederholt und dann wohl zum Schluss gebracht werden kann.

Stimmt diese ganze Rechnung von A bis B in sich, sind also auch die Winkel δ und γ bekannt, so kann man auch die in A und B etwa gemessenen Azimute β und β', welche sich als astronomische Messungen auf die Dreiecks-Seiten AC und BE beziehen, nun auf die Azimute α und α' der geodätischen Linie AB, bzw. BA reduzieren, denn es ist:

$$\alpha = \beta + \delta \quad , \quad \alpha' = \beta' + \gamma \qquad (1)$$

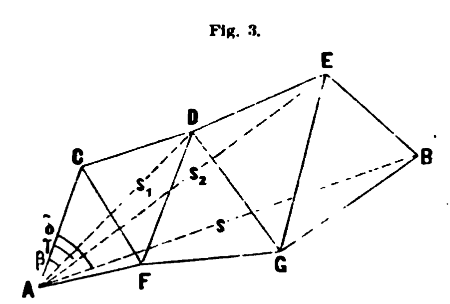
Sphärische Polar-Coordinaten.

Wenn man bei der soeben beschriebenen Berechnung geodätischer Linien, welche durch vorstehende Fig. 2. veranschaulicht ist, sich begnügen will, für *alle* in Frage kommenden Dreiecke *einen* gemeinschaftlichen Krümmungshalbmesser anzuwenden, dann ist indirekte Rechnung und Wiederholung nicht nötig, und von den verschiedenen möglichen Formen der sphärischen Coordinaten, die wir hiebei erwähnt haben, wollen wir *eine* Form, nämlich sphärische Polar-Coordinaten noch besonders betrachten, weil diese Form bei *Bessels* „Gradmessung in Ostpreussen" zur Anwendung kam und zu manchen Erörterungen Veranlassung gegeben hat.

Denken wir uns in Fig. 3., welche im wesentlichen dieselbe Bedeutung hat, wie Fig. 2., ausser AB auch noch die Linien AD und AC gezogen, so ist klar, dass man das Dreieck ACD berechnen kann aus den zwei Seiten AC, CD und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bei C. Damit hat man die Entfernung $AD = s_1$ und auch den Winkel β bei A, und alle Winkel bei D.

Man kann daher nun ein zweites langgestrecktes Dreieck ADE berechnen, welches die neue Entfernung $AE = s_2$, den kleinen Winkel $\gamma - \beta$ bei A und alle Winkel bei E liefert. Ein letztes langgestrecktes Dreieck endlich liefert die Entfernung $AB = s$, den kleinen Winkel $\delta - \gamma$ bei A, also auch δ selbst, und alle Winkel bei B. Hiebei kann man die einzelnen Dreiecke nicht bloss sphärisch, sondern auch sphäroidisch berechnen (vgl. das am Schlusse dieses Paragraphen folgende Citat *Hansen*).

Fig. 3.



Ein letztes, und wohl das beste Verfahren, lange geodätische Linien aus Dreiecksketten zu berechnen, können wir durch vorgreifendes Zitieren der Theorien unseres *nächsten* Kapitels angeben: Man rechnet die geodätische Übertragung von Länge, Breite und Azimut schrittweise von Dreiecksseite zu Dreiecksseite durch die ganze Kette hindurch nach § 79. (oder auch nach § 78.) und dann kann man die ganze Linie vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt nach § 83. berechnen, sowie etwa nach § 82. noch eine Kontroll-Rechnung dazu machen.

Bei diesem Verfahren braucht man, ohne indirekt rechnen zu müssen, nicht *mehr* Voraussetzungen zu machen, in Bezug auf die Erddimensionen und auf die Breiten des Anfangspunktes und das Azimut der Anfangs-Richtung, als unbedingt nötig ist. Eine völlig voraussetzungslose Berechnung geodätischer Linien giebt es nicht.

Über die Bedeutung der geodätischen Linie für die praktische Geodäsie im allgemeinen lässt sich so viel sagen: Die Einführung der Theorie der geodätischen Linie in der Geodäsie ist keine Notwendigkeit, wie z. B. die Theorie der geradlinigen ebenen Dreiecke es für die ebene Triangulierung ist; man könnte die Aufgaben der höheren Geodäsie auch z. B. durch *Sehnen*-Dreiecke und polyedrisch-räumliche Punkt-Bestimmungen und in noch manch anderer Weise behandeln; allein die geodätische Linie hat sich bis jetzt als bestes Mittel bewährt, zwischen den unmittelbaren geodätischen und astronomischen Messungen einerseits und den Annahmen über die Erdoberfläche andererseits, die nötigen mathematischen Beziehungen herzustellen.

Geodätische Linien als Repräsentanten ganzer Triangulierungs-Ketten sind z. B. die Verbindungslinien des astronomisch-geodätischen Netzes von Fig. 1. § 28. S. 193.

Die sphärische Berechnung langer geodätischer Linien aus Dreiecks-Ketten ist von *Bessel* in der „Gradmessung in Ostpreussen“ § 61. S. 253—254 ausgeführt worden. Um hiebei ganz sicher den *Bessel*schen Rechnungsgang zu verstehen, haben wir in unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, § 61. und § 77., S. 297—300 und S. 340—342, ein Zahlen-Beispiel mit allen Einzelheiten nachgerechnet. Es besteht hiebei eine unaufgeklärte Frage, warum *Bessel* als Kugelhalbmesser den Äquatorhalbmesser a und nicht den mittleren Krümmungshalbmesser für seine Breite von etwa $55°$ genommen hat? In der Gesamtausgabe, „Abhandlungen von *Fr. W. Bessel*, herausgegeben von *Engelmann*, 3. Band, Leipzig 1876“, S. 109 ist auch eine briefliche Notiz hierüber von uns abgedruckt, zu der jedoch jetzt zu bemerken ist, dass ein anderer dort berührter Fehler wohl nicht mit jenem Äquatorhalbmesser zusammenhängt.

Die Frage des *Bessel*schen Kugelhalbmessers ist erörtert von *Helmert*, Höhere Geodäsie I. S. 404—405, mit dem Ergebnis, dass der Äquatorhalbmesser in einem Falle von 10 Dreiecken mit rund 60 km Seite, einen Azimut-Übertragungsfehler von $0{,}6'' \cos 2\varphi$ ergeben würde, der sich auf $0{,}013'' \sin 2\varphi$ vermindert, bei der Annahme eines *mittleren* Krümmungshalbmessers für die Mitte der Kette.

Da aber keine besonderen Vorteile aus einer rein sphärischen Rechnung erwachsen, ist solche Rechnung offenbar nicht weiter anzuwenden; am besten wird die im vorstehenden von uns empfohlene Rechnung nach unseren § 79. und § 83. sein.

Zur allmählichen Entwicklung der Berechnungs-Arten für lange geodätische Linien ist auch zu erwähnen General *Baeyer*s „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche, Berlin 1862,“ § 23. mit einer späteren Berichtigung von *Baeyer* nach *Weingarten* im 60. Bande der „Astr. Nachrichten, 1863,“ S. 134—136.

Aus älterer Zeit ist auch zu erwähnen eine Anleitung von *Hansen* zur Berechnung geodätischer Linien, in der Abhandlung von *Hansen*: „Von der Methode der kleinsten Quadrate“ des VIII. Bandes d. Abh. d. m. ph. Cl. d. K. S. Ges. d. W. Nr. V, Leipzig 1867, Art. 154—156, S. 803—806. *Hansen* beschreibt das Verfahren, das in unserer vorstehenden Fig. 3. S. 384 angedeutet ist, empfiehlt aber nicht *sphärische* Berechnung, sondern *sphäroidische* Berechnung der einzelnen Dreiecke (worüber unser späteres Kap. XI. handeln wird).

Kapitel VIII.

Geodätische Hauptaufgabe mit Reihen-Entwicklungen für die geodätische Linie.

§ 77. Sphäroidische Normal-Beispiele.

In Fig. 1. S. 386 bezeichnet A einen Punkt des Umdrehungs-Ellipsoids (Sphäroids) mit der Breite φ, entsprechend B einem Punkt mit der Breite φ'; der Längen-Unterschied dieser beiden Punkte, d. h. der Winkel welchen ihre Meridian-Ebenen NA und NB einschliessen, sei l (von West nach Ost positiv gezählt) Die beiden Punkte sind durch eine geodätische Linie AB verbunden, deren lineare Grösse $= s$ sei und welche bei A und B die Azimute α und α' hat.

Wir zählen im allgemeinen die Azimute von Nord über Ost, wie α im Punkt A; und das gleichfalls nordöstlich gezählte Azimut im Punkte B wäre also $= \alpha' \pm 180°$, wenn α' der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel ist.

Fig. I.

Indem man in solchen Fällen unterscheidet *diesseitiger* Punkt A und *jenseitiger* Punkt B, kann man auch festsetzen, dass im diesseitigen Punkt α von Nord über Ost gezählt und im jenseitigen Punkt stets $\pm$ 180° zu dem Wert α' zuzufügen ist, den die Formeln geben. (Mit anderen Worten: Wir wollen die Azimute nordöstlich zählen, aber das dabei für den jenseitigen Punkt nötige Zusetzen von $\pm$ 180° in den Formeln weglassen.)

Zwischen diesen 6 Grössen, $\varphi, \varphi', l, s, \alpha, \alpha'$, bestehen Beziehungen von ähnlicher Art wie für das *sphärische* Dreieck Fig. 1. § 54. S. 293, welche hauptsächlich in zwei Aufgabenformen sich ausdrücken, nämlich *erstens*: gegeben φ, φ' und l, gesucht s, α und α' oder *zweitens*: gegeben φ, s und α; gesucht φ', l und α'.

Diese beiden Aufgaben, deren Lösungen gegenseitig mehrfach ineinander übergehen, werden unter dem Namen *Geodätische Hauptaufgabe* zusammengefasst.

Ehe wir an die verschiedenen Auflösungen der fraglichen Aufgabe selbst gehen, schicken wir einige Beispiele hiefür voraus (ähnlich wie wir dieses auch für die sphärische Aufgabe S. 294 gethan haben). Dass diese Beispiele in sich richtig sind, können wir jetzt noch nicht beweisen; dieses wird sich aus der übereinstimmenden Berechnung nach den verschiedenen später zu entwickelnden Methoden ergeben.

Die Bezeichnungen sind bei diesen Beispielen nach vorstehender Fig. 1. genommen.

I. Kleines sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left.\begin{array}{lll}
\varphi = 49^\circ\ 30'\ 0'' & \varphi' = 50^\circ\ 30'\ 0'' & l = 1^\circ\ 0'\ 0'' \\
\dfrac{\varphi'+\varphi}{2} = 50^\circ\ 0'\ 0'' & \varphi'-\varphi = 1^\circ\ 0'\ 0'' & \\
\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} = 32^\circ\ 48'\ 20{,}4580'' & \alpha'-\alpha = 0^\circ\ 45'\ 57{,}8942'' & \\
\dfrac{\alpha'-\alpha}{2} = 0^\circ\ 22'\ 58{,}9471'' & \log s = 5.121\,6103\cdot131 & \\
\alpha' = 33^\circ\ 11'\ 19{,}4051'' & s = 132\,315{,}375^{m} & \\
\alpha = 32^\circ\ 25'\ 21{,}5109'' & &
\end{array}\right\} \quad (1)$$

II. Grosses sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left.\begin{array}{lll}
\varphi = 45^\circ\ 0'\ 0'' & \varphi' = 55^\circ\ 0'\ 0'' & l = 10^\circ\ 0'\ 0'' \\
\dfrac{\varphi'+\varphi}{2} = 50^\circ\ 0'\ 0'' & \varphi'-\varphi = 10^\circ\ 0'\ 0'' & \\
\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} = 32^\circ\ 54'\ 11{,}4302'' & \alpha'-\alpha = 7^\circ\ 41'\ 51{,}9408'' & \\
\dfrac{\alpha'-\alpha}{2} = 3^\circ\ 50'\ 55{,}9704'' & \log s = 6.120\,6674\cdot805 & \\
\alpha' = 36^\circ\ 45'\ 7{,}4006'' & s = 1\,320\,284{,}366^{m} & \\
\alpha = 29^\circ\ 3'\ 15{,}4598'' & &
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Ein zweites kleines Beispiel, mit nicht runden Zahlen, nehmen wir aus *Bohnenbergers* Triangulierung von Württemberg.

$$\left.\begin{array}{ll} III.\ P = \textit{Hornisgrinde.} & P' = \textit{Tübingen.} \\ \varphi = 48^\circ\ 36'\ 21{,}8966'' & \varphi' = 48^\circ\ 31'\ 12{,}4000'' \\ \multicolumn{2}{c}{l = 0^\circ\ 50'\ 55{,}5537'' = 3055{,}5537''} \\ \alpha = 98^\circ\ 21'\ 29{,}9583'' & \alpha' = 98^\circ\ 59'\ 40{,}6800'' \\ \log s = 4.801\ 8443{\cdot}0 & s = 63\ 364{,}218 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Endlich nehmen wir noch ein grösseres Beispiel mit nicht runden Zahlen, welches auch schon von *Bremiker* und *Helmert* mehrfach benützt worden ist.

$$\left.\begin{array}{ll} IV.\ P = \textit{Berlin.} & P' = \textit{Königsberg.} \\ \varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}7'' & \varphi' = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6'' \\ \multicolumn{2}{c}{l = 7^\circ\ 6'\ 0'' = 25\ 560''} \\ \alpha = 59^\circ\ 33'\ 0{,}6892'' & \alpha' = 65^\circ\ 16'\ 9{,}3650'' \\ \log s = 5{,}724\ 2591{\cdot}353 & s = 529\ 979{,}578^{m} \end{array}\right\} \quad (4)$$

(Das Beispiel Berlin-Königsberg ist in dem Werke: „Das Messen auf der sphäroidischen Oberfläche von *Baeyer*, Berlin 1862, S. 104—121 mit anderen Zahlenwerten gegeben; die runden Werte $\varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}7''$, $\varphi' = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6''$ und $l = 7^\circ\ 6'\ 0''$ haben wir für ein Normal-Rechenbeispiel angenommen nach *Helmert*, Höhere Geodäsie I. S. 158.)

§ 78. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von s.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 386.)

Die drei Differential-Gleichungen, welche wir in § 73. S. 378 entwickelt haben, sind, wenn wir nun den Längenunterschied mit l bezeichnen, folgende:

$$ds \cos \alpha = M\, d\varphi \quad (1)$$

$$ds \sin \alpha = N \cos \varphi\, dl \quad (2)$$

$$d\alpha = dl \sin \varphi \quad (3)$$

Dabei ist M der Meridian-Krümmungshalbmesser und N der Quer-Krümmungshalbmesser für die Breite φ, d. h. nach (21) und (19) § 33. S. 210:

$$M = \frac{c}{V^3}\ ,\quad N = \frac{c}{V}\ ,\quad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (4)$$

Wenn man diese Bezeichnung V einführt, und zugleich dl aus (3) mittelst (2) eliminiert, so erhält man aus (1), (2) und (3):

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{c} V^3 \cos \alpha \quad (5)$$

$$\frac{dl}{ds} = \frac{1}{c} V \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \quad (6)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{c} V \sin \alpha \tan \varphi \quad (7)$$

Hierauf kann man eine Entwicklung nach dem *Maclaurin*schen Satze gründen, ganz entsprechend der früheren sphärischen Entwicklung von § 60. S. 316. Wir haben, zunächst bis zur dritten Potenz:

$$\varphi' - \varphi = \left.\frac{d\varphi}{ds}\right] s + \left.\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right] \frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^3\varphi}{ds^3}\right] \frac{s^3}{6} \tag{8}$$

$$l = \left.\frac{dl}{ds}\right] s + \left.\frac{d^2 l}{ds^2}\right] \frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^3 l}{ds^3}\right] \frac{s^3}{6} \tag{9}$$

$$\alpha' - \alpha = \left.\frac{d\alpha}{ds}\right] s + \left.\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right] \frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right] \frac{s^3}{6} \tag{10}$$

Da wir bei den fortgesetzten Differentiierungen stets auch die Ableitung von V brauchen, schicken wir diese voran:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi} \quad , \quad \frac{dV}{d\varphi} = -\frac{e'^2 \sin\varphi \cos\varphi}{V} \tag{11}$$

Zur Abkürzung werden wir immer schreiben:

$$e'^2 \cos^2\varphi = \eta^2 \quad \text{und} \quad tang\,\varphi = t \tag{12}$$

und damit wird (11): $V^2 = 1 + \eta^2 \qquad \frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t$ (13)

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = -\eta^2 \frac{V^2}{c} \cos\alpha\, t \tag{14}$$

Nun leiten wir (5) weiter ab:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c}\cos\alpha \quad , \quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{3V^2}{c}\frac{dV}{ds}\cos\alpha - \frac{V^3}{c}\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}$$

also wegen (14) und (7):

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -3\eta^2 \frac{V^4}{c^2}\cos^2\alpha\, t - \frac{V^4}{c^2}\sin^2\alpha\, t$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{V^4}{c^2}(\sin^2\alpha\, t + 3\cos^2\alpha\, \eta^2 t) \tag{15}$$

Wenn wir dieses weiter ableiten, so ist es nützlich, die Funktion η^2, welche nach (12) Funktion von φ ist, stets so zu behandeln:

$$\frac{d\eta^2}{d\varphi} = -\eta^2 t \quad \text{allgemeiner} \quad \frac{d\eta^n}{d\varphi} = -n\eta^n t \tag{16}$$

In dieser Weise leiten wir (15) nochmals ab (mit Beachtung, dass $V^3 = V(1+\eta^2)$):

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3} = -\frac{4V^3}{c^2}\left(-\eta^2\frac{V^2}{c}\cos\alpha\, t\right)\left\{\sin^2\alpha\, t + 3\cos^2\alpha\,\eta^2 t\right\}$$
$$-\frac{V^4}{c^2}\Big\{2\sin\alpha\cos\alpha\frac{V}{c}\sin\alpha\, t^2 + \sin^2\alpha\,(1+t^2)\frac{V}{c}\cos\alpha\,(1+\eta^2)$$
$$-6\cos\alpha\sin\alpha\frac{V}{c}\sin\alpha\, t\,\eta^2 t + 3\cos^2\alpha\,(-2\eta^2 t^2 + \eta^2(1+t^2))\frac{V}{c}\cos\alpha(1+\eta^2)\Big\}$$

Wenn man dieses ordnet, so findet man:

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3} = -\frac{V^5\cos\alpha}{c^3}\left\{\sin^2\alpha(1+3t^2+\eta^2-9\eta^2 t^2)+\cos^2\alpha\,(3\eta^2-3\eta^2 t^2+3\eta^4-15\eta^4 t^2)\right\} \tag{17}$$

In gleicher Weise werden auch die anderen Ableitungen behandelt, so dass wir bis zur dritten Ordnung einschliesslich erhalten:

$$\frac{d^2 l}{ds^2} = \frac{2V^2}{c^2\cos\varphi}\sin\alpha\cos\alpha\, t \tag{18}$$

$$\frac{d^3 l}{ds^3} = \frac{2V^3}{c^3\cos\varphi}\left\{\sin\alpha\cos^2\alpha\,(1+3t^2+\eta^2) - \sin^3\alpha\, t^2\right\} \tag{19}$$

$$\frac{d^2 \alpha}{d s^2} = \frac{V^2}{c^2} \sin \alpha \cos \alpha \, (1 + 2\,t^2 + \eta^2) \tag{20}$$

$$\frac{d^3 \alpha}{d s^3} = \frac{V^3}{c^3} \left\{ \sin \alpha \cos^2 \alpha \, t\,(5 + 6\,t^2 + \eta^2 - 4\,\eta^4) - \sin^3 \alpha \, t\,(1 + 2\,t^2 + \eta^2) \right\} \tag{21}$$

Ehe wir die Schluss-Formeln zusammensetzen, wollen wir noch abkürzende Bezeichnungen einführen, wobei wir uns nach (21) § 33. S. 210 zuerst zu merken haben, dass $\frac{c}{V} = N$ der Quer-Krümmungshalbmesser für die Breite φ ist. Wir setzen dann:

$$s \frac{V}{c} \varrho = \frac{s}{N} \varrho = S \quad \text{(also } S \text{ in Sekunden)} \tag{22}$$

oder mit:
$$\frac{\varrho}{N} = [2] \quad , \quad s\,[2] = S \tag{23}$$

ferner:
$$S \sin \alpha = n \qquad S \cos \alpha = m \tag{24}$$

Dabei ist [2] aus unserer Hilfstafel des Anhangs Seite [2] — [23] zu entnehmen; oder wenn es sich um ausnahmsweise sehr scharfe Rechnung handelt, ist die 10stellige Tafel Seite [44] — [45] des Anhangs anzuwenden, welche zunächst 10stellig $\log V$ giebt und dann:

$$[2] = V \frac{\varrho}{c} \quad \text{wo} \quad \log \frac{\varrho}{c} = 8.508\,3274{\cdot}897 \tag{23a}$$

Nun können wir die Formeln (8), (9), (10) zusammensetzen und finden (mit Zusetzung der nötigen ϱ im Nenner):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} = m - \frac{n^2}{2\,\varrho} t - \frac{3}{2} \frac{m^2}{\varrho} \eta^2 t - \frac{n^2 m}{6\,\varrho^2} (1 + 3\,t^2 + \eta^2 - 9\,\eta^2 t^2) \\ - \frac{m^3}{2\,\varrho^2} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 - 5\,\eta^2 t^2) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$l \cos \varphi = n + \frac{n\,m}{\varrho} t - \frac{n^3}{3\,\varrho^2} t^2 + \frac{n\,m^2}{3\,\varrho^2} (1 + 3\,t^2 + \eta^2) \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha = n\,t + \frac{n\,m}{2\,\varrho} (1 + 2\,t^2 + \eta^2) - \frac{n^3}{6\,\varrho^2} t\,(1 + 2\,t^2 + \eta^2) \\ + \frac{n\,m^2}{6\,\varrho^2} t\,(5 + 6\,t^2 + \eta^2 - 4\,\eta^4) \end{aligned} \tag{27}$$

Wenn man in diesen Formeln das Azimut $\alpha = 90°$ setzt, so wird $m = 0$, und indem wir weiter dann $n = \frac{y}{N_1} \varrho$ setzen, sehen wir die Formeln (25), (26), (27) übergehen in die früher schon entwickelten Formeln (8), (9) und (11) von § 64. S. 331 für rechtwinklige Coordinaten. Dabei ist das frühere φ_1 nun vertreten durch φ, also $tang\,\varphi_1$ durch t, u. s. w.

Wenn man in den Formeln (25), (26), (27) die Glieder mit η^2 fortlässt, so hat man die früheren *sphärischen* Formeln (27), (28), (29) S. 318—319 bis zur dritten Ordnung, wie es sein muss.

Andererseits kann man von den früheren sphärischen Formeln (27), (28), (29) S. 318—319 die Glieder vierter Ordnung (mit n^4, $n^3 m$ u. s. w.) unseren neuen sphäroidischen Formeln (25), (26), (27) einfach zusetzen, womit man dasselbe erhält, wie

wenn man von den *nach*folgenden Entwicklungen S. 391—392 die Glieder vierter Ordnung mit Weglassung von η^2, $\eta^2\,t^2$ u. s. w. benützte.

Wenn wir die Glieder vierter Ordnung ohne alle η^2 nun zu (25), (26), (27) hinzunehmen, wollen wir auch bei den Gliedern dritter Ordnung eine passende Abstufung eintreten lassen, indem wir in der dritten Ordnung η^4 weglassen.

Damit bekommen wir folgende zur praktischen Anwendung zugerichtete Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi'-\varphi}{V^2} &= m - \frac{1}{2\varrho}\,n^2 t - \frac{3}{2\varrho}\,m^2\eta^2 t \\ &- \frac{n^2 m}{6\varrho^2}(1+3t^2+\eta^2-9\eta^2 t^2) - \frac{m^3}{2\varrho^2}\,\eta^2(1-t^2) \\ &+ \frac{n^4}{24\varrho^3}\,t(1+3t^2) - \frac{n^2 m^2}{6\varrho^3}\,t(2+3t^2)\end{aligned}\right\} \quad (25^*)$$

$$\left.\begin{aligned}l\cos\varphi &= n + \frac{1}{\varrho}\,n m t \\ &- \frac{n^3}{3\varrho^2}\,t^2 + \frac{n m^2}{3\varrho^2}(1+3t^2+\eta^2) \\ &- \frac{n^3 m}{3\varrho^3}\,t(1+3t^2) + \frac{n m^3}{3\varrho^3}\,t(2+3t^2)\end{aligned}\right\} \quad (26^*)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha &= n t + \frac{n m}{2\varrho}(1+2t^2+\eta^2) \\ &- \frac{n^3}{6\varrho^2}\,t(1+2t^2+\eta^2) + \frac{n m^2}{6\varrho^2}\,t(5+6t^2+\eta^2) \\ &- \frac{n^3 m}{24\varrho^3}(1+20t^2+24t^4) + \frac{n m^3}{24\varrho^3}(5+28t^2+24t^4)\end{aligned}\right\} \quad (27^*)$$

Die hiebei nötigen konstanten Logarithmen sind:

$$\left.\begin{aligned}&\log\frac{1}{\varrho} = 4.685\,5750\text{-}10\,, && \log\frac{1}{2\varrho} = 4.384\,5449\text{-}10\,, && \log\frac{3}{2\varrho} = 4.861\,6661\text{-}10 \\ &\log\frac{1}{2\varrho^2} = 9.070\,120\text{-}20\,, && \log\frac{1}{3\varrho^2} = 8.894\,028\text{-}20\,, && \log\frac{1}{6\varrho^2} = 8.592\,998\text{-}20 \\ &\log\frac{1}{3\varrho^3} = 3.57960\text{-}20\,, && \log\frac{1}{6\varrho^3} = 3.27857\text{-}20\,, && \log\frac{1}{24\varrho^3} = 2.67651\text{-}20\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Mit diesen konstanten Coëfficienten kann man auch unsere Hilfstafeln Seite [34]—[37] des Anhangs benützen.

Wir wollen unser kleines sphäroidisches Normal-Beispiel (1) §. 77. S. 386 in dieser Weise berechnen:

Gegeben $\varphi = 49°\ 30'\ 0''$ $\qquad \alpha = 32°\ 25'\ 21{,}5109''$

	$\log s =$	5.121 6103·1
hiezu von Seite [15] des Anhangs	$\log\,[2]$	8.508 9420·3
	$\log S$	3.630 5523·4

Im übrigen giebt die Ausrechnung nach dem angegebenen Verfahren, in ähnlicher Weise wie bei dem sphärischen Beispiel S. 316:

Breite $\varphi' - \varphi$	Länge l	Azimut $\alpha' - \alpha$
+ 3615,6269″	+ 3526,1653″	+ 2681,3172″
— 15,2415	+ 72,1660	+ 74,9467
— 0,3773	— 0,1986	— 0,2063
+ 0,0006	+ 1,8371	+ 1,8061
— 0,0085	+ 0,0300	+ 0,0303
3600,0002″	3599,9998″	2757,8940″
Soll 3600,0000″	3600,0000″	2757,8942″

(29)

Die Rechnung stimmt also befriedigend; sie ist aber ziemlich umständlich, und würde nur etwa durch Beigabe ausführlicher Coëfficienten-Tabellen die nötige Geschmeidigkeit erlangen.

Anders steht die Sache, wenn man nur *Näherungswerte* auf etwa 1″ genau berechnen will, welche nach dem später zu beschreibenden Verfahren von § 79. noch verbessert werden sollen. In diesem Falle rechnet man nur die Hauptglieder mit dem Coëfficienten [2] streng, nebst V^2 bei der Breite, im übrigen nimmt man nur noch die sphärischen Glieder (setzt also $\eta^2 = 0$) und kann dann die Coëfficienten-Tabelle unseres Anhangs Seite [36] — [37] benützen.

Die Formeln (25), (26), (27) sind bis auf Glieder von der Ordnung η^2 einschliesslich übereinstimmend mit denjenigen Formeln, welche wir früher auf ganz *anderem* Wege entwickelt haben, nämlich mit den Formeln (12), (13), (14) § 71. S. 366, wobei nur die theilweise verschiedene Bezeichnungsart zu berücksichtigen ist, indem das frühere σ von S. 366 nun durch S, und λ durch l ersetzt ist.

Dadurch ist die schon auf S. 366 zum voraus behauptete Gesammt-Kontrollierung aller unserer Entwicklungen von § 67. — § 75. nun bestätigt, und zwar bis auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 S^2$ und $\eta^2 S^3$ einschliesslich ($\eta^4 S^3$ ausschliesslich; $\eta^4 S^2$ kommt explicit überhaupt nicht vor).

Weitere Entwicklungen bis zur sechsten Ordnung.

Ohne zunächst die Frage zu erörtern, welche Glieder bei gewissen Ausdehnungen der Dreiecks-Seiten s bzw. S noch von Einfluss auf gewisse Rechnungs-Ergebnisse sind, stellen wir im folgenden die Differential-Quotienten zusammen, welche wir in gleicher Weise, wie bei (13) — (21) angegeben wurde, entwickelt haben; und zwar bis zur fünften Ordnung mit *allen* Gliedern die überhaupt auftreten, bei der sechsten Ordnung nur noch mit den Gliedern ohne η^2, d. h. mit den sphärischen Gliedern. Um die Abkürzungen n und m nach (24) anwenden zu können, setzen wir links immer s, s^2, s^3 u. s. w. als Faktor zu, und nehmen auch den konstanten Faktor V^2 bei φ und $\cos\varphi$ bei l auf die linke Seite herüber.

$$\frac{d\varphi}{ds}\,\frac{s}{V^2} = +m$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}\,\frac{s^2}{V^2} = -n^2 t - m^2 (3\,\eta^2 t)$$

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3}\,\frac{s^3}{V^2} = -n^2 m (1 + 3\,t^2 + \eta^2 - 9\,\eta^2 t^2) - 3\,m^3 \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 - 5\,\eta^2 t^2)$$

$$\frac{d^4 \varphi}{d s^4} \frac{s^4}{V^2} = + n^4 t (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) - 2 n^2 m^2 t (4 + 6 t^2 - 13 \eta^2 - 9 \eta^2 t^2 - 17 \eta^4 + 45 \eta^4 t^4)$$
$$+ m^4 t \eta^2 (12 + 69 \eta^2 - 45 \eta^2 t^2 + 57 \eta^4 - 105 \eta^4 t^2)$$

$$\frac{d^5 \varphi}{d s^5} \frac{s^5}{V^2} = + n^4 m (1 + 30 t^2 + 45 t^4 + 2 \eta^2 - 72 \eta^2 t^2 - 90 \eta^2 t^4 + \eta^4 - 102 \eta^4 t^2 + 225 \eta^4 t^4)$$
$$- 2 n^2 m^3 (4 + 30 t^2 + 30 t^4 - 9 \eta^2 - 18 \eta^2 t^2 - 45 \eta^2 t^4 - 30 \eta^4 + 354 \eta^4 t^2 - 36 \eta^4 t^4$$
$$- 17 \eta^6 + 402 \eta^6 t^2 - 525 \eta^6 t^4)$$
$$+ m^5 \eta^2 (12 - 12 t^2 + 81 \eta^2 - 426 \eta^2 t^2 + 45 \eta^2 t^4 + 126 \eta^4 - 1406 \eta^4 t^2 + 1030 \eta^4 t^4$$
$$+ 57 \eta^6 - 1042 \eta^6 t^2 + 945 \eta^6 t^4)$$

$$\frac{d^6 \varphi}{d s^6} \frac{s^6}{V^2} = - n^6 t (1 + 30 t^2 + 45 t^4 + \eta^2 \ldots \qquad)$$
$$+ 4 n^4 m^2 t (22 + 135 t^2 + 135 t^4 + \eta^2 \ldots)$$
$$- 8 n^2 m^4 t (17 + 60 t^2 + 45 t^4 + \eta^2 \ldots)$$

$$\frac{d l}{d s} s \cos \varphi = + n$$

$$\frac{d^2 l}{d s^2} s^2 \cos \varphi = + 2 n m t$$

$$\frac{d^3 l}{d s^3} s^3 \cos \varphi = + 2 n m^2 (1 + 3 t^2 + \eta^2) - 2 n^3 t^2$$

$$\frac{d^4 l}{d s^4} s^4 \cos \varphi = 8 n m^3 t (2 + 3 t^2 + \eta^2 - \eta^4) - 8 n^3 m (1 + 3 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^5 l}{d s^5} s^5 \cos \varphi = 8 n m^4 (2 + 15 t^2 + 15 t^4 + 3 \eta^2 + 6 \eta^2 t^2 - 3 \eta^4 t^2 - \eta^6 + 6 \eta^6 t^2)$$
$$- 8 n^3 m^2 (1 + 20 t^2 + 30 t^4 + 2 \eta^2 + 13 \eta^2 t^2 + \eta^4 - 7 \eta^4 t^2)$$
$$+ 8 n^5 t^2 (1 + 3 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^6 l}{d s^6} s^6 \cos \varphi = 16 n m^5 t (17 + 60 t^2 + 45 t^4 + \eta^2 \ldots)$$
$$- 32 n^3 m^3 t (13 + 75 t^2 + 75 t^4 + \eta^2 \ldots)$$
$$+ 16 n^5 m t (2 + 30 t^2 + 45 t^4 + \eta^2 \ldots)$$

$$\frac{d \alpha}{d s} s = n t$$

$$\frac{d^2 \alpha}{d s^2} s^2 = n m (1 + 2 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^3 \alpha}{d s^3} s^3 = n m^2 t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4) - n^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^4 \alpha}{d s^4} s^4 = n m^3 (5 + 28 t^2 + 24 t^4 + 6 \eta^2 + 8 \eta^2 t^2 - 3 \eta^4 + 4 \eta^4 t^2 - 4 \eta^6 + 24 \eta^6 t^2)$$
$$- n^3 m (1 + 20 t^2 + 24 t^4 + 2 \eta^2 + 8 \eta^2 t^2 + \eta^4 - 12 \eta^4 t^2)$$

$$\frac{d^5 \alpha}{d s^5} s^5 = n m^4 t (61 + 180 t^2 + 120 t^4 + 46 \eta^2 + 48 \eta^2 t^2 - 3 \eta^4 - 36 \eta^4 t^2 + 100 \eta^6 - 96 \eta^6 t^2 + 88 \eta^8 - 192 \eta^8 t^2)$$
$$- n^3 m^2 t (58 + 280 t^2 + 240 t^4 + 72 \eta^2 + 104 \eta^2 t^2 - 30 \eta^4 - 32 \eta^4 t^2 - 44 \eta^6 + 144 \eta^6 t^2)$$
$$+ n^5 t (1 + 20 t^2 + 24 t^4 + 2 \eta^2 + 8 \eta^2 t^2 + \eta^4 - 12 \eta^4 t^2)$$

$$\frac{d^6 \alpha}{d s^6} s^6 = n m^5 (61 + 662 t^2 + 1320 t^4 + 720 t^6 + \eta^2 \ldots)$$
$$- n^3 m^3 (58 + 1316 t^2 + 3600 t^4 + 2400 t^6 + \eta^2 \ldots)$$
$$+ n^5 m (1 + 182 t^2 + 840 t^4 + 720 t^6 + \eta^2 \ldots)$$

In allen diesen vorstehenden Entwicklungen ist $t = tang\,\varphi$ und $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$, s ist die lineare geodätische Linie, n und m sind durch (22), (23), (24) S. 389 bestimmt.

Man kann diese höheren Entwicklungen zunächst dazu benützen, um die Formeln (25), (26), (27) nach Bedarf weiter zu führen, indem man nichts mehr zu thun hat, als den vorstehenden höheren Ableitungen von der vierten Ordnung an, die Nenner 24, 120, 720 u. s. w. nebst den nötigen ϱ, nach dem Schema (1), (2), (3) §. 60. S. 316 beizugeben.

Wir wollen dieses hier nicht im einzelnen ausführen, denn bis zur vierten Ordnung haben wir bereits in (25*), (26*), (27*) abgekürzte Formeln aufgestellt, und strenge Formeln bis zur vierten Ordnung einschliesslich erhält man besser durch das Prinzip der *Mittel*breite, wie in unserem nachfolgenden § 79. gezeigt werden wird.

Die Glieder fünfter und sechster Ordnung werden zum unmittelbaren Gebrauche zu umständlich; wenn man es mit so grossen Entfernungen zu thun hat, dass diese Glieder fünfter und sechster Ordnung nötig würden. so möge man lieber nach unserem späteren § 83. verfahren.

Die Glieder fünfter und sechster Ordnung sind aber dazu nützlich, dass man überlegen kann, welche Fehler durch ihre Vernachlässigung entstehen, wie wir bereits in § 58. S. 311—312, und in § 60. S. 319—320 gezeigt haben.

Wenn wir hiernach von den höheren Gliedern, namentlich von den Gliedern mit η^2, η^4 u. s. w. unserer vorstehenden höheren Entwicklungen S. 392 wenig, bzw. keinen unmittelbaren Gebrauch machen, so ist die darauf verwendete Arbeit doch nicht als verloren zu bezeichnen; es wird sich mancher mittelbare Gebrauch ergeben.

Auch war es, ohne Rücksicht auf unmittelbare Anwendung, erwünscht, die *Formen* kennen zu lernen, in welchen die höheren Glieder auftreten, z. B. ob die zu Anfang vorkommenden Ausdrücke $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin\varphi \cos\varphi$ u. s. w. auch sonst einen Übergang auf *Viel*fache 2φ u. s. w. nützlich erscheinen lassen u. dergl. Es ergab sich, dass $\sin 3\varphi$, $\cos 3\varphi$ u. s. w. höchstens gezwungen herzustellen sind; dagegen ist der Modul $\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi$ sehr nützlich, weil e'^2 in jeder Entwicklung *jedenfalls* mit dem Faktor $\cos^2\varphi$ auftritt, während $e'^2 \sin^2\varphi$ und ähnliche Formen sich gut auf $\eta^2 t^2$ bringen lässt, zumal die Funktion $t = tang\,\varphi$ auch anderwärts als einzige Funktion von φ sich empfiehlt.

Die erste Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie (bis s^3 einschliesslich) zur Übertragung von Breiten, Längen und Azimuten, ist gegeben von *Legendre* in den Memoiren der Pariser Akademie von 1806. (Als Citat hieraus sind die *Legendre*schen Formeln bei der Badischen Landesvermessung benützt worden zur Berechnung der geographischen Coordinaten aller Hauptpunkte, von Punkt zu Punkt nach den Seiten des Dreiecksnetzes.)

Legendres Entwicklung wurde fortgesetzt von *Levret* („Comptes rendus, 76. Band, 1873", S. 410—413) und *Trepied* („Comptes rendus, 80. Band, 1875", S. 36—40), ferner von *v. Orff* in dem Werke: „Die Bayerische Landesvermessung u. s. w., München 1873", S. 539—548, und namentlich von *Helmert*, „Höhere Geodäsie I." S. 296—300. *Helmert* giebt hier S. 300 geschichtlich-kritische Notizen über die Formeln von *Legendre* bis *v. Orff*.

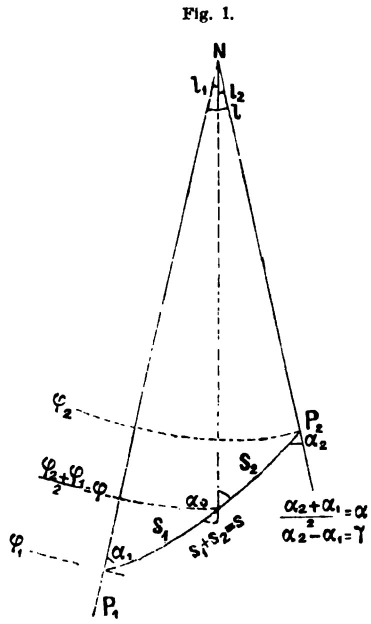
Unsere vorstehenden Entwicklungen schliessen sich an *Helmert*, „Höhere Geodäsie I." S. 298 an, erstrecken sich aber auf höhere Glieder und haben durch konsequente Einführung zusammenfassender Zeichen (V^2 und η^2) die Formelhäufungen gelichtet.

An dieser Stelle ist auch ein Abschnitt aus *Gauss'* „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" zu erwähnen, nämlich zweite Abhandlung, Göttingen 1846, Art. 26—32. Dabei werden die zahlreichen Differentiierungen zunächst in ganz unbestimmter Form gemacht, worauf (Art. 28) „nur noch eine mechanische Rechnung, nämlich die Entwicklung der Werte der verschiedenen Differential-Quotienten und deren Substitution übrig bleibt". Derselbe Weg wird auch in einer an *Gauss* anschliessenden Entwicklung (*Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen I.", S. 115—117) eingeschlagen, und es könnte dieser Weg wohl von Anfang der beste scheinen. Indessen, wenn einmal das Prinzip einer solchen Entwicklung erkannt ist, so bleibt gerade die „mechanische Rechnung" (fortgesetztes Differentiieren) als Hauptarbeit übrig, und dabei fanden wir im Gegensatz zu allgemeinen Formeln mit nachheriger Anwendung auf den besonderen Fall, dass es nützlicher ist, den besonderen Fall schrittweise zu verfolgen, wobei jedoch solche Formen, welche mehrfach wiederkehren, erkannt und herausgehoben werden müssen.

§ 79. Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln.

Den Grundsatz der *Mittel*-Breiten, welchen wir auf die sphärischen Entwicklungen schon in § 57. und in § 61. angewendet haben, können wir nun auch auf die sphäroidischen Reihen anwenden, welche wir im vorigen § 78. gefunden haben.

Fig. 1.



Wir werden dabei eine Entwicklung bekommen, welche der früheren sphärischen Entwicklung von § 61. ganz entsprechend ist, welche sogar alle früheren Glieder von § 61. wieder enthält, aber noch weitere Glieder von der Ordnung η^2 und η^4 hinzubringen wird.

Auch die Bezeichnungen nehmen wir wieder im wesentlichen wie in § 61., indem die nebenstehende Fig. 1. sich von der früheren Fig. 1. S. 321 nur dadurch unterscheidet, dass überall s statt σ, und bei den Längen l statt λ steht.

Da wir somit bereits in § 61. eine gute Vorbereitung für die vorliegende Aufgabe haben, werden wir uns mit der neuen Entwicklung kurz fassen können.

Unter s verstehen wir eine geodätische Linie, linear gemessen, und unter S die entsprechende Reduktion auf Centriwinkel durch Division mit dem Quer-Krümmungshalbmesser N, wie in (22) und (24) § 78. S. 389 angegeben ist. Wenn wir demnach $n = S \sin \alpha$ und $m = S \cos \alpha$ schreiben, so erhalten wir aus der Breiten-Formel (25) § 78. S. 389 als Anwendung auf den nördlichen Teil unserer Fig. 1. (mit Weglassung der verschiedenen ϱ) folgendes:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi_2-\varphi}{V^2} &= S_2 \cos \alpha_0 - \frac{S_2^2}{2}\, t\,(\sin^2 \alpha_0 + 3\,\eta^2 \cos^2 \alpha_0) \\ &\quad - \frac{S_2^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0\,(1 + 3\,t^2 + \eta^2 - 9\,\eta^2 t^2) \\ &\quad - \frac{S_2^3}{6} \cos^3 \alpha_0\,(3\,\eta^2 - 3\,\eta^2 t^2 + 3\,\eta^4 - 15\,\eta^4 t^2)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die entsprechende Formel für $\varphi_1 - \varphi$ hat überall $-S_1$ statt S_2, also:

$$\frac{\varphi_1-\varphi}{V^2} = -S_1 \cos \alpha_0 - S_1^2 \ldots + \frac{S_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos_0 \ldots + \frac{S_1^3}{6} \cos^3 \alpha_0 \ldots \tag{2}$$

Diese beiden Gleichungen geben subtrahiert:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{V^2} &= (S_2 + S_1) \cos \alpha_0 - \frac{S_2^2 - S_1^2}{2}\, t\,(\sin^2 \alpha_0 + 3\,\eta^2 \cos^2 \alpha_0) \\ &- \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0\,(1 + 3\,t^2 + \eta^2 - 9\,\eta^2 t^2) \\ &- \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \cos^3 \alpha_0\,(3\,\eta^2 - 3\,\eta^2 t^2 + 3\,\eta^4 - 15\,\eta^4 t^2)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ferner giebt die Addition von (1) und (2):

$$0 = (S_2 - S_1) \cos \alpha_0 - \frac{S_2^2 + S_1^2}{2}\, t\,(\sin^2 \alpha_0 + 3\,\eta^2 \cos^2 \alpha_0)$$

also:

$$S_2 - S_1 = \frac{S^2}{4}\, t \left(\frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} + 3\,\eta^2 \cos \alpha_0\right) \tag{4}$$

Dieses (4) in (3) eingesetzt giebt nach Ordnung der Glieder:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi_2-\varphi_1}{V^2} = S\cos\alpha_0 - \frac{S^3}{24}\Big(3\frac{\sin^4\alpha_0}{\cos\alpha_0}t^2 + \sin^2\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+3t^2+\eta^2-9\eta^2t^2)\\ + \cos^2\alpha_0\,(3\eta^2-3\eta^2t^2+3\eta^4+12\eta^4t^2)\Big)\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ehe wir dieses weiter verfolgen, machen wir dieselbe Behandlung auch mit den Azimuten, d. h. nach (27) § 78. S. 389:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2-\alpha_0 = S_2\sin\alpha_0\,t + \frac{S_2^2}{2}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+2t^2+\eta^2)\\ -\frac{S_2^3}{6}\sin^3\alpha_0\,t\,(1+2t^2+\eta^2) + \frac{S_2^3}{6}\sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\,t\,(5+6t^2+\eta^2-4\eta^4)\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\alpha_1-\alpha_0 = -S_1\sin\alpha_0\,t + \frac{S_1^2}{2}\ldots \quad + \frac{S_1^3}{6}\sin^3\alpha_0\ldots \quad -\frac{S_1^3}{6}\sin\alpha_0\ldots \quad (7)$$

Hievon brauchen wir zunächst nur die Addition, d. h.:

$$\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}-\alpha_0 \text{ oder } \alpha-\alpha_0 = \frac{S_2-S_1}{2}\sin\alpha_0\,t + \frac{S_2^2+S_1^2}{4}\sin\alpha_0\cos\alpha_0(1+2t^2+\eta^2) \quad (8)$$

Die Differenz $S_2 - S_1$ von (4) hier in (8) eingesetzt giebt:

$$\alpha-\alpha_0 = \frac{S^2}{8}\left(\frac{\sin^3\alpha_0}{\cos\alpha_0}t^2 + \sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+2t^2+\eta^2+3\eta^2t^2)\right) \quad (9)$$

Damit werden die mehrfach gebrauchten $S\sin\alpha_0$ und $S\cos\alpha_0$:

$$S\sin\alpha_0 = S\sin\alpha - \frac{S^3}{8}\left(\sin^3\alpha\,t^2 + \sin\alpha\cos^2\alpha\,(1+2t^2+\eta^2+3\eta^2t^2)\right) \quad (10)$$

$$S\cos\alpha_0 = S\cos\alpha + \frac{S^3}{8}\left(\frac{\sin^4\alpha}{\cos\alpha}t^2 + \sin^2\alpha\cos\alpha\,(1+2t^2+\eta^2+3\eta^2t^2)\right) \quad (11)$$

Wenn man dieses (11) in (5) einsetzt, wobei man in den Gliedern mit S^3 schlechthin α statt α_0 schreiben darf, so erhält man:

$$\frac{\varphi_2-\varphi_1}{V^2} = S\cos\alpha\left\{1+\frac{S^2}{24}\sin^2\alpha\,(2+3t^2+2\eta^2) - \frac{S^3}{8}\cos^2\alpha\,\eta^2(1-t^2+\eta^2+4\eta^2t^2)\right\} (12)$$

Nun bilden wir auch die Subtraktion von (6) und (7):

$$\begin{aligned}\alpha_2-\alpha_1 = (S_2+S_1)\sin\alpha_0\,t + \frac{S_2^2-S_1^2}{2}\sin\alpha_0\cos\alpha_0\,(1+2t^2+\eta^2)\\ -\frac{S_2^3+S_1^3}{6}\left(\sin^3\alpha_0\,t\,(1+2t^2+\eta^2) - \sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\,t\,(5+6t^2+\eta^2-4\eta^4)\right)\end{aligned}$$

Hier ist wieder $S_2 - S_1$ nach (4) zu berücksichtigen; dieses giebt:

$$\begin{aligned}\alpha_2-\alpha_1 = S\sin\alpha_0\,t + \frac{S^3}{24}t\Big(\sin^3\alpha_0\,(2+4t^2+2\eta^2)\\ + \sin\alpha_0\cos^2\alpha_0\,(5+6t^2+10\eta^2+18\eta^2t^2+5\eta^4)\Big)\end{aligned}$$

und wenn man endlich noch $S\sin\alpha_0$ nach (10) einsetzt, wobei in den höheren Gliedern α_0 mit α schlechthin verwechselt werden darf, so erhält man:

$$\alpha_2-\alpha_1 = S\sin\alpha\,t\left\{1+\frac{S^2}{24}\sin^2\alpha\,(2+t^2+2\eta^2) + \frac{S^2}{24}\cos^2\alpha(2+7\eta^2+9\eta^2t^2+5\eta^4)\right\} \quad (13)$$

Es bleibt nun noch die Formel für l zu entwickeln, wozu wir in zweifacher Anwendung von (26) § 78. S. 389 haben:

$$+\, l_2 \cos\varphi = S_2 \sin\alpha_0 + S_2^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0\, t - \frac{S_2^3}{3}\left(\sin^3\alpha_0\, t^2 - \sin\alpha_0 \cos^2\alpha_0 (1+3\,t^2+\eta^2)\right) \qquad (14)$$

$$-\, l_1 \cos\varphi = -\, S_1 \sin\alpha_0 + S_1^2 \ldots \qquad + \frac{S_1^3}{3}\left(\ldots \qquad\qquad \right) \qquad (15)$$

Die Differenz hievon giebt (da $l_2 + l_1 = l$, und $S_2 + S_1 = S$ ist):

$$l \cos\varphi = S \sin\alpha_0 + (S_2^2 - S_1^2) \sin\alpha_0 \cos\alpha_0\, t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{3}\left(\sin^3\alpha_0\, t^2 - \sin\alpha_0 \cos^2\alpha_0 (1+3\,t^2+\eta^2)\right)$$

Hier ist wieder $S_2 - S_1$ nach (4) und $S \sin\alpha_0$ nach (10) zu berücksichtigen, wodurch man erhalten wird:

$$l \cos\varphi = S \sin\alpha + \frac{S^3}{24} \sin\alpha \left\{\sin^2\alpha\, t^2 - \cos^2\alpha\,(1 + \eta^2 - 9\,\eta^2\, t^2)\right\} \qquad (16)$$

Wenn man von (14) und (15) auch die Summe bildet, so bekommt man eine Gleichung, welche jetzt nicht nötig ist, aber später noch nützlich sein wird, nämlich:

$$(l_2 - l_1) \cos\varphi = \frac{S^2}{4} \frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}\, t + \frac{S^2}{4} \sin\alpha \cos\alpha\, t\,(2 + 3\,\eta^2) \qquad (17)$$

Die Gleichungen (12), (13) und (16) enthalten die Lösung der gestellten Aufgabe; man kann jedoch durch Division von (13) und (16) auch noch eine vierte Gleichung bilden:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin\varphi \left\{1 + \frac{S^2}{24}\left(\sin^2\alpha\,(2 + 2\,\eta^2) + \cos^2\alpha\,(3 + 8\,\eta^2 + 5\,\eta^4)\right)\right\} \qquad (18)$$

Dabei kann man auch in dem Gliede mit $\sin^2\alpha$ schreiben:

$$2 + 2\,\eta^2 = 2\,(1 + \eta^2) = 2\,V^2 \qquad (18a)$$

Die ersten Näherungen von (12) und (16) sind:

$$S \cos\alpha = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{b}{V^2} \qquad (19)$$

$$S \sin\alpha = l \cos\varphi \quad (\text{und } S \sin\alpha\, t = l \sin\varphi) \qquad (20)$$

Dabei soll b nur als Abkürzung für $\varphi_2 - \varphi_1$ dienen.

Damit lassen sich die Formeln (12), (16) und (18) so schreiben:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos\alpha \left(1 + \frac{l^2 \cos^2\varphi}{24}(2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) + \frac{b^2}{8\,V^4}\eta^2\,(t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2\,t^2)\right) \qquad (21)$$

$$l \cos\varphi = S \sin\alpha \left(1 + \frac{l^2 \sin^2\varphi}{24} - \frac{b^2}{24\,V^4}(1 + \eta^2 - 9\,\eta^2\,t^2)\right) \qquad (22)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin\varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2\varphi}{12}\, V^2 + \frac{b^2}{24\,V^4}(3 + 8\,\eta^2 + 5\,\eta^4)\right) \qquad (23)$$

Nun wollen wir die Coëfficienten der gefundenen Formeln besonders bezeichnen und herausheben, und dabei auch die nötigen ϱ zusetzen. Zuerst nehmen wir für die Glieder erster Ordnung die schon zu anderen Zwecken mehrfach eingeführten Haupt-Coëfficienten:

$$\frac{\varrho}{N} = [2] \quad , \quad \frac{\varrho}{M} \text{ oder } \frac{\varrho}{N} V^2 = [1] \qquad (24)$$

Es ist also wegen der Bedeutung von S wie bei (22) — (24) § 78. S. 389:

$$S \sin\alpha = [2]\, s \sin\alpha \quad , \quad S \cos\alpha = [1]\, s \cos\alpha \qquad (25)$$

Zugleich wollen wir noch folgende weitere Coëfficienten festsetzen:

$$(3) = \frac{1}{24\,\varrho^2} \qquad (4) = \frac{1}{24\,\varrho^2}\,\frac{1+\eta^2-9\,\eta^2 t^2}{V^4} \tag{26}$$

$$(5) = \frac{1}{24\,\varrho^2}(2+3\,t^2+2\eta^2) \qquad (6) = \frac{1}{8\,\varrho^2}\,\eta^2\,\frac{t^2-1-\eta^2-4\,\eta^2 t^2}{V^4} \tag{27}$$

$$(7) = \frac{1}{12\,\varrho^2}\,V^2 \qquad (8) = \frac{1}{24\,\varrho^2}\,\frac{3+8\,\eta^2+5\,\eta^4}{V^4} \tag{28}$$

Ausserdem seien für *logarithmische* Berechnung noch angenommen die Zeichen:

$$[3] = \mu\,(3) \quad , \quad [4] = \mu\,(4) \quad \ldots . \quad [8] \quad \mu\,(8)$$

wobei, wie gewöhnlich, μ der logarithmische Modul ist. Für diese letzteren Werte [3], [4] ... [8] haben wir eine Hilfstafel auf Seite [38] — [39] des Anhanges berechnet; wir fügen auch die dabei erforderlichen konstanten Logarithmen bei:

$$log\,\frac{\mu}{8\,\varrho^2} = 5{\cdot}105\,8441 - 10\;,\; log\,\frac{\mu}{12\,\varrho^2} = 4{\cdot}929\,7528 - 10\;,\; log\,\frac{\mu}{24\,\varrho^2} = 4{\cdot}628\,7228 - 10 \tag{30}$$

Mit diesen Abkürzungen für die Coëfficienten werden die Formeln (22), (21), (23) so geschrieben:

$$l = [2]\,\frac{s\,sin\,\alpha}{cos\,\varphi}\,(1+(3)\,l^2\,sin^2\,\varphi-(4)\,b^2) \tag{31}$$

$$\varDelta\varphi = [1]\,s\,cos\,\alpha\,(1+(5)\,l^2\,cos^2\,\varphi+(6)\,b^2) \tag{32}$$

$$\varDelta\alpha = l\,sin\,\varphi\,(1+(7)\,l^2\,cos^2\,\varphi+(8)\,b^2) \tag{33}$$

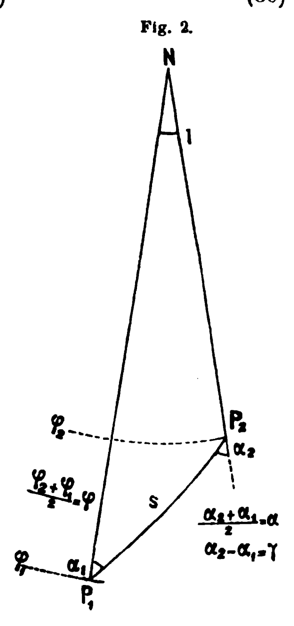
Die Umkehrung hievon giebt:

$$s\,sin\,\alpha = \frac{l\,cos\,\varphi}{[2]}\,(1-(3)\,l^2\,sin^2\,\varphi+(4)\,b^2) \tag{34}$$

$$s\,cos\,\alpha = \frac{\varDelta\varphi}{[1]}\,(1-(5)\,l^2\,cos^2\,\varphi-(6)\,b^2) \tag{35}$$

$$\varDelta\alpha = l\,sin\,\varphi\,(1+(7)\,l^2\,cos^2\,\varphi+(8)\,b^2) \tag{36}$$

Fig. 2.



Die entsprechenden logarithmischen Formeln sind als Gebrauchs-Formeln bei dem Zahlen-Beispiel S. 398 angegeben.

Dieses Beispiel, dessen Bezeichnungen φ_1, φ_2, φ u. s. w. ebenso wie die vorstehenden Formeln, der nebenstehenden Fig. 2. entsprechen, ist unser kleines Normal-Beispiel (1) § 77. S. 386.

Zu der Rechnung S. 398, welche mit unseren sonst üblichen Zeichen und Abkürzungen geführt ist, möge nur noch bemerkt werden, dass dieselbe ursprünglich von uns mit 10stelligen Logarithmen geführt und nachher auf 8 Stellen in den logarithmischen Hauptgliedern, und auch sonst entsprechend abgekürzt wurde, so dass vielleicht an einzelnen Stellen der formelle Übelstand kleiner Inkonsequenzen in den letzten Stellen entsteht, der sich aber in solchen Fällen nicht wohl vermeiden lässt.

Geodätische Hauptaufgabe mit sphäroidischen Mittelbreiten-Formeln.

Gegeben $\varphi_1 = 49° \, 30'$ $\varphi_2 = 50° \, 30'$ $l = 1° \, 0'$

$\varphi = 50° \, 0' \, 0''$ $b = 1° = 3600''$ $l = 1° = 3600''$.

Gesucht sind s, α_1 und α_2.

Die Hilfstafeln des Anhangs geben mit $\varphi = 50° \, 0'$:

Seite [15]:	$\log [1] = 8.510\,1335{\cdot}3$	$\log [2] = 8.508\,9295{\cdot}0$
Seite [39]:	$\log [3] = 4.6287$	$\log [4] = 4.6119$
	$\log [5] = 5.4257$	$\log [6] = 2.151$
	$\log [7] = 4.9310$	$\log [8] = 5.1066$

$$\log s \sin \alpha = \log \frac{l \cos \varphi}{[2]} - [3]\, l^2 \sin^2 \varphi + [4]\, b^2$$

$$\log s \cos \alpha = \log \frac{\Delta \varphi}{[1]} - [5]\, l^2 \cos^2 \varphi - [6]\, b^2$$

$$\log \Delta \alpha = \log l \sin \varphi + [7]\, l^2 \cos^2 \varphi + [8]\, b^2$$

Länge.

$\log l$	$3.556\,3025{\cdot}0$
$\log \cos \varphi$	$9.808\,0675{\cdot}0$
$\log l \cos \varphi$	$3.364\,3700{\cdot}0$
$\log [2]$	$8.508\,9295{\cdot}0$
$\log \frac{l \cos \varphi}{[2]}$	$4.855\,4405{\cdot}0$
$\log l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287

$l^2 \sin^2 \varphi$	6.8811	b^2	7.1126
$-[3]$	4.6287_n	$[4]$	4.6119
	1.5098_n		1.7245

$-32{\cdot}35 \quad +53{\cdot}02$

$+20{\cdot}67$

	$4.855\,4405{\cdot}0$
$s \sin \alpha$	$4.855\,4425{\cdot}7$
$s \cos \alpha$	$5.046\,1546{\cdot}8$
$\operatorname{tang} \alpha$	$9.809\,2878{\cdot}9$

$\alpha = 32° \, 48' \, 20{,}458''$

$\frac{\Delta \alpha}{2} = 0° \, 22' \, 58{,}947''$

$\alpha_2 = 33° \, 11' \, 19{,}405''$

$\alpha_1 = 32° \, 25' \, 21{,}511''$

Breite.

$\log b$	$3.556\,3025{\cdot}0$
$\log [1]$	$8.510\,1335{\cdot}3$
$\log \frac{b}{[1]}$	$5.046\,1689{\cdot}7$
$\log b^2$	7.1126

$l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$-[5]$	5.4257_n	$[6]$	2.151_n
	2.1544_n		9.2636_n

$-142{\cdot}72 \quad -0{\cdot}18$

$-142{\cdot}90$

	$5.046\,1689{\cdot}7$
$s \cos \alpha$	$5.046\,1546{\cdot}8$

$s \sin \alpha$	$4.865\,4425{\cdot}7$	$s \cos \alpha$	$5.046\,1546{\cdot}8$
$\sin \alpha$	$9.733\,8322{\cdot}5$	$\cos \alpha$	$9.924\,5443{\cdot}7$
$\log s$	$5.121\,6103{\cdot}2$	$\log s$	$5.121\,6103{\cdot}1$

$s = 132\,315{,}38^m$

Azimut.

$\log l$	$3.556\,3025{\cdot}0$
$\log \sin \varphi$	$9.884\,2539{\cdot}7$
$\log l \sin \varphi$	$3.440\,5564{\cdot}7$
$\log l^2 \sin^2 \varphi$	6.8811

$l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287	b^2	7.1126
$[7]$	4.9310	$[8]$	5.1066
	1.6597		2.2192

$+45{\cdot}68 \quad +165{\cdot}67$

$+211{\cdot}35$

$3.440\,5564{\cdot}7$

$3.440\,5776{\cdot}0$

$\Delta \alpha = 2757{,}8942''$

$\Delta \alpha = 0° \, 45' \, 57{,}8942''$

$\frac{\Delta \alpha}{2} = 0° \, 22' \, 58{,}9471''$

Indirekte Anwendung der Mittelbreiten-Formeln.

Wenn φ_1, α_1 und s gegeben und φ_2, α_2 und l gesucht sind, so kann man die Mittelbreiten-Formeln nicht unmittelbar anwenden, wohl aber mittelbar durch Einführung von Näherungs-Werten, wie wir schon bei den entsprechenden *sphärischen* Formeln von § 57. S. 307—309 genügend gezeigt haben.

Wir wollen wenigstens die Hauptglieder für solche mittelbare Berechnung des Beispiels von S. 398 hier vorführen:

Gegeben $\varphi_1 = 49° \, 30' \, 0''$ $\alpha_1 = 32° \, 25' \, 21{,}511$ $s = 132\,315{,}375^m$.

Wir wollen annehmen, man habe durch Versuche nach Anleitung von S. 308—309 gefunden $b = 1° \, 0' \, 0''$ und $\Delta\alpha = 0° \, 45' \, 57{,}894''$, und man wolle die Probe machen, ob diese Werte keiner abermaligen Verbesserung mehr bedürfen; hiezu hat man folgende Rechnung:

Länge		Breite		Azimut	
		$\varphi_1 = 49° \, 30' \, 0''$		$\alpha_1 = 32° \, 25' \, 21{,}511''$	
		$\Delta\varphi = 1° \, 0' \, 0''$		$\Delta\alpha = 0 \; 45 \; 57{,}894$	
$s = 132\,315{,}375^m$		$\varphi_2 = 50° \, 30' \, 0''$		$\alpha_2 = 33° \, 11' \, 19{,}405''$	
		$\varphi = 50° \, 0' \, 0''$		$\alpha = 32° \, 48' \, 20{,}458''$	
$log\ s$	5.121 6103·1				
$log\ sin\ \alpha$	9.733 8322·5	$log\ s$	5.121 6103·1		
$log\ sec\ \varphi$	0.191 9325·0	$log\ cos\ \alpha$	9.924 5443·7	$log\ l$	3.556 3025·0
$log\ [2]$	8.508 9295·0	$log\ [1]$	8.510 1335·3	$log\ sin\ \varphi$	9.884 2539.7
$log\ (l)$	3.556 3045·6	$log\ (b)$	3.556 2882·1	$log\ l\ sin\ \varphi$	3.440 5564·7

Die Berechnung der Korrektions-Glieder ist dieselbe wie auf S. 398, und die Probe besteht darin, dass nach den Formeln (32) und (33) S. 397 die Schlusswerte $\Delta\varphi$ und $\Delta\alpha$ wieder unten ebenso herauskommen müssen, wie sie oben eingesetzt wurden.

Man muss dabei sich eines vorgedruckten logarithmischen Rechenschemas bedienen, in welchem die ersten Näherungen und die allmählich entstehenden Verbesserungen zuerst mit Blei, und *nicht* in der Aufeinanderfolge der Formeln eingesetzt werden, bis die Rechnung stille steht, d. h. in sich selbst stimmt, worauf man das Ganze endgültig mit Tinte schreibt oder in ein neues Blatt überträgt. Die Zwischen-Ergebnisse brauchen nicht aufbewahrt zu werden.

Näherungs-Formeln für die Meridian-Konvergenz.

Wenn man in der Formel (23) S. 396 die Glieder mit η^4 vernachlässigt, so bekommt man zunächst:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \Delta\alpha = l \sin\varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2\varphi}{12} V^2 + \frac{b^2}{24\,V^4}(3 + 8\,\eta^2)\right) \qquad (37)$$

Dabei ist $V^2 = 1 + \eta^2$, und wenn man η^4 vernachlässigt, so kann man $\frac{1}{V^4} = 1 - 2\,\eta^2$ setzen, wodurch im letzten Gliede von (37) sich ergiebt:

$$(1 - 2\,\eta^2)(3 + 8\,\eta^2) = 3 + 2\,\eta^2 = 3\left(1 + \frac{2}{3}\,\eta^2\right) = 3\,V^{\frac{4}{3}}$$

und damit kann man (37) so schreiben:

$$\varDelta\alpha = l \sin\varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2\varphi}{12} V^2 + \frac{b^2}{8} V^{\frac{4}{3}}\right) \tag{38}$$

Diese Formel unterscheidet sich von der sphärischen Formel (15) S. 306 nur durch die beigegebenen Faktoren V^2 und $V^{\frac{4}{3}}$, welche keine besondere Mühe verursachen, wenn wir die zu vielen anderen Zwecken ohnehin nötige Funktion $\log V$ als stets tabellarisch verfügbar betrachten. Jedoch die beiden anderen Formeln (34) und (35) S. 397 lassen sich nicht ähnlich behandeln.

Die Gleichung (37) lässt sich auch noch in eine andere Form bringen, welche als *Dalby*scher Satz bekannt ist. Wenn man nämlich die Meridian-Konvergenz nicht auf die geodätische Linie, sondern auf die beiden Normalschnitte bezieht, so fallen alle Glieder mit η^2 und V^2 fort. Um dieses zu zeigen, brauchen wir die Formel (35) § 75. S. 380, welche mit den Bezeichnungen von Fig. 1. § 75. S. 377 so lautet:

$$\beta_1 - \alpha_1 = \beta - \alpha - \eta^2 \frac{\sigma^3}{12} \sin\alpha\, t \tag{39}$$

Dabei bezieht sich $\beta_1 - \alpha_1$ auf die Normalschnitte und $\beta - \alpha$ auf die geodätische Linie, d. h. es ist $\beta - \alpha$ der Wert $\varDelta\alpha$ von (37).

Indem wir nun in (39) schreiben:

$$\sigma \sin\alpha\, t = l \sin\varphi \quad \text{und} \quad \sigma^2 = l^2 \cos^2\varphi + \frac{b^2}{V^4}$$

können wir aus (37) und (39) zusammen bilden:

$$\beta_1 - \alpha_1 = l \sin\varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2\varphi}{12} V^2 + \frac{b^2}{24 V^4}(3 + 8\eta^2)\right)$$
$$+ l \sin\varphi \left(-\frac{l^2 \cos^2\varphi}{12} \eta^2 - \frac{b^2}{12 V^4} \eta^2\right)$$

Da $V^2 = 1 + \eta^2$ ist, giebt dieses:

$$\beta_1 - \alpha_1 = l \sin\varphi \left(1 + \frac{l^2 \cos^2\varphi}{12} + \frac{b^2}{8}\right) \tag{40}$$

Dieses stimmt vollständig überein mit der sphärischen Formel (15) S. 306, und der in der Formel (40) enthaltene *Dalby*sche Satz sagt also:

Die Meridian-Konvergenz $\beta_1 - \alpha_1$ bezogen auf die beiden Gegen-Normalschnitte (Fig. 1. § 75. S. 377) wird bis auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ einschliesslich ($\eta^4 \sigma^3$ ausschliesslich), erhalten durch *sphärische* Berechnung mit den Breiten φ_1 und φ_2 zweier Punkte des Erd-Ellipsoids und dem Längen-Unterschiede l derselben.

(Weiteres über *Dalby*s Satz giebt *Helmert*, „Höhere Geodäsie I" S. 150.)

Näherungs-Formeln mit der verkürzten Breiten-Differenz.

Nachdem wir schon in § 63. S. 327—329 durch einfache geometrische Betrachtung gefunden hatten, dass man sphärische Formeln in sphäroidische Formeln näherungsweise umformen kann, lediglich durch konsequente Einsetzung der verkürzten Breiten-Differenz $\frac{\varDelta\varphi}{V^2}$ an Stelle der wirklichen Breiten-Differenz $\varDelta\varphi$, können wir nun die auf S. 329 noch offen gelassene Frage, wie weit die so erhaltenen Näherungsformeln brauchbar sind, beantworten:

Die Formeln (11)—(17) S. 327 $\left(\text{in welchen man auch } \frac{N}{M} = V^2 \text{ setzen kann}\right)$ geben erste Annäherungen an die Formeln für die geodätische Linie; und es sind dabei Glieder bis zur Ordnung $\eta^2 \sigma^2$ berücksichtigt, dagegen $\eta^2 \sigma^3$ und sogar σ^3 selbst vernachlässigt; indessen kann man diese letzteren Glieder von der Ordnung σ^3 leicht nach Anleitung von S. 329 zusetzen.

Die einfache geometrische Betrachtung des verkürzten Breiten-Unterschiedes, § 63. S. 325—329, hat also zu Formeln geführt, welche im Lichte der weiter geführten Theorie als genau bis $\eta^2 \sigma^2$ und σ^3 einschliesslich ($\eta^2 \sigma^3$ ausschliesslich) sich erweisen. Da nun z. B. mit $s = 25\,000^m$, also $\sigma = \frac{25}{6370}$ bei 45° Breite, ein Glied $\eta^2 \sigma^3$ nur 0,00004″ ausmacht, so kann man sagen, dass die theoretisch einfachen Formeln von § 63. in Verbindung mit den sphärischen Formeln von § 57. zur Lösung der geodätischen Aufgaben für Dreiecke III. und IV. Ordnung ausreichen. Es ist aber dabei wesentlich, dass die verkürzte Breiten-Differenz, welche nach der Entstehung aus Fig. 1. S. 326 kein scharfer Begriff für endliche Differenzen ist, stets auf die *Mittel*breite bezogen werde.

Die Entwicklung sphäroidischer Mittelbreiten-Formeln zur Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe und ihrer Umkehrung bildet den Inhalt der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ von *Gauss*, zweite Abhandlung, Göttingen 1846. *Gauss* hat hier den ungemein nützlichen Grundsatz des Mittel-Arguments bei Reihen-Entwicklungen auf Geodäsie mit schönstem Erfolge angewendet, und eine zweifach unabhängige Begründung gegeben, erstens durch das Prinzip der konformen Flächen-Abbildung und zweitens durch unmittelbare Reihen-Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie.

Die von *Gauss* beigegebene Coëfficienten-Tabelle erstreckt sich nur von 51° — 54° Breite. Eine Ausdehnung dieser Tabelle auf 45° — 55° gaben wir in den früheren Auflagen dieses Buches, und eine Tafel der *Gauss*schen Coëfficienten-Logarithmen *log* (1), *log* (2) . . . *log* (6) in der ganzen Ausdehnung von $\varphi = 34°$ bis $\varphi = 70°$ wurde berechnet von *Biek*, und veröffentlicht in der russischen Übersetzung von *Jordan*, „Handbuch der Vermessungskunde“ S. 652 — 665 (vgl. das genauere Citat S. 231).

Ebenfalls auf das Prinzip der Mittelbreite, jedoch mit Azimuten der vertikalen Schnitte (nicht der geodätischen Linie) sind gegründet die Entwicklungen und Formeln von *Schols* („Extraits des Archives Néerlandaises“, T. XVII., Delft, 1882), von welchen ein Auszug von *Fenner* gebracht wurde in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 555—568 und S. 589—597, mit Anmerkung von *Helmert* S. 597—598.

Hieran schloss sich auch eine kleine Mitteilung unsererseits, „Zeitschr. f. Verm. 1883,“ S. 127—128, enthaltend die vorstehende Formel (38) und betreffend § 58. S. 311—312.

Wir überzeugten uns dabei, dass die *Gauss*sche Form der Korrektions-Glieder mit *drei* Elementen s, β und τ (τ = Meridian-Konvergenz) dabei *ohne* λ, in mancher Beziehung nicht günstig ist.

Inzwischen hat das geodätische Institut ein von gleichem Gedanken ausgehendes System von Mittelbreiten-Formeln als Umformung der *Gauss*schen Formeln, mit Coëfficienten-Tabellen mitgeteilt in der „Veröffentlichung des geod. Instituts, Lotabweichungen, Heft 1, Formeln und Tafeln u. s. w. Berlin 1886,“ Anhang S. 1—26. Diese Formeln unterscheiden sich von den unsrigen (34), (35), (36) S. 397 nur dadurch, dass in den Hauptgliedern für die Meridian-Konvergenz und für $s \cos \alpha$, bzw. die Faktoren $\sec \frac{b}{2}$ und $\cos \frac{l}{2}$ auftreten, welche in unseren Formeln (36) und (35) in die Korrektions-Glieder gezogen sind. Im Übrigen sind folgende Coëfficienten einander entsprechend:

J.	[3]	[4]	[6]	[7]
G. Inst.	[4]	[7]	— [8]	[8]

In den Bezeichnungen findet folgende Vergleichung statt:

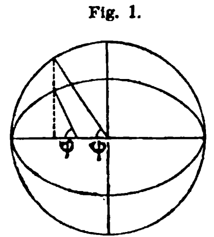
J.	φ	e'^2	$e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2$	$1 + \eta^2 = V^2$
G. Inst.	B	$\frac{e^2}{1-e^2}$	$\frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 B$	$\frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1-e^2} = \frac{W^2}{1-e^2}$

Wenn man alles auf einerlei Elemente bringt (am besten überall η^2 und V^2), so kann man sich überzeugen, dass unsere Formeln (34), (35), (36) und die zitierten Formeln des geodätischen Instituts, mit den *Gauss*schen Formeln von Art. 33. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, zweite Abhandlung, identisch sind.

§ 80. Die reduzierte Breite.

In vielen mathematisch-geodätischen Entwicklungen wird man auf einen Hilfswinkel geführt, der „*reduzierte Breite*" heisst, und den wir im folgenden allgemein mit ψ bezeichnen wollen, während die geographische Breite wie immer mit φ bezeichnet werden soll.

Fig. 1.



Man kann schon die gewöhnliche Ellipsen-Gleichung zur Einführung von ψ benützen, denn wenn (nach (1) § 33. S. 208) die Gleichung besteht:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

so kann man unbedingt setzen:

$$\frac{x}{a} = \cos\psi \quad , \quad \frac{y}{b} = \sin\psi \qquad (2)$$

Dabei ist nach (11) S. 209:

$$\frac{x}{a} = \frac{\cos\varphi}{W} \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{y}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin\varphi}{W}\sqrt{1-e^2} \qquad (3)$$

also:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{W} \quad , \quad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{W}\sqrt{1-e^2} \qquad (4)$$

wobei gesetzt ist:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} \qquad (5)$$

Die geometrische Bedeutung des so eingeführten Winkels ψ ist durch Fig. 1. veranschaulicht, man wird auf die Hilfsbreite ψ auch geführt durch eine bekannte Ellipsen-Konstruktion, bei welcher zwei konzentrische Kreise mit den Halbmessern a und b benützt werden.

Eine mehr zwingende Veranlassung zur Einführung der reduzierten Breite haben wir in dem Satze von der geodätischen Linie, den wir in (11) § 73. S. 372 gefunden haben, nämlich:

$$p \sin\alpha = k \qquad (6)$$

wo p der Parallelkreis-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids ist, d. h. derselbe Wert, der in (1) und (2) mit x bezeichnet wurde, man hat also:

$$p = x = \frac{a\cos\varphi}{W} = a\cos\psi, \text{ d. h. } \cos\psi = \frac{\cos\varphi}{W} \qquad (7)$$

Der dadurch bestimmte Wert ψ ist *derselbe*, den wir schon in (4) kennen gelernt, und *reduzierte Breite* genannt haben. Damit giebt die Gleichung (6):

$$a\cos\psi\sin\alpha = a\cos\psi'\sin\alpha' = k \qquad (8)$$

Die letzte Gleichung ist eine Anwendung des Satzes (6) auf zwei zusammengehörige Wertpaare ψ, α und ψ', α'; und indem man dabei den konstanten Faktor a und das allgemeine Zeichen k fortlässt, hat man aus (6) oder (8):

$$\cos\psi\sin\alpha = \cos\psi'\sin\alpha' \qquad (9)$$

Dieser Gleichung (9) entspricht ein *sphärisches* Dreieck, das wir in Fig. 2. des nächsten § 81. näher betrachten wollen; und damit erlangt die reduzierte Breite ψ, welche nun als Repräsentant des sphäroidischen Parallelkreis-Halbmessers ($p = x$ in Gleichung (7)) erscheint, erhöhte Bedeutung.

Dieser Herleitung des Begriffes der reduzierten Breite ψ entsprechend, wollen wir dieselbe definieren durch die Gleichung (7), d. h. ausführlicher:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{W} \qquad \left(\text{wo } W = \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\right) \tag{10}$$

oder auch mit Einführung von V:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \qquad \left(\text{wo } V = \sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}\right) \tag{11}$$

Daraus findet man durch geometrische Umformung:

$$\sin\psi = \frac{1}{V}\sin\varphi \tag{12}$$

$$\tan\psi = \tan\varphi\sqrt{1-e^2}, \quad \text{oder } \tan\varphi = \tan\psi\sqrt{1+e'^2} \tag{13}$$

Wir brauchen auch noch die Differentialbeziehung zwischen φ und ψ, welche sich am einfachsten aus (13) ergiebt, nämlich:

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = \frac{d\varphi\sqrt{1-e^2}}{\cos^2\varphi}$$

also wegen (11):

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = V^2\sqrt{1-e^2} \tag{14}$$

Aus (11) findet man auch:

$$V = \sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2\psi}} \tag{15}$$

Die geometrische Bedeutung von V^2 ist, nach (18) S. 210, das Haupt-Krümmungsverhältnis, d. h. das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungshalbmesser N und M in einem Punkte des Ellipsoids mit der Breite φ; und die Formel (15), welche nun V^2 bzw. V auch als Funktion von ψ giebt, ist für spätere Anwendung wichtig.

Numerische Berechnung von $\varphi - \psi$.

Um zu gegebenem φ das zugehörige ψ zu berechnen oder umgekehrt, kann man zuerst die Gleichung (13) anwenden:

$$\tan\psi = \tan\varphi\sqrt{1-e^2} \qquad \left(\log\sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458{\cdot}202\right) \tag{16}$$

Wenn man aber besondere Zahlenschärfe wünscht, so wird es besser sein, auf die *Differenz* $\varphi - \psi$ geradezu auszugehen, und hiezu hat man nach (12) und (11):

$$\sin\varphi = V\sin\psi \qquad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{V} \tag{17}$$

$$\cos\varphi = V\sqrt{1-e^2}\cos\psi \qquad \cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \tag{18}$$

Nun ist $\sin(\varphi-\psi) = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi$; dieses kann man in zweifacher Weise auf (17) und (18) anwenden, wodurch man findet:

$$\sin(\varphi-\psi) = \sin 2\varphi\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2V\sqrt{1-e^2}} \tag{19}$$

oder:

$$\sin(\varphi-\psi) = \sin 2\psi\,\frac{V}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) \tag{20}$$

Hiebei ist V je nach der einen oder anderen Form von (15) zu benützen.

Zur Anwendung von (19) und (20) hat man von § 32. S. 207:

$$\log\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) = \log\alpha = 7.524\,1069{\cdot}093 \tag{21}$$

Indem man noch zum Übergang von *log sin* $(\varphi - \psi)$ auf *log* $(\varphi - \psi)$ die Formel (28) mit (28a) S. 199 benützt, bekommt man aus (19) und (21):

$$log\,(\varphi - \psi) = log\,\frac{sin\,2\,\varphi}{V} + 2.538\,9562{\cdot}266 + [5.23078]\,(\varphi - \psi)^2 \tag{22}$$

wobei [5·23078] der Coëfficienten-Logarithmus ist.

Hiernach kann man mit der äussersten Schärfe rechnen, z. B.:

Gegeben Berlin $\varphi = 52°\ 30'\ 16{,}7''$

Damit giebt die Hilfstafel auf Seite [47] des Anhangs $log\,V = 0.000\,5399{\cdot}278$, und wenn man im übrigen nach der vorstehenden Formel (22) rechnet, so erhält man als Summe der zwei ersten Glieder:

		2.523 3412·273
hiezu das letzte Glied von (22):		+ 1·894
	$log\,(\varphi - \psi)$	2.523 3414·167
$\varphi - \psi = 5'\ 33{,}68864''$	$\varphi - \psi =$	333,68864
$\varphi = 52°\ 30'\ 16{,}70000''$		
$\psi = 52°\ 24'\ 43{,}011\,36''$		(23)

Mit so vielen Dezimalen wird man natürlich im allgemeinen nicht rechnen, wir haben aber diese scharfe Rechnung hier geführt, um sie zugleich als Kontrolle für das nachfolgende Näherungs-Verfahren zu benützen.

Die beste Form zur numerischen Berechnung von $\varphi - \psi$ aus gegebenen φ oder ψ erhält man durch eine Reihen-Entwicklung nach dem Grundsatze des Mittelarguments (§ 30. S. 201—202). Nach (13) ist:

$$tang\,\psi = \sqrt{1 - e^2}\,tang\,\varphi = \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}\right) tang\,\varphi$$

andererseits
$$tang\,\varphi - tang\,\psi = \frac{\varphi - \psi}{cos^2\,\mu} + (\varphi - \psi)^3 \ldots$$

dabei ist gesetzt
$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \mu,$$

damit wird:
$$\varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8}\right) cos^2\,\mu\ tang\,\varphi \quad , \quad \varphi = \mu + \frac{e^2}{4}\,sin\,\mu\,cos\,\mu,$$

woraus weiter:
$$\varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8}\right) sin\,(\varphi + \psi)$$

Dieses kann man noch um einen Grad weiter treiben, wodurch man erhält (mit Zusetzung von ϱ''):

$$\varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5}{64}e^6\right) \varrho''\,sin\,(\varphi + \psi) + \frac{1}{384}e^6\,\varrho''\,sin^3\,(\varphi + \psi) \tag{24}$$

Mit *Bessels* Excentricität giebt dieses ausgerechnet:

$$\varphi - \psi = 345{,}325\,3808\,sin\,(\varphi + \psi) + 0{,}000\,160\,sin^3\,(\varphi + \psi) \tag{25}$$
$$(log = 2.538\,2285{\cdot}0) \qquad\qquad (log = 6.2033)$$

Da das zweite Glied höchstens 0,00016″ ausmachen kann, ist es für gewöhnlich zu vernachlässigen; wenn φ in der Nähe von 45° ist, fällt dieses Glied überhaupt fort.

Um die Formel (25) bequem anzuwenden, muss man einen *Näherungswert* von

$\varphi - \psi$ vorher haben; und ein solcher wird durch unsere Hilfstafel Seite [40] des Anhangs geliefert; die Anwendung mag ein Beispiel zeigen:

Gegeben Berlin $\varphi = 52° \ 30' \ 16{,}7''$
Hiezu nach Seite [40]: $\varphi - \psi = 5' \ 33{,}65''$ genähert

$\psi = 52° \ 24' \ 43{,}05''$
$\varphi + \psi = 104° \ 54' \ 59{,}75''$

log sin $(\varphi + \psi)$	9.985 1126·8
log 345,3 . . .	2.538 2285·0
	2.523 3411·8

333,68847″
Hiezu das zweite Glied von (25): + 0,00014
333,68861″

$= 5' \ 33{,}68861''$
$\varphi = 52° \ 30' \ 16{,}70000''$

Also: $\psi = 52° \ 24' \ 43{,}01139''$ (26)

Dieses stimmt hinreichend mit dem schärfer berechneten Wert (23).

Die Frage, wie genau man den Näherungswert $\varphi + \psi$ haben muss, um eine gewisse Endgenauigkeit zu erreichen, kann man durch Differentiieren von (25) beantworten; man findet, dass ein Fehler von 1″ an dem Näherungswert nur einen Fehler von etwa 0,001″ erzeugt, weshalb eine Genauigkeit von 0,1″ im Näherungswert (wie sie die Hilfstafel Seite [40] gewährt) zur endgiltigen Berechnung genügt.

Für die sphäroidischen Normal-Beispiele, welche wir in (1)—(4) § 77. S. 386 bis 387 zusammengestellt haben, sind die geographischen Breiten φ und die entsprechenden reduzierten Breiten ψ die folgenden:

	φ	ψ
	$\varphi = 45° \ 0' \ 0''$	$\psi = 44° \ 54' \ 14{,}67493''$
	$49° \ 30' \ 0''$	$49° \ 24' \ 18{,}83709''$
	$50° \ 0' \ 0''$	$49° \ 54' \ 19{,}82230''$
	$50° \ 30' \ 0''$	$50° \ 24' \ 20{,}91117''$
	$55° \ 0' \ 0''$	$54° \ 54' \ 35{,}31462''$
Tübingen	$\varphi = 48° \ 31' \ 12{,}4000''$	$\psi = 48° \ 25' \ 29{,}6082''$
Hornisgrinde	$48° \ 36' \ 21{,}8966''$	$48° \ 30' \ 30{,}2280''$
Berlin	$\varphi = 52° \ 30' \ 16{,}7''$	$\psi = 52° \ 24' \ 43{,}0014''$
Königsberg	$54° \ 42' \ 50{,}6''$	$54° \ 37' \ 24{,}7564''$

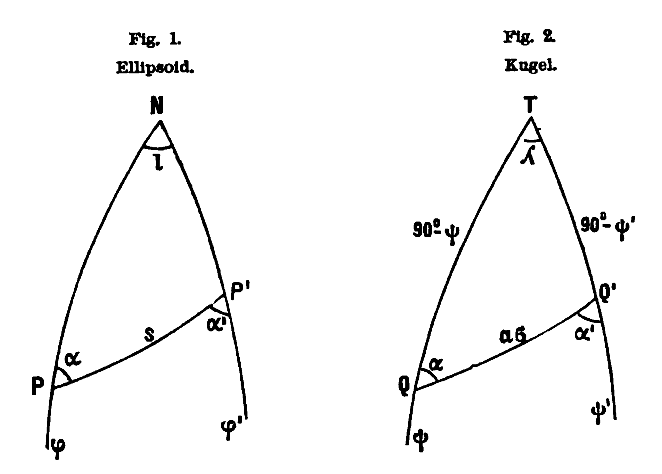
§ 81. Das sphärische Hilfsdreieck mit reduzierten Breiten.

Wir knüpfen an die im vorigen § 80. (9) S. 402 gefundene Gleichung an:

$$\cos \psi \sin \alpha = \cos \psi' \sin \alpha' \quad (1)$$

Dieser Gleichung entspricht die umstehende Fig. 2.

In nachstehender Fig. 1. sind P und P' zwei Punkte auf dem Ellipsoid, s die verbindende geodätische Linie mit den Azimuten α und α'. Die beiden Punkte P und P' haben die geographischen Breiten φ und φ' und den Längen-Unterschied l.



In Fig. 2. ist ein entsprechendes *sphärisches* Dreieck $T\,Q\,Q'$ gezeichnet, dessen Bogen $Q\,Q'$ *dieselben* Azimute α und α' hat wie die geodätische Linie $P\,P'$. Der Bogen $Q\,Q'$ ist mit $a\,\sigma$ bezeichnet, indem der Kugelhalbmesser $= a$ (Äquatorhalbmesser des Ellipsoids) und der Centriwinkel $= \sigma$ angenommen ist. Der Längenunterschied zwischen Q und Q' ist $= \lambda$, verschieden von l. Auch die sphärischen Breiten ψ und ψ' sind andere als die ellipsoidischen, es sind die zu φ und φ' gehörigen reduzierten Breiten, d. h. nach (13) § 80. S. 403 bestehen die Beziehungen:

$$tang\,\psi = tang\,\varphi\,\sqrt{1 - e^2} \quad , \quad tang\,\psi' = tang\,\varphi'\,\sqrt{1 - e^2} \tag{2}$$

Die Richtigkeit all dieser Beziehungen ist durch die sphärische Gleichung (1) bewiesen, und wir wissen nun, dass einem geodätischen Polardreieck $N\,P\,P'$ auf dem Ellipsoid immer ein *sphärisches* Dreieck $T\,Q\,Q'$ entspricht, mit gleichen Azimuten α, α' und mit reduzierten Breiten ψ, ψ', welche zu φ, φ' gehören. Dagegen sind die übrigen Stücke, die Entfernung beider Punkte und deren Längenunterschied, in beiden Dreiecken verschieden.

Es kommt nun darauf an, eine Beziehung herzustellen zwischen s und σ und eine Beziehung zwischen l und λ, denn da zwischen allen übrigen Stücken von Fig. 1. und Fig 2. vermöge der Gleichungen (1) und (2) bereits Beziehungen bestehen, werden wir dann in allen Teilen von dem sphäroidischen Dreieck auf das sphärische Dreieck übergehen können und umgekehrt.

Wir haben nach (φ), (λ) S. 373 und (1), (2), (3) S. 302 folgende Differential-Gleichungen, mit den Bezeichnungen unserer vorstehenden Fig. 1. und 2. (geographische Länge auf dem Ellipsoid $= l$, auf der Kugel $= \lambda$):

Ellipsoid	*Kugel*	
$d\,s\,\cos\alpha = M\,d\varphi$	$a\,d\sigma\,\cos\alpha = a\,d\psi$	(3)
$d\,s\,\sin\alpha = N\cos\varphi\,d\,l$	$a\,d\sigma\,\sin\alpha = a\cos\psi\,d\lambda$	(4)

Hiebei ist nach (11) und (14) § 80. S. 403:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = V\sqrt{1-e^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = V^2\sqrt{1-e^2} \tag{5}$$

Wenn man auch noch die Bedeutung von M und N nach S. 209—210 berücksichtigt, so erhält man durch zweifache Division von (3) und (4):

$$ds = a\,d\sigma\,\frac{1}{V} \tag{6}$$

$$dl = d\lambda\,\frac{1}{V} \tag{7}$$

Die hier zweimal auftretende Grösse V ist die stets von uns benützte Funktion der Breite, welche entweder in φ oder in ψ ausgedrückt nach (15) § 80. S. 403 ist:

$$V = \sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{V} = \sqrt{1-e^2\cos^2\psi} \tag{8}$$

Die geometrische Bedeutung von V haben wir schon in (18) § 33. S. 210 angegeben, es ist nämlich V^2 das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungshalbmesser N und M.

Dieses Verhältnis V^2 ist auch in dem Verhältnis $d\varphi : d\psi$ nach (5) enthalten; und damit erkennt man, dass die reduzierte Breite, geometrisch betrachtet, eine ähnliche Bedeutung hat, wie der „verkürzte Breitenunterschied“, den wir in Fig. 1. S. 326 aus geometrischen Gründen eingeführt haben, und zur Vergleichung wollen wir nun hersetzen:

$$\text{Verkürzter Breiten-Unterschied} \quad d\varphi' = \frac{d\varphi}{V^2} \tag{9}$$

$$\text{Reduzierter Breiten-Unterschied} \quad d\psi = \frac{d\varphi}{V^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \tag{10}$$

das Verhältnis $d\varphi' : d\psi$ ist $= \sqrt{1-e^2}$ d. h. konstant.

Ohne auf die geometrischen Deutungen, welche sich hiebei ergeben, einzugehen, müssen wir nun die beiden Differential-Gleichungen (6) und (7) integrieren, denn dann werden die erkannten Verwandtschaften zwischen dem sphäroidischen Dreieck Fig. 1. und dem sphärischen Dreieck Fig. 2. nutzbar werden.

§ 82. Integration der Differential-Gleichungen zur geodätischen Hauptaufgabe.

Wir haben vom vorigen § 81. (6) und (8) (s. oben) die Differential-Gleichung:

$$ds = a\,d\sigma\sqrt{1-e^2\cos^2\psi'} \tag{1}$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die umstehenden Fig. 1. und Fig. 2., indem ds das Differential der geodätischen Linie s in Fig. 1. und $a\,d\sigma$ das Differential des sphärischen Bogens σ (auf den Halbmesser a bezogen) von Fig. 2. ist; auch ψ' ist sphärische Breite eines Punktes auf dem Bogen σ.

Um die Gleichung (1) nach σ integrieren zu können, muss man ψ' in σ ausdrücken, wozu die Formeln der sphärischen Trigonometrie dienen, welche wir schon früher in (20)—(22) § 55. S. 299 angegeben haben, nämlich mit Übertragung auf unsere neue Fig. 2:

Fig. 1.
Ellipsoid.

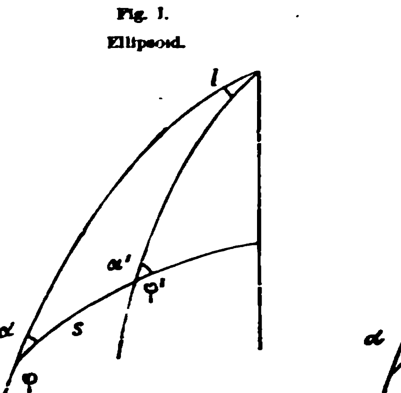
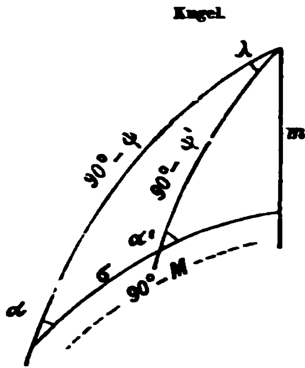


Fig. 2.
Kugel.



$$\sin m = \cos \psi \sin \alpha \quad , \quad \tang M = \frac{\sin \psi}{\cos \psi \cos \alpha} \tag{2}$$

$$\cos m = \frac{\sin \psi}{\sin M} = \frac{\cos \psi \cos \alpha}{\cos M} \tag{3}$$

$$\sin \psi' = \cos m \sin (M + \sigma) \tag{4}$$

Nun setzen wir zur Schreib-Abkürzung im folgenden:

$$M + \sigma = x \quad , \text{ wobei } M \text{ konstant, also } \quad d\sigma = dx \tag{5}$$

also:

$$\sin^2 \psi' = \cos^2 m \sin^2 x$$

$$\cos^2 \psi' = 1 - \cos^2 m \sin^2 x \tag{6}$$

Dieses in (1) gesetzt giebt:

$$ds = a\sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \sin^2 x}\, d\sigma$$

$$\frac{e^2}{1-e^2} = e'^2 \quad , \text{ also } ds = a\sqrt{1-e^2}\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 m \sin^2 x}\, d\sigma \tag{7}$$

$$a\sqrt{1-e^2} = b \quad , \quad e' \cos m = k \quad , \quad ds = b\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x}\, dx \tag{8}$$

Nun wird nach den gewöhnlichen Reihen (11) S. 197 und (33) S. 200 entwickelt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 x - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad , \quad \sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \tag{9}$$

Dieses zusammen giebt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} = \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) + \left(-\frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{16} k^4\right) \cos 2x - \frac{k^4}{64} \cos 4x \tag{10}$$

Zur Integration hat man:

$$\int \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad , \quad \int \cos 4x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\left(\sin(2M + 2\sigma) - \sin 2M\right) = \sin \sigma \cos (2M + \sigma) \tag{11}$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\left(\sin(4M + 4\sigma) - \sin 4M\right) = \frac{1}{2} \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \tag{12}$$

Damit kann man die Integrale von (9), d. h. auch die Integration von (8) zusammensetzen, wodurch man einen Ausdruck von dieser Form erhält:

$$s = A b \sigma - B b \sin \sigma \cos (2 M + \sigma) - C b \sin 2 \sigma \cos (4 M + 2 \sigma) \tag{13}$$

Dabei haben die Coëfficienten A, B und C folgende Bedeutungen:

$$A = \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) \quad , \quad B = \left(\frac{1}{4} k^2 - \frac{1}{16} k^4\right) \quad , \quad C = \frac{1}{128} k^4 \tag{14}$$

Die Umkehrung von (13) giebt:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos (2 M + \sigma) + \gamma \sin 2 \sigma \cos (4 M + 2 \sigma) \tag{15}$$

wobei die neu eingeführten Coëfficienten sind (mit Zusetzung der nötigen ϱ):

$$\alpha = \frac{1}{A} \varrho \quad , \quad \beta = \frac{B}{A} \varrho \quad , \quad \gamma = \frac{C}{A} \varrho \tag{16}$$

In gleicher Weise behandeln wir auch die Differential-Gleichung für den Längenunterschied, nämlich nach (7) und (8) § 81. S. 407:

$$d l = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}\, d \lambda \tag{17}$$

Hier wird nach (11) S. 197 entwickelt:

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \psi - \frac{e^4}{8} \cos^4 \psi - \frac{e^6}{16} \cos^6 \psi \tag{18}$$

Hiebei bestehen sphärische Gleichungen, nach (1) S. 302:

$$d \lambda \cos \psi = d \sigma \sin \alpha$$

dann nach (2):

$$\sin \alpha = \frac{\sin m}{\cos \psi} \quad , \quad \text{also } d \lambda = \frac{\sin m}{\cos^2 \psi} d \sigma \tag{19}$$

Damit kann man (17) in eine Integration nach σ umformen, nämlich mit Rücksicht auf (18):

$$l = \lambda - e^2 \sin m \int \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} \cos^2 \psi + \frac{e^4}{16} \cos^4 \psi + \ldots\right) d \sigma \tag{20}$$

Nun hat man wieder nach (6):

$$\cos^2 \psi = 1 - \cos^2 m \sin^2 x$$
$$\cos^4 \psi = 1 - 2 \cos^2 m \sin^2 x + \cos^4 m \sin^4 x$$

Ausserdem hat man $\sin^2 x$ und $\sin^4 x$ ausgedrückt in $\cos 2x$ und $\cos 4x$ durch (9), und all dieses zusammen bringt die zu integrierende Funktion (20) auf eine Reihe, welche nach $\cos 2x$, $\cos 4x$, u. s. w. fortschreitet, d. h. (20) wird:

$$l = \lambda - e^2 \sin m \int (A' + B' \cos 2x + C' \cos 4x + \ldots) d x \tag{21}$$

Dabei haben die Coëfficienten folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{16} - \frac{e^2}{16} \cos^2 m - \frac{e^4}{16} \cos^2 m + \frac{3}{128} e^4 \cos^4 m \\ B' &= \frac{e^2}{16} \cos^2 m + \frac{e^4}{16} \cos^2 m - \frac{e^4}{32} \cos^4 m \\ C' &= \frac{e^4}{128} \cos^4 m \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Denkt man sich diese Coëfficienten in (21) eingesetzt, integriert, und die Grenzen

ebenso wie früher bei (11) und (12) eingeführt, so überblickt man leicht, dass folgendes erhalten wird:

$$l = \lambda - e^2 \sin m \left(A'\sigma + B' \sin\sigma \cos(2M+\sigma) + \frac{C'}{2} \sin 2\sigma \cos(4M+2\sigma) + \ldots\right) \quad (23)$$

Hier ist noch bei B' und C' der Faktor ϱ zuzusetzen; indem wir dieses thun, und auch e^2 in die Klammer hineinziehen, bilden wir aus (23) diese letzte Form:

$$l = \lambda - \sin m \left(\alpha'\sigma + \beta' \sin\sigma \cos(2M+\sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cos(4M+2\sigma)\right) \quad (24)$$

Dabei ist:

$$\alpha' = A' e^2 \quad , \quad \beta' = B' e^2 \varrho \quad , \quad \gamma' = \frac{C' e^2}{2} \varrho \quad (25)$$

Entwicklung auf höhere Potenzen.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung nur so viele Glieder beibehalten, als man bequem überschauen kann, und so viele, als für gewöhnlich nötig sind.

Zu einem sicheren Urteil über den Einfluss der höheren Glieder muss man jedoch dieselben kennen, wozu die Weiter-Entwicklung der vorstehenden Reihen nötig ist. Wir setzen die Schluss-Ergebnisse dieser Weiter-Entwicklung hier her.

Die Reihe (15) bekommt noch ein Glied, und ist dann:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin\sigma \cos(2M+\sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos(4M+2\sigma) + \delta \sin 3\sigma \cos(6M+3\sigma) \quad (26)$$

Folgendes sind die hiezu gehörigen Coëfficienten:

$$\left.\begin{array}{lll}
\alpha = \frac{1}{A}\varrho \ , & A = \left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 - \frac{175}{36384}k^8\right) & \\
\beta = \frac{B}{A}\varrho \ , & B = \left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} + \frac{15}{512}k^6 - \frac{35}{2048}k^8\right) & \\
\gamma = \frac{C}{A}\varrho \ , & C = \left(\frac{k^4}{128} - \frac{3}{512}k^6 + \frac{35}{8192}k^8\right) & \text{(dabei ist } k = e' \cos m) \\
\delta = \frac{D}{A}\varrho \ , & D = \left(\frac{k^6}{1536} - \frac{5}{6144}k^8\right) & \\
\varepsilon = \frac{E}{A}\varrho \ , & E = \left(\frac{5}{65536}k^8\right) &
\end{array}\right\} \quad (27)$$

Auch die Reihe (24) bekommt ein weiteres Glied und wird:

$$l = \lambda - \sin m \left(\alpha'\sigma + \beta' \sin\sigma \cos(2M+\sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cos(4M+2\sigma) \right.$$
$$\left. + \delta' \sin 3\sigma \cos(6M+3\sigma)\right) \quad (28)$$

Folgendes sind die hiezu gehörenden Coëfficienten:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha' = \frac{e^2}{2}\left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5e^6}{64}\right) - \frac{e^4 \cos^2 m}{16}\left(1 + e^2 + \frac{15}{16}e^4\right) \\
\qquad + \frac{3}{16} e^6 \cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) - \frac{25}{2048} e^8 \cos^6 m \\
\beta' = \varrho\left(\frac{e^4}{16}\cos^2 m \left(1 + e^2 + \frac{15}{16}e^4\right) - \frac{e^6}{32}\cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) + \frac{75}{4096} e^8 \cos^6 m\right. \\
\gamma' = \varrho\left(\frac{e^6}{256}\cos^4 m \left(1 + \frac{15}{8}e^2\right) - \frac{15}{4096} e^8 \cos^6 m\right) \\
\delta' = \varrho\left(\frac{5}{12288} e^8 \cos^6 m\right)
\end{array}\right\} \quad (28a)$$

Wenn man hier alle konstanten Teile mit der *Bessel*schen Excentricität e ($log\, e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$ nach S. 207) ausrechnet, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= 0{,}003\,342\,773\,183 - [4.447\,6079]\cos^2 m + [1.84854]\cos^4 m - [9.3843]\cos^6 m \\ \beta' &= [9.762\,0330]\cos^2 m - [7.28791]\cos^4 m + [4.87477]\cos^6 m \\ \gamma' &= [6.38482]\cos^4 m - [4.17580]\cos^6 m \\ \delta' &= [3.22156]\cos^6 m \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Diese Reihen gehen weit über das gewöhnliche Bedürfnis. Bei geodätischen Linien von mehreren Graden Ausdehnung braucht man von (29) meist nur α' und β' und dabei nur die zwei ersten Glieder von α' und das erste Glied von β'.

Etwas mehr braucht man gewöhnlich bei der Reihe (26) mit den Coëfficienten (27), doch auch meist nur α, β und γ nur etwa bis k^4.

Dabei ist etwa 8 stellige Logarithmen-Rechnung angenommen. Mit den Coëfficienten (27) und (29) kann man auch die grössten Fälle 10 stellig berechnen.

Anwendung der vorstehenden Entwicklungen.

Durch die Gleichungen (26) und (28) mit den zugehörigen Coëfficienten α, β, γ, α' β' γ' u. s. w. sind die gesuchten Beziehungen zwischen Fig. 1. und Fig. 2. hergestellt, und man kann damit die geodätische Hauptaufgabe lösen in folgender Weise

Von einem Punkte des Ellipsoids mit der geographischen Breite φ geht eine geodätische Linie s unter dem Azimut α aus; man soll die Breite φ' des Endpunktes dieser geodätischen Linie bestimmen, sowie das Azimut α' daselbst und den Längenunterschied l beider Punkte.

Aus der gegebenen Breite φ berechnet man die zugehörige reduzierte Breite ψ nach der Gleichung $tang\, \psi = \sqrt{1-e^2}\, tang\, \varphi$ (oder nach einem andern in § 80. angegebenen Verfahren). Mit diesem ψ und dem Azimut α kann man in dem sphärischen rechtwinkligen Dreieck in Fig. 2. die beiden Hilfsgrössen m und M bestimmen und damit die Gleichung (15) oder (26) nach σ auflösen.

Damit hat man drei Stücke ψ, α, σ, mit welchen das schiefwinklige sphärische Dreieck von Fig. 2. aufgelöst werden kann, so dass die jenseitige sphärische Breite ψ' und der sphärische Längenunterschied λ bekannt werden.

Von der sphärischen (reduzierten) Breite ψ' geht man zurück zu der wirklichen Breite φ' durch die Gleichung $tang\, \varphi' = tang\, \psi' \sqrt{1+e'^2}$ (oder durch ein anderes in § 80. angegebenes Verfahren), und von der sphärischen Länge λ kommt man zu der sphäroidischen Länge l durch die Gleichung (24) oder (28), womit die Lösung der ganzen Aufgabe vollendet ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel hiefür wollen wir nach (4) § 77. S. 387 nehmen:

$$\text{Berlin} \quad \varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}7000'' \tag{30}$$

$$\text{Berlin-Königsberg} \quad \alpha = 59^\circ\ 33'\ 0{,}6892'' \qquad log\, s = 5.724\,2591{\cdot}353 \tag{31}$$

Die Berechnung der reduzierten Breite von Berlin haben wir bereits in (26) § 80. S. 405 behandelt und gefunden:

$$\text{Berlin} \quad \psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}0114'' \tag{32}$$

Nun kommt die Berechnung von m und M nach den Gleichungen (2) und (3):

$$m = 31^\circ\ 43'\ 31{,}13'' \qquad M = 68^\circ\ 41'\ 19{,}95'' \tag{33}$$

Weiter brauchen wir die Coëfficienten zur Berechnung von σ, und zwar zuerst $k' = e' \cos m$ nach (8), es ist:

$$log\ e'\ cos\ m = log\ k' = 8.843\,3740$$

und damit nach (14) und (16) hinreichend genau, ohne die Weiter-Entwicklung (27):

$$log\ A = 0.000\,5270{\cdot}0 \qquad log\ B = 7.084\,1599{\cdot}2 \qquad log\ C = 3.266\,286$$
$$log\ \alpha = 5.313\,8981{\cdot}0 \qquad log\ \beta = 2.398\,0580{\cdot}5 \qquad log\ \gamma = 8.580\,184$$

Mit diesen Coëfficienten α, β, γ kann man die Gleichung (15) nach σ auflösen, allerdings nicht geradezu, weil σ selbst rechts vorkommt; allein die Reihe (15) ist sehr rasch konvergierend, so dass es genügt, einen ersten Näherungswert von σ nur aus dem *ersten* Gliede von (15) zu berechnen, d. h. $\sigma = \frac{\alpha s}{b}$ zu setzen, womit man auch die folgenden Glieder ausrechnen kann; oder kurz, man löst die Gleichung (15) durch Näherung indirekt, stufenweise nach σ auf. Dieses Verfahren gab in unserem Falle:

$$\text{erste Näherung} \quad \alpha \frac{s}{b} = \sigma = 4^\circ\ 46'\ 17{,}8''$$
$$\text{hiezu}\ \beta\ sin\ \sigma\ cos\ (2M + \sigma) = - \qquad 16{,}4''$$
$$\text{zweite Näherung} \qquad \sigma = 4^\circ\ 46'\ 1{,}4''$$

Damit kann man das zweite und dritte Glied von (15) ausrechnen, und hat dann im ganzen:

$$\alpha \frac{s}{b} = 4^\circ\ 46'\ 17{,}8176''$$
$$\beta\ sin\ \sigma\ cos\ (2M + \sigma) = - \qquad 16{,}4086''$$
$$\gamma\ sin\ 2\sigma\ cos\ (4M + 2\sigma) = + \qquad 0{,}0015''$$
$$\text{endgültig} \quad \sigma = 4^\circ\ 46'\ 1{,}4105'' \qquad (34)$$

Nun stellen wir von (32), (31), (34) zusammen:

$$\psi = 52^\circ\ 24'\ 43{,}0114'' \quad \alpha = 59^\circ\ 33'\ 0{,}6892'' \quad \sigma = 4^\circ\ 46'\ 1{,}4105'' \qquad (34\,a)$$

Damit kann man das sphärische Dreieck auflösen, welches ψ', α' und λ liefert; die Rechnung nach den Formeln (14) und (15) §. 55. S. 297 (in gleicher Weise wie das Zahlen-Beispiel auf S. 298 oben) hat ergeben:

$$\psi' = 54^\circ\ 37'\ 24{,}7566'' \qquad \alpha' = 65^\circ\ 16'\ 9{,}3655'' \qquad (35)$$
$$\lambda = 7^\circ\ 6'\ 30{,}1340'' \qquad (36)$$

Der so gefundene sphärische Wert ψ' ist die reduzierte Breite von Königsberg, woraus man nach § 80. die wirkliche Breite berechnet, nämlich:

$$\varphi' = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6002'' \qquad (37)$$

Nun haben wir noch die Aufgabe, den sphärischen Längenunterschied λ von (36) in den sphäroidischen Längenunterschied l zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coëfficienten (29) dient. Wir berechnen nach (29), jedoch nur mit den Gliedern bis $cos^4\ m$:

$$log\ \alpha' = 7.523\,8439 \qquad log\ \beta' = 9.62045 \qquad log\ \gamma' = 6.098$$

Demnach (24):

$$l = \lambda - 30{,}1479'' + 0{,}0144'' + 0{,}0000 \ldots = \lambda - 30{,}1335''$$

also nach (32):

$$l = 7^\circ\ 6'\ 30{,}1340'' - 30{,}1335'' = 7^\circ\ 6'\ 0{,}0005'' \qquad (38)$$

Nun haben wir in (37), (35), (38) die ganze Auflösung:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Königsberg} & \varphi' = 54^\circ\ 42'\ 50{,}6002'' \\ \text{Königsberg-Berlin} & \alpha' = 65^\circ\ 16'\ 9{,}3655'' \ ,\ l = 7^\circ\ 6'\ 0{,}0005'' \end{array}\right\} \qquad (39)$$

Mit den *erweiterten Formeln* (26) — (29) wollen wir auch noch das grosse Normal-Beispiel (2) § 77. S. 386 berechnen, wofür die Hauptzahlen folgende sind:

$$\text{Gegeben} \quad \varphi = 45^\circ\ 0'\ 0'' \qquad \alpha = 29^\circ\ 3'\ 15{,}4598'' \tag{40}$$

$$\log s = 6.120\,6674.805 \tag{41}$$

Die Rechnung beginnt mit der reduzierten Breite:

$$\psi = 44^\circ\ 54'\ 14{,}67493'' \tag{42}$$

Das rechtwinklige sphärische Hilfsdreieck giebt:

$$m = 20^\circ\ 7'\ 8{,}712'' \qquad M = 48^\circ\ 44'\ 46{,}551'' \tag{43}$$

Die Coëfficienten zur Berechnung von σ werden nach (27):

$\log \alpha = 5.313\,7831{\cdot}066$, $\log \beta = 2.483\,7124$, $\log \gamma = 8.749\,94$, $\log \delta = 5.445$

und damit σ selbst in 4 Gliedern:

$$\sigma = 42\,782{,}021652'' - 20{,}794012'' - 0{,}017667'' + 0{,}000\,012''$$

$$\sigma = 11^\circ\ 52'\ 41{,}20998'' \tag{44}$$

Mit ψ, α und σ von (42), (40) und (44) wird das sphärische Dreieck aufgelöst; dasselbe giebt:

$$\psi' = 54^\circ\ 54'\ 35{,}3145'' \qquad \alpha' = 36^\circ\ 45'\ 7{,}4006'' \tag{45}$$

$$\lambda = 10^\circ\ 0'\ 49{,}11952'' \tag{46}$$

Die reduzierte Breite ψ' wird in die Breite φ' verwandelt, nach § 80., nämlich:

$$\varphi' = 54^\circ\ 59'\ 59{,}9999'' \quad (\text{soll } 55^\circ\ 0'\ 0'') \tag{47}$$

Das Azimut α' nach (45) ist bereits auch sphäroidisches Azimut; wir haben also, um die Auflösung zu vollenden, nur noch λ von (46) in l zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coëfficienten (29) dient.

Die Coëfficienten-Berechnung nach (29) giebt:

$\log \alpha' = 7.523\,7864{\cdot}329$ $\quad \log \beta' = 9.706\,0623$ $\quad \log \gamma' = 6.27300$

und damit wird:

$$l = \lambda - 49{,}131\,513'' + 0{,}011\,935'' + 0{,}000\,020 = -\,49{,}119\,558''$$

also nach (46): $\quad l = 9^\circ\ 59'\ 59{,}99996'' \quad (\text{soll} = 10^\circ\ 0'\ 0'') \qquad (48)$

In α', φ' und l von (45), (47) und (48) haben wir die vollständige Auflösung der gestellten Aufgabe in hinreichender Übereinstimmung mit den Angaben von (2) § 77. S. 386:

Umkehrung der vorstehenden Aufgabe.

Wenn nicht φ, α und s gegeben sind, sondern φ, φ' und λ, so dass s, α und α' gesucht werden, so kann man das im vorstehenden behandelte Verfahren auch noch anwenden, aber nur *indirekt* und umständlich, weil die sphärischen Winkel m und M, oder in erster Näherung wenigstens m, bereits zur Reduktion von l auf λ gebraucht werden.

Bei der raschen Konvergenz der Reihen für $\lambda - l$ und für σ ist die indirekte Rechnung mit stufenweiser Einführung von Näherungen (die ja auch schon bei (26) nötig war) jedenfalls möglich, wie in zwei Abhandlungen ausgeführt wird, von *Sadebeck*, „Astr. Nachr. Nr. 2270, 95. Band, 1879“, S. 207—220 mit Hilfstafel S. 209—217, und *Albrecht*, „Astr. Nachr. Nr. 2294, 96. Band, 1880“, S. 209—218.

Indessen haben wir für den Fall, dass φ, φ' und l gegeben, und s, α und α' gesucht sind, die günstigere Auflösung unseres nachfolgenden § 83.

Vergleichung unserer Formeln mit der Bessel schen Methode.

Der Grundgedanke der Auflösung eines sphäroidischen Polar-Dreiecks durch ein sphärisches Hilfs-Dreieck mit reduzierten Breiten ist von *Bessel* behandelt in einer Abhandlung „Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen, Astr. Nachr. Nr. 86, 4. Band 1826", S. 241—254, nebst „Tafeln zur Berechnung der geodätischen Vermessungen".

Diese *Bessel*sche Theorie mit den Hilfstafeln bildet auch einen Teil des Werkes „Das Messen auf der sphäroidischen Oberfläche u. s. w. von *J. J. Baeyer*, Berlin 1862".

Die *Bessel*schen Hilfstafeln sind auch in andere Werke übergegangen, sie sind z. B. unverändert abgedruckt in unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, S. 358—364, und in erweiterter Form in *Albrechts* „Formeln und Hilfstafeln (vgl. S. 231), Berlin 1879," S. 204—212.

Um die *Bessel*sche Methode nebst ihren Hilfstafeln mit den Formeln unseres vorstehenden § 82. zu vergleichen, bemerken wir zuerst, dass unsere Coëfficienten α, β, γ nach (27) *dieselben* sind, wie die *Bessel*schen Coëfficienten α, β, γ, deren Logarithmen in der ersten *Bessel*schen Hilfstafel enthalten sind; allerdings ist die Form der Berechnung in beiden Fällen verschieden.

Die Coëfficienten α', β', γ' des zweiten Teils der *Bessel*schen Hilfstafel sind mit unseren Coëfficienten α' β' γ' von (29) nicht unmittelbar identisch, aber sie sind denselben proportional. Es kommt bei *Bessel* ein konstanter Faktor in Rechnung, den wir hier F nennen wollen:

$$F = \frac{e^2}{\sqrt[3]{1-0{,}75\,e^2}} \qquad (log\ F = 7.825\,1369{\cdot}0) \tag{49}$$

Indem wir für den nächsten Zweck der Vergleichung die *Bessel*schen Coëfficienten mit α'_B, β'_B, γ'_B bezeichnen, und mit α', β', γ' die Coëfficienten unserer Entwicklung nach (29) S. 411, haben wir:

$$F\alpha'_B = \alpha' \quad , \quad F\beta'_B = \beta' \quad , \quad F\gamma'_B = \gamma' \tag{50}$$

Als Argument für die erste *Bessel*sche Tafel, $log\ \alpha$, $log\ \beta$, $log\ \gamma$ dient der Logarithmus des Modulus $k = e'\,cos\,m$, welcher nach (8) und (27) auch Argument unserer α, β, γ ist, also erstes Argument $= log\ e'\,cos\,m$. Dagegen für den zweiten Teil der *Bessel*schen Tafel dient als Argument eine Grösse $log\ k'$, wobei k' diese Bedeutung hat:

$$k' = \frac{e\sqrt{0{,}75}}{\sqrt{1-0{,}75e^2}}\,cos\,m \qquad \left(log\ \frac{e\sqrt{0{,}75}}{\sqrt{1-0{,}75\,e^2}} = 8.850\,8255{\cdot}6\right) \tag{51}$$

Mit diesen Beziehungen kann man unsere Coëfficienten α, β, γ, α', β', γ' statt sie nach (27) und (29) zu berechnen, auch aus der *Bessel*schen Hilfstafel entnehmen, indem man mit dem Argument $log\ e'\,cos\,m$ in den ersten Teil und mit dem Argument $log\ k'$ nach (51) in den zweiten Teil von *Bessels* Tafel eingeht, worauf zu den gefundenen $log\ \alpha'$ und $log\ \beta'$ noch der konstante $log\ F$ nach (49) zu addieren ist, um unsere α', β' zu erhalten.

Wenn für die Coëfficienten-Logarithmen des ersten Teiles $log\ \alpha$, $log\ \beta$, $log\ \gamma$ eine Hilfstafel in der *Bessel*schen Form mit dem Argument $log\ e'\,cos\,m$ sehr nützlich ist, ist zu der zweiten *Bessel*schen Tafel für $log\ \alpha'$, $log\ \beta'$ mit dem Argumente $log\ k'$ nach (51) zu beachten, dass hiebei eine Umformung mit Vernachlässigung der Glieder e^8 zu Grunde liegt, weshalb es im Falle etwaiger ausnahmsweise sehr scharfer Rechnung besser ist, die Coëfficienten α' β' γ' nach unseren Formeln (29) bzw. (28a) mit e^8 einschliesslich unmittelbar zu berechnen, als sie aus *Bessels* Tafeln oder Formeln herzuleiten.

Die *Bessel*sche *zweite* Tafel für $log\ \alpha'$, $log\ \beta'$ hat die eigentümliche Einrichtung mit dem Argument k' nach (51), wobei die Vernachlässigung von e^8 nötig wurde, weil *Bessel* die Absicht hatte, den Gebrauch der Tafeln nicht an einen bestimmten Wert der Excentricität e zu binden. Unsere Hilfs-Coëfficienten in (29) beruhen nach (28a) auf Ausrechnung mit dem *Bessel*schen e^2 von S. 207: wollte man also ausnahmsweise einen anderen Wert e^2 in die Rechnung einführen, so müsste man auch die Coëfficienten-Logarithmen in (29) z. B. [4.4476079], nach (28a) *neu* berechnen.

§ 83. Neue Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe und ihrer Umkehrung.*)

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und Fig. 2. § 81. S. 406.)

Wir nehmen die zwei Differential-Grundformeln nach (6), (7), (8) § 81. S. 407 nochmals vor, nämlich:

$$d\sigma = \frac{V}{a}\,ds \tag{1}$$

$$d\lambda = V\,dl \tag{2}$$

wobei, wie gewöhnlich, V diese Bedeutung hat:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 cos^2 \varphi} \qquad (e'^2 cos^2 \varphi = \eta^2) \tag{3}$$

*) Unter dieser Bezeichnung früher veröffentlicht in der „Zeitschr. f. Verm.", 1883, S. 65—82.

Wenn die beiden Gleichungen (1) und (2) integriert sind, so sind alle Beziehungen zwischen einem geodätischen Polar-Dreieck und einem sphärischen Polar-Hilfsdreieck (Fig. 1. und Fig. 2. S. 406) bekannt, und man kann dann die geodätische Hauptaufgabe auflösen, wie wir in §. 81. S. 406 auseinandergesetzt haben.

Wir wollen nun die Integration der Grundgleichungen (1) und (2) durch Entwicklung nach dem *Maclaurin*schen Satze bewirken, d. h. zunächst bis zur dritten Potenz, durch Entwicklung der Reihen:

$$\sigma = \left.\frac{d\sigma}{ds}\right] s + \left.\frac{d^2\sigma}{ds^2}\right]\frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^3\sigma}{ds^3}\right]\frac{s^3}{6} \qquad [4]$$

$$\lambda = \left.\frac{d\lambda}{dl}\right] l + \left.\frac{d^2\lambda}{dl^2}\right]\frac{l^2}{2} + \left.\frac{d^3\lambda}{dl^3}\right]\frac{l^3}{6} \qquad (5)$$

Gehen wir zuerst näher auf (4) ein, so haben wir hiefür aus (1), weil a konstant $= c\sqrt{1-e^2}$ ist:

$$\sqrt{1-e^2}\,\sigma = \frac{1}{c}\left\{Vs + \left.\frac{dV}{ds}\right]\frac{s^2}{2} + \left.\frac{d^2V}{ds^2}\right]\frac{s^3}{6}\right\} \qquad (6)$$

Die hier nötigen Ableitungen machen wir in gleicher Form und Behandlung wie früher in § 78. die Ableitungen für φ, l und α. Auch zitieren wir von dort (5), (6), (7), (13), (14) § 78. S. 387—388:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c}\cos\alpha \quad , \quad \frac{dl}{ds} = \frac{V}{c}\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \quad , \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{V}{c}\sin\alpha\, t \qquad (7)$$

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2}{V}t \quad , \quad \frac{dV}{ds} = -\eta^2\frac{V^2}{c}\cos\alpha\, t \qquad (8)$$

Weiter wird abgeleitet:

$$\frac{d^2V}{ds^2} = -\eta^2\frac{V^3}{c^2}\left\{\cos^2\alpha\,(1-t^2+\eta^2-3\eta^2t^2) - \sin^2\alpha\, t^2\right\} \qquad (9)$$

Nun kann man bereits die Formel (6) zusammensetzen, und man bemerkt, dass dabei s mit V und c immer in derselben Kombination vorkommen, wie auch bei den früheren Reihen (vgl. (22) § 78. S. 389), wir setzen deshalb für analytisches Mass (ohne ϱ):

$$\frac{V}{c}s = S \qquad (10)$$

und damit geben (6), (8) und (9):

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = S - \frac{S^2}{2}\cos\alpha\,\eta^2 t - \frac{S^3}{6}\eta^2\left(\cos^2\alpha\,(1-t^2+\eta^2-3\eta^2t^2) - \sin^2\alpha\, t^2\right) \qquad (11)$$

In gleicher Weise haben wir auch die Längen-Formel zu bilden, nämlich zunächst (2) und (5):

$$\lambda = Vl + \left.\frac{dV}{dl}\right]\frac{l^2}{2} + \left.\frac{d^2V}{dl^2}\right]\frac{l^3}{6} \qquad (12)$$

Die hiezu nötigen Ableitungen sind:

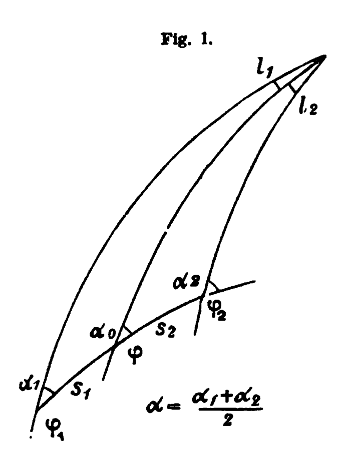
$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dl} \quad , \quad \frac{d\varphi}{dl} = V^2\cot g\,\alpha\cos\varphi \quad , \quad \frac{d\alpha}{dl} = \sin\varphi$$

$$\frac{dV}{dl} = -\eta^2 V\cot g\,\alpha\sin\varphi \quad \text{oder} \quad = -\eta^2 V\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\cos\alpha\, t \qquad (13)$$

$$\frac{d^2V}{dl^2} = -\eta^2 V\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\left\{\cos^2\alpha\,(1-3t^2+\eta^2-3\eta^2t^2) - \sin^2\alpha\, t^2\right\} \qquad (14)$$

Damit kann man (12) zusammensetzen:

$$\lambda = V\left\{l - \frac{l^2}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\eta^2\cos\alpha\, t - \frac{l^3}{6}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\eta^2(\cos^2\alpha(1-3t^2+\eta^2-3\eta^2t^2)-\sin^2\alpha\, t^2\right\} \quad (15)$$



Die Formeln (11) und (15) geben σ und λ als Funktion der Ausgangsbreite φ und des Ausgangsazimutes α der geodätischen Linie; wir wollen nun aber das Prinzip des mittleren Argumentes anwenden, welches bereits in § 79. sehr nützliche Dienste geleistet hat.

Wir nehmen zu diesem Zwecke die Bezeichnungen von nebenstehender Fig. 1. an, d. h. wir nehmen drei Punkte in gleichen Breiten-Abständen:

$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1 \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \quad (16)$$

Von der Mittelbreite φ geht eine geodätische Linie s_2 unter dem Azimut α_0 aus, und eine zweite geodätische Linie s_1 unter dem Azimut $\alpha_0 \pm 180°$. Den geodätischen Linien s_2 und s_1, deren Summe $s_2 + s_1 = s$ sei, entsprechen zwei Grössen S_2 und S_1 nach (10), mit der Summe $S_2 + S_1 = S$. Damit giebt die doppelte Anwendung der Formel (11):

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = S - \frac{S_2^2 - S_1^2}{2}\cos\alpha_0\,\eta^2 t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6}\eta^2(\cos^2\alpha_0(1-t^2+\eta^2-3\eta^2t^2)-\sin^2\alpha_0 t^2)$$

Hier ist von (4) § 79. S. 394 zu benützen:

$$S_2 - S_1 = \frac{S^2}{4}t\left(\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0} + 3\eta^2\cos\alpha_0\right)$$

Wenn man dieses in das vorstehende einsetzt, so darf man auch überall α statt α_0 schreiben, und damit bekommt man:

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = S - \frac{S^3}{24}\eta^2\left\{\sin^2\alpha\, 2t^2 + \cos^2\alpha\,(1 - t^2 + \eta^2 + 6\eta^2t^2)\right\} \quad (17)$$

Nun wenden wir auch die Gleichung (15) in zweifacher Weise auf Fig. 1. an, und erhalten mit $l_2 + l_1 = l$, $\lambda_2 + \lambda_1 = \lambda$:

$$\lambda = V\left\{l - \frac{l_2^2 - l_1^2}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha_0}\eta^2\cos\alpha_0\, t \right.$$
$$\left. - \frac{l_2^3 + l_1^3}{6}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha_0}\eta^2(\cos^2\alpha_0(1-3t^2+\eta^2-3\eta^2t^2) - \sin^2\alpha\, t^2\right\}$$

Hiezu hat man von (17) § 79. S. 396:

$$(l_2 - l_1)\cos\varphi = \frac{S^2}{4}\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}t + \frac{S^2}{4}\sin\alpha\cos\alpha\, t\,(2 + 3\eta^2)$$

Hier kann man setzen $S\sin\alpha = l\cos\varphi$, also:

$$(l_2 - l_1) = \frac{l^2}{4}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\varphi\, t + \frac{l^2}{4}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\varphi\, t\,(2 + 3\eta^2)$$

Dieses setzt man in die vorhergehende Formel für λ, wobei auch wieder α_0 und α vertauscht werden können; dadurch erhält man:

$$\lambda = V\left\{l - \frac{l^3}{24}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}\eta^2\left(\sin^2\alpha\, 2\,t^2 + \cos^2\alpha\,(1 + 3\,t^2 + \eta^2 + 6\,\eta^2 t^2)\right)\right\} \tag{18}$$

Die Gleichungen (17) und (18) enthalten bereits die Lösung unserer Aufgabe, wenn man S, α und l wenigstens näherungsweise als gegeben voraussetzt; indessen ist es bequemer, alles auf den Breiten-Unterschied b nnd den Längen-Unterschied l zu reduzieren. Hiezu hat man für die Korrektionsglieder:

$$S \sin\alpha = l\cos\varphi \quad , \quad S\cos\alpha = l\cos\varphi\,\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{V^2}$$

Dieses in (17) und (18) eingesetzt giebt:

$$\sigma = \frac{S}{\sqrt{1-e^2}}\left\{1 - \frac{\eta^2}{24}\left(\frac{b^2}{V^4}(1 - t^2 + \eta^2 + 6\,\eta^2 t^2) + 2\,l^2 \sin^2\varphi\right)\right\} \tag{19}$$

$$\lambda = V l\left\{1 - \frac{\eta^2}{24}\left(\frac{b^2}{V^4}(1 + 3\,t^2 + \eta^2 + 6\,\eta^2 t^2) + 2\,l^2\sin^2\varphi\right)\right\} \tag{20}$$

Wir wollen die Coëfficienten herausheben und folgende Gebrauchsformeln bilden (mit Berücksichtigung der nötigen ϱ):

$$\sigma = U s\left\{1 + (\sigma_1)\,b^2 + (\sigma_2)\,l^2\sin^2\varphi\right\} \tag{21}$$

$$\lambda = V l\left\{1 + (\lambda_1)\,b^2 + (\lambda_2)\,l^2\sin^2\varphi\right\} \tag{22}$$

Man kann diese Formeln auch in logarithmischer Form anwenden, z. B. wenn $\log\sigma$ gegeben und $\log s$ zu bestimmen ist, hat man durch Umkehrung von (21) in logarithmischer Form:

$$\log s = (\log\sigma - \log U) - \mu\,(\sigma_1)\,b^2 - \mu\,(\sigma_2)\,\lambda^2\sin^2\varphi \tag{23}$$

Dabei ist V die bisher immer mit V bezeichnete Funktion:

$$V = \sqrt{1 + e'^2\cos^2\varphi} \tag{23}$$

und

$$U = \frac{V}{c\sqrt{1-e^2}}\,\varrho \quad \text{oder} \quad = \frac{V}{a}\,\varrho$$

$$\log U = \log V + 8.509\,7816{\cdot}695 \tag{24}$$

Den Wert $\log V$ bzw. $\log V^2$ kann man aus der Hilfstafel Seite [2] — [23] unseres Anhangs 8stellig entnehmen. Da man aber bei sehr langen geodätischen Linien wohl in die Lage kommen kann, genauer zu rechnen, haben wir auf Seite [46] — [47] *) des Anhangs noch eine besondere 10stellige Tafel für $\log V$ beigegeben. Daraus wird man immer in genügender Schärfe $\log V$ entnehmen können, und nach (24) hat man dann auch $\log U$.

Für die Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) in (21) und (22) ergeben sich durch Vergleichung mit (19) und (20) folgende Bedeutungen:

---

*) Die Tafel Seite [46]—[47] des Anhangs ist nach (24) und (24a) S. 211 von 1° zu 1° 13stellig berechnet, nach dem Prinzip von (26) S. 212 auf 12 Stellen interpoliert und dann auf 10 Stellen abgerundet. Diese Tafel wurde nicht nur für die Zwecke des gegenwärtigen § 83. berechnet; dieselbe kann auch zu vielen anderen Berechnungen, die besonders genau sein sollen, dienen, denn es sind auch die [1] und [2] u. s. w. nach S. 213 sämtlich einfache Funktionen von V.

$$(\sigma_1) = + \frac{\eta^2}{24\,\varrho^2\,V^4}(t^2 - (1 + \eta^2 + 6\,\eta^2\,t^2)) \quad , \quad (\sigma_2) = - \frac{\eta^2}{12\,\varrho^2} \tag{25}$$

$$(\lambda_1) = - \frac{\eta^2}{24\,\varrho^2\,V^4}(3\,t^2 + 1 + \eta^2 + 6\,\eta^2\,t^2) \quad , \quad (\lambda_2) = - \frac{\eta^2}{12\,\varrho^2} \tag{26}$$

Dabei ist:

$$log \frac{1}{24\,\varrho^2} = 7.990\,9385 - 20 \quad , \quad log \frac{1}{12\,\varrho^2}\,8.291\,9685 - 20$$

Weiter-Entwicklung bis zur fünften Ordnung.

Man kann mit den bisher entwickelten Formeln bereits geodätische Linien von mehreren Grad Ausdehnung berechnen, wie aus der Vergleichung der nachfolgenden Zahlen-Beispiele mit den Ergebnissen von § 82. zu ersehen ist.

Das beste Mittel jedoch, zur Gewinnung eines Urteils über das bisher behandelte Verfahren und über die Möglichkeit seiner Erweiterung, hat man in der Weiter-Entwicklung um eine Stufe höher, d. h. bis zur fünften Ordnung.

Wir haben diese Entwicklung durchgeführt, und in der „Zeitschr. f. Verm., 1883", S. 72—76 die Haupt-Zwischenstufen angegeben; da es sich dabei um sehr lange, im Druck kaum wiederzugebende Formelhäufungen handelt, deren mathematischer Grundgedanke schon durch das Vorhergehende völlig klar gemacht ist, geben wir hier nur die *End*-Ergebnisse.

Die Formeln (21) und (22) werden so erweitert (vgl. (30) und (31)):

$$\sigma = U s \left\{ 1 + (\sigma_1)\,b^2 + (\sigma_2)\,l^2\,sin^2\,\varphi + (\sigma_3)\,b^4 + (\sigma_4)\,b^2\,l^2\,cos^2\,\varphi + (\sigma_5)\,l^4\,cos^4\,\varphi \right\} \tag{27}$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 + (\lambda_1)\,b^2 + (\lambda_2)\,l^2\,sin^2\,\varphi + (\lambda_3)\,b^4 + (\lambda_4)\,b^2\,l^2\,cos^2\,\varphi + (\lambda_5)\,l^4\,cos^4\,\varphi \right\} \tag{28}$$

Wenn man die Formeln (27) und (28) umgekehrt anwenden will, d. h. wenn man z. B. s aus σ berechnen will, so braucht man die Glieder $(\sigma_1)^2\,b^4$, $(\sigma_1)\,(\sigma_2)\,b^2\,l^2\,sin^2\,\varphi$ und $(\sigma_2)^2\,l^4\,sin^4\,\varphi$, welche bei der Reihenumkehrung zunächst auftreten, nicht zu berücksichtigen, weil die Coëfficienten (σ_1) und (σ_2) beide den Faktor η^2 haben, und Glieder von der Ordnung η^4 in den Coëfficienten (σ_3), (σ_4) und (σ_5) überhaupt vernachlässigt sind.

Also auch, wenn man logarithmisch rechnen will, kann man (27) kurz so umkehren:

$$\left. \begin{aligned} log\,s = (log\,\sigma - log\,U) - \mu\,(\sigma_1)\,b^2 - \mu\,(\sigma_2)\,l^2\,sin^2\,\varphi - \mu\,(\sigma_3)\,b^4 \\ - \mu\,(\sigma_4)\,b^2\,l^2\,cos^2\,\varphi - \mu\,(\sigma_5)\,l^4\,cos^4\,\varphi \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

In diesen Formeln (27), (28), (29) sind die Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_2) dieselben, wie schon bei (25) und (26) angegeben wurde; die übrigen haben, auf η^2 einschliesslich genau, folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_3) &= \frac{\eta^2}{480\,\varrho^4}(1 - t^2) &&= [3.88838]\,cos^2\,\varphi\,(1 - t^2) \\ (\sigma_4) &= \frac{\eta^2}{720\,\varrho^4}(-1 + 2\,t^2 + 15\,t^4) &&= [3.712\,229]\,cos^2\,\varphi\,(-1 + 2\,t^2 + 15\,t^4) \\ (\sigma_5) &= - \frac{\eta^2}{720\,\varrho^4}(9\,t^2 - 5\,t^4) &&= [3.712\,229]\,cos^2\,\varphi\,(9\,t^2 - 5\,t^4) \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda_3) &= -\frac{\eta^2}{1440\,\varrho^4}(1+15\,t^2 &&= [3.411\,256_n]\,cos^2\varphi\,(1+15\,t^2)\\
(\lambda_4) &= \frac{\eta^2}{720\,\varrho^4}(-1-10\,t^2+15\,t^4) &&= [3.712\,286]\,cos^2\varphi\,(-1-10\,t^2+15\,t^4)\\
(\lambda_5) &= \frac{\eta^2}{240\,\varrho^4}(-3\,t^2+t^4) &&= [4.189\,407]\,cos^2\varphi\,(-3\,t^2+t^4)
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Die eingeklammerten Zahlen sind hier Logarithmen, und angehängtes n bedeutet, dass die zugehörige Zahl negativ ist. Wie immer bedeutet $\eta^2 = e'^2 cos^2 \varphi$ und $t = tang\,\varphi$.

Eine Coëfficienten-Tabelle haben wir hiernach berechnet und auf Seite [44]—[45] des Anhangs mitgeteilt. Zu Weiterem können auch die Tabellen [34] und [35] des Anhangs benützt werden.

In den vorstehenden Formeln kommen verschiedene Konstanten vor, welche wir zum Gebrauch hier zusammenstellen:

$$\left.\begin{aligned}
log\frac{1}{12\,\varrho^2} &= 8.291\,9684{\cdot}9-20 & log\frac{e'^2}{12\,\varrho^2} &= 6.119\,2832{\cdot}7-20\\
log\frac{1}{24\,\varrho^2} &= 7.990\,9384{\cdot}9-20 & log\frac{e'^2}{24\,\varrho^2} &= 5.818\,2572{\cdot}8-20\\
log\frac{1}{240\,\varrho^4} &= 6.362\,0882-30 & log\frac{e'^2}{240\,\varrho^4} &= 4.189\,4070-30\\
log\frac{1}{480\,\varrho^4} &= 6.061\,0582-30 & log\frac{e'^2}{480\,\varrho^4} &= 3.888\,3770-30\\
log\frac{1}{720\,\varrho^4} &= 5.884\,9670-30 & log\frac{e'^2}{720\,\varrho^4} &= 3.712\,2858-30\\
log\frac{1}{1440\,\varrho^4} &= 5.583\,9370-30 & log\frac{e'^2}{1440\,\varrho^4} &= 3.411\,2558-30
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Um eine Übersicht zu gewinnen, wie viel die Glieder fünfter Ordnung in unseren Breiten etwa ausmachen, haben wir die folgenden zwei Übersichts-Tabellen berechnet.

I. Gesamtbetrag der 3 Glieder fünfter Ordnung in der Formel (27) für σ, berechnet mit $\varphi = 50°$.

$b =$	$l = 2°$	$l = 4°$	$l = 6°$	$l = 8°$	$l = 10°$
2°	+ 0,00000″	+ 0,00000″	+ 0,00001″	+ 0,00001″	+ 0,00001″
4°	+ 0,00000	+ 0,00002	+ 0,00005	+ 0,00010	+ 0,00016
6°	+ 0,00001	+ 0,00006	+ 0,00014	+ 0,00030	+ 0,00048
8°	+ 0,00001	+ 0,00012	+ 0,00031	+ 0,00061	+ 0,00103
10°	+ 0,00002	+ 0,00018	+ 0,00056	+ 0,00111	+ 0,00186

(33)

II. Gesamtbetrag der 3 Glieder fünfter Ordnung in der Formel (28) für λ, berechnet mit $\varphi = 50°$.

$b =$	$l = 2°$	$l = 4°$	$l = 6°$	$l = 8°$	$l = 10°$
2°	— 0,00000″	— 0,00000″	— 0,00001″	— 0,00003″	— 0,00012″
4°	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00004
6°	— 0,00004	— 0,00006	— 0,00006	— 0,00005	— 0,00005
8°	— 0,00011	— 0,00020	— 0,00025	— 0,00026	— 0,00022
10°	— 0,00028	— 0,00053	— 0,00070	— 0,00079	— 0,00078

(34)

Als erste Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir unser viertes Normal-Beispiel (4) § 77. S. 387 nehmen in dieser Weise:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Gegeben Berlin} & \varphi_1 = 52° \; 30' \; 16{,}7'' & \\ \text{Königsberg} & \varphi_2 = 54° \; 42' \; 50{,}6'' & l = 7° \; 6' \; 0''\end{array}\right\} \qquad (35)$$

Es soll die geodätische Linie s zwischen beiden Punkten, und beide Azimute α_1 und α_2 berechnet werden.

Man bildet zuerst das Mittel der gegebenen Breiten:

$$\varphi = 53° \; 36' \; 33{,}65'' \qquad (36)$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [44]—[47] des Anhangs ein, und entnimmt die Coëfficienten:

$$log\, V = 0.000\,5129.683 \qquad (37)$$

$log\,(\lambda_1)$	$log\,(\lambda_2)$	$log\,(\lambda_3)$	$log\,(\lambda_4)$	$log\,(\lambda_5)$
6.17908_n	5.66582_n	4.414_n	4.756	4.065_n

Damit rechnet man nach der Formel (28), mit $l = 7° \; 6' \; 0'' = 25560''$; das Hauptglied wird $25590{,}208\,116''$, dann die 5 Korrektionsglieder:

$$-0{,}024\,452'' \;,\; -0{,}050\,187'' \;,\; -0{,}000\,003'' \;,\; +0{,}000\,021'' \;,\; -0{,}000\,016''$$

$$\lambda = 25590{,}208\,116'' - 0{,}074637'' = 25590{,}133\,479''$$

$$\lambda = 7° \; 6' \; 30{,}133\,479'' \qquad (38)$$

Wir haben hier mit 6 Dezimalen der Sekunden gerechnet, um zu sehen, wie weit sich überhaupt die drei letzten Glieder bemerklich machen; da dieselben nur 0,00002″ ausmachen, könnte man dieselben ganz weglassen.

Nun nehmen wir die reduzierten Breiten zu (35) nebst λ von (38) zusammen:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Berlin} & \psi_1 = 52° \; 24' \; 43{,}01137'' & \\ \text{Königsberg} & \psi_2 = 54° \; 37' \; 24{,}75639'' & \lambda = 7° \; 6' \; 30{,}13348''\end{array}\right\} \qquad (39)$$

Das dadurch bestimmte sphärische Dreieck haben wir nach den *Gauss*schen Formeln (4), (5) S. 295 aufgelöst, wodurch gefunden wurde:

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha_1 = 59° \; 33' \; 0{,}6889'' & \alpha_2 = 65° \; 16' \; 9{,}3650'' \\ & \sigma = 4° \; 46' \; 1{,}41023'' = 17161{,}41023''\end{array}\right\} \qquad (40)$$

Um σ auf s zu reduzieren, braucht man wieder Coëfficienten, zuerst $log\, U$ nach der Formel (24) mit Benützung des schon bei (37) berechneten $log\, V$:

$$log\, U = 8.510\,2946{\cdot}378.$$

Aus der Hilfstafel Seite [44]—[45] entnimmt man mit dem Argument $\varphi = 53° \; 36' \; 33{,}65''$ von (36), die 5 Coëfficienten-Logarithmen für s:

$log\,(\sigma_1)$	$log\,(\sigma_2)$	$log\,(\sigma_3)$	$log\,(\sigma_4)$	$log\,(\sigma_5)$
5.27256	5.66582_n	3.360_n	4.987	2.839_n

Damit rechnen wir nach der Formel (29), und haben zunächst das Hauptglied 5.724 2583.351 und die 5 logarithmischen Korrektionsglieder:

$$-0{\cdot}5146 \qquad +8{\cdot}5179 \qquad +0{\cdot}0000 \qquad -0{\cdot}0061 \qquad +0{\cdot}0002$$

Dieses giebt im ganzen:

$$log\, s = 5{\cdot}724\,2583{\cdot}351 + 7{\cdot}997 = 5{\cdot}724\,2591{\cdot}348 \qquad s = 529\,979{,}578^m \qquad (41)$$

Diese Länge s und die beiden Azimute von (40) stellen die Lösung vor, welche mit den entsprechenden Werten (31) und (39) des vorigen § 82. S. 411—412 hinreichend stimmen.

Nach diesem wollen wir noch unser grosses Normal-Beispiel (2) § 77. S. 386 behandeln:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Gegeben} & \varphi_1 = 45^\circ\ 0'\ 0'' & \\ & \varphi_2 = 55^\circ\ 0'\ 0'' & l = 10^\circ\ 0'\ 0'' \\ \text{Mittel} & \varphi\ = 50^\circ\ 0'\ 0'' & \end{array}\right\} \tag{42}$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [44]—[47] ein, und entnimmt die Coëfficienten, die wir sogleich alle hier hersetzen wollen, obgleich man sie nicht sofort alle braucht:

$$log\ V = 0.000\ 6020{\cdot}131 \qquad log\ U = 8.510\ 3836{\cdot}826 \tag{43}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} log\,(\sigma_1) & log\,(\sigma_2) & log\,(\sigma_3) & log\,(\sigma_4) & log\,(\sigma_5) \\ 5.02731 & 5.73542_n & 3.128_n & 4.835 & 3.759_n \end{array}\right\} \tag{44}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} log\,(\lambda_1) & log\,(\lambda_2) & log\,(\lambda_3) & log\,(\lambda_4) & log\,(\lambda_5) \\ 6.155215_n & 5.73542_n & 4.376_n & 4.506 & 4.156_n \end{array}\right\} \tag{45}$$

Die Reduktion für λ nach der Formel (28) giebt das Hauptglied 36049,93731″ und die 5 Korrektionsglieder:

$$-0{,}667\,923'' \ ,\ -0{,}149\,088'' \ ,\ -0{,}001\,438'' \ ,\ +0{,}000\,802'' \ ,\ -0{,}000\,148''$$

Im ganzen:

$$\lambda = 36049{,}93731'' - 0{,}817795'' = 36049{,}11952'' \tag{46}$$

Die beiden reduzierten Breiten sind:

$$\psi_1 = 44^\circ\ 54'\ 14{,}67493'' \qquad \psi_2 = 54^\circ\ 54'\ 35{,}31462'' \tag{47}$$

Diese ψ_1 und ψ_2 nebst λ von (46) bestimmen ein sphärisches Dreieck, dessen Auflösung giebt:

$$\alpha_1 = 29^\circ\ 3'\ 15{,}45983'' \qquad \alpha_2 = 36^\circ\ 45'\ 7{,}40055'' \tag{48}$$
$$\sigma = 11^\circ\ 52'\ 41{,}20996'' = 42761{,}20996''$$

Zur Reduktion von σ auf s hat man die Formel (29) mit den Coëfficienten (44); das Hauptglied wird 6.120 6663·024 und die 5 Korrektionsglieder:

$$-5{\cdot}994 \ ,\ +17{\cdot}961 \ ,\ +0{\cdot}010 \ ,\ -0{\cdot}206 \ ,\ 0{\cdot}007$$

Im ganzen:

$$log\ s = 6.120\ 6663{\cdot}024 + 11{\cdot}778 = 6.120\ 6674{\cdot}802 \qquad s = 1\,320\,284{,}365^{m} \tag{49}$$

Die Werte (48) und (49) stellen die Lösung der Aufgabe vor, welche mit (40), (41), (45) des vorigen § 82. S. 413 verglichen, genügend stimmen.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 81—82 haben wir eine Coëfficienten-Tabelle für die Formeln (27) und (28) gegeben, welche nicht dieselbe ist wie die neu berechnete Tabelle Seite [44]—[45] unseres Anhangs. Nur die Coëfficienten (σ_1), (σ_3), (λ_1), (λ_3) sind mit den früheren [1], [3], (1), (3) identisch, abgesehen von einer kleinen Differenz in den letzten Stellen von $log\,(\sigma_1)$ und $log\,(\lambda_1)$ daher rührend, dass früher $\frac{1}{V^4} = 1 - 2\,\eta^2$ gesetzt war, was Vernachlässigung von η^4 enthält, welche in den neuen Coëfficienten (σ_1), (σ_2), (λ_1), (λ_3) nicht mehr vorkommt. Ausserdem besteht der Unterschied, dass Funktionen $sin^2\varphi$, $cos^2\varphi$, $cos^4\varphi$, welche früher in die Coëfficienten gezogen waren, nun in der Formel bleiben, damit die Coëfficienten-Tafel kleinere Differenzen bekommt. Nur der in η^2 enthaltene Faktor $cos^2\varphi$ ist in die Coëfficienten gezogen, weil der Modul $\eta^2 = e'^2 cos^2\varphi$ sich analytisch gut findet, und auch formell den Faktoren l^2 gegenüber in den Coëfficienten zum Gleichgewicht beiträgt.

§ 84. Vergleichung verschiedener Auflösungen der geodätischen Hauptaufgabe.

Die Theorien und Berechnungs-Methoden, welche wir in den vorstehenden §§ 78.—83. kennen gelernt haben, lassen sich in mehrfacher Beziehung vergleichen.

Wir unterscheiden zuerst *kurze* Entfernungen und *lange* Entfernungen, und verstehen unter den ersteren namentlich einzelne Dreiecksseiten, oder aus wenigen Dreiecksseiten abgeleitete Diagonalen etwa bis zu 200^{km} Entfernung; und unter *langen* Entfernungen verstehen wir geodätische Linien, welche als Repräsentanten ganzer Dreiecks-*Ketten* berechnet, nach der Übersichtskarte von S. 193 im allgemeinen 200—300^{km} lang sind, jedoch auch erheblich darüber hinaus gehen können (vgl. S. 387, Berlin-Königsberg = 530^{km}).

Für kurze Entfernungen in diesem Sinne sind die Methoden von § 78. und § 79. geeignet, namentlich die Mittelbreiten-Methode von § 79. Wollte man kurze Linien bis zu 100^{km} oder höchstens 200^{km} nach den für längere Entfernungen bestimmten Methoden von § 82. oder § 83. behandeln, so würde man allein in der sphärischen Hilfs-Rechnung ebensoviel, oder bei den geschlossenen sphärischen Formeln mehr Arbeit aufzuwenden haben, als das ganze Verfahren von § 79. überhaupt beansprucht, indem dasselbe sich von rein sphärischer Rechnung durch nichts unterscheidet, als durch das Aufschlagen der Coëfficienten aus der Hilfstafel Seite [38] — [39] des Anhangs.

Wenn die Entfernungen über 200^{km} hinausgehen, so wird bei dem genannten Verfahren die Genauigkeit von 0·1 in den Logarithmen und 0,001″ in den Winkeln nicht mehr möglich, und etwa der Versuch, durch Entwicklung auf noch höhere Potenzen jenes Verfahren auszudehnen, würde nur ganz unhandliche Formeln erzielen, wie aus unseren zunächst nur sphärisch behandelten Entwicklungen bis σ^5 zu schliessen ist, deren Zusammenfassung in den Tabellen von S. 312 auch für sphäroidische Aufgaben die richtigen Fingerzeige giebt.

Für grössere Entfernungen von 200^{km} bis zu 1000^{km} oder 2000^{km}, d. h. für alle praktisch vorkommenden Fälle, haben wir von unseren bisher behandelten Lösungen nur zwei zur Auswahl, nämlich § 82. nach dem *Bessel*schen Prinzipe, mit den sphärischen Hilfswinkeln m und M, und § 83. unsere neue Methode mit dem Haupt-Reduktionsfaktor V. Bei diesen beiden Systemen ist alles Sphäroidische von dem Sphärischen vollständig *getrennt*. Es tritt eine rein *sphärische* Auflösung, von derselben Form wie die Gesamt-Aufgabe, als Hilfs-Berechnung auf, wobei die *geschlossenen* Formeln der sphärischen Trigonometrie § 55. S. 293 — 300 anzuwenden sind; denn wenn hier Reihen-Entwicklungen von Vorteil sein könnten, so müsste auch noch Gesamt-Entwicklung sphärischer *und* sphäroidischer Glieder, d. h. § 78.—79. (wie für kleine Entfernungen) anwendbar sein.

Vergleichen wir nun § 82. und § 83. unter sich, so erscheint das *Bessel*sche Prinzip von § 82. deswegen sehr schwerfällig, weil die beiden sphärischen Hilfswinkel m und M, welche man zu den beiden sphäroidischen Reduktionen braucht, bereits die Auflösung eines sphärischen Dreiecks voraussetzen, dessen Elemente man bei der indirekten Anwendung noch nicht hat; während unsere neue Methode von § 83. fast nur die leicht verfügbare Mittelbreite als Argument zum Eingehen in die übersichtlichen und wenig umfänglichen Hilfstafeln braucht.

Für *Landes-Vermessungszwecke* steht die Aufgabe im Vordergrund, bei gegebener Breite und Länge eines Punktes, und bei gegebenem Azimut und gegebener Entfernung, die Breite, Länge und das Azimut für den jenseitigen Punkt zu berechnen; und hiezu sind allerdings die Mittelbreiten-Formeln von § 79. weniger geeignet, weil sie zu solchem Zwecke nur *mittelbar* dienen; doch ist das nur ein scheinbares Hindernis,

wie wir nachher noch darlegen wollen. Für Landes-Vermessungszwecke ist auch daran zu erinnern, dass man die geographischen Coordinaten aller Punkte II. und III. Ordnung, wenn man solche überhaupt braucht, bequemer auf dem Umwege über die ohnehin nötigen rechtwinkligen Coordinaten in den einzelnen Geltungsbereichen (nach S. 334) berechnen kann.

Für die Zwecke der *wissenschaftlichen Erdmessung* kommt die geodätische Hauptaufgabe, bei der Berechnung von Lotablenkungen hauptsächlich in der direkten Form vor, nämlich Berechnung der Entfernung und der Azimute zwischen zweien durch Längen und Breiten gegebenen Punkten, und hiezu ist kaum ein besseres Verfahren denkbar als die unmittelbare Anwendung der Formeln von § 79. S. 398, oder bei grösserer Ausdehnung, der Formeln von § 83. S. 417 und 418.

Aber auch zur *indirekten* Anwendung sind die Formeln von § 79. und von § 83. vorzüglich geeignet. Man braucht in diesem Falle vorläufige Näherungswerte des Breitenunterschieds b und des Längenunterschieds l, die jedoch bei der sehr raschen Konvergenz der Reihen nicht schwer zu erlangen sein werden.

Überhaupt braucht für die Vorteile, welche *Mittel*-Argumentformeln auch bei indirekter Anwendung gewähren, nur an das' erinnert zu werden, was *Gauss* in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie", zweite Abhandlung, Art. 20. gesagt hat, wie wir schon bei den sphärischen Mittelbreiten-Formeln in § 57. S. 309 zitiert haben.

Wenn, wie in unseren Formeln, nicht Entfernungen und Azimute, sondern Breiten- und Längenunterschiede als erste Näherungen gebraucht werden, so sind diese Elemente in allen Fällen der Praxis *ohnehin* aus anderen Gründen näherungsweise verfügbar zu halten. Feine geodätische Berechnungen beziehen sich nur auf Punkte, deren geographische Coordinaten man schon vor Beginn der Rechnung auf wenige Sekunden genau kennt

Dieses gilt namentlich für die indirekte Anwendung der Formeln von § 83.

Im Anschluss hieran haben wir als Hilfsmittel zu Berechnungen mit kurzen Entfernungen zitieren:

„Rechnungs-Vorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Koordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878." Im Selbstverlage. Zu beziehen durch die Königl. Hof-Buchhandlung von *E. S. Mittler & Sohn*, Kochstrasse 69. 70. Mit Hilfstafeln für 8 stellige Logarithmen, desgleichen zweite Ordnung 7 stellig und dritte Ordnung 6 stellig.

Diese amtliche Veröffentlichung enthält nur Zahlen-Tabellen und Gebrauchs-Formeln aber keine Entwicklungen, dagegen ist nach Mitteilungen von amtlicher Seite das wichtigste der Entwicklungen mitgeteilt in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen, 1882", I. S. 113—121. Hiernach ist die Theorie, welche diesen Formeln zu Grunde liegt, eine sphäroidische Analogie zu den sphärischen Formeln, welche *Gauss* als „Vierte Methode" in Art. 16. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" gegeben hat (vgl. unseren § 55. mit Fig. 3. S. 299—301). Diese sinnreiche sphäroidische Analogie stützt sich auf die *Gauss*schen Entwicklungen der „Disquisitiones generales circa superficies curvas", mit welchen wir uns erst in unserem späteren Kap. X. beschäftigen werden.

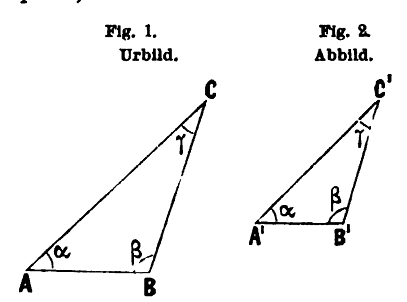
Bei der Vermessung des Staates New-York werden zur Berechnung der geographischen Coordinaten direkte Reihen-Entwicklungen nach Potenzen der geodätischen Linie (vgl § 78.) angewendet. Vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1890", S. 177—179.

Kapitel IX.

Konforme Abbildung des Ellipsoids.

§ 85. Konforme Abbildung im allgemeinen.

Unter „*konformer*" Abbildung versteht man (nach der Bedeutung, welche *Gauss* diesem Worte gegeben hat) eine solche geometrische Beziehung zwischen zwei Flächen, dass jedem Punkte der einen Fläche ein bestimmter Punkt der anderen Fläche entspricht, und dass das Abbild dem Urbild in den kleinsten Teilen *ähnlich* ist.



Die letztere Bedingung ist durch nebenstehende Fig. 1. und Fig. 2. deutlicher gemacht in diesem Sinne:

Es seien A, B, C drei unter sich sehr nahe liegende Punkte einer gegebenen Fläche (Urbild) und A' B' C' die entsprechenden Punkte einer anderen Fläche (Abbild); die Abbildung soll nach einem solchen Gesetze erfolgen, dass das kleine Dreieck $A'B'C'$ dem entsprechenden kleinen Dreieck ABC *ähnlich* wird, dass also die Winkel α, β, γ beider Dreiecke einander gleich sind und dass zwischen den Seiten ein konstantes Verhältnis besteht:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = m \tag{1}$$

Einen besonderen Fall dieses allgemeinen Abbildungsgesetzes haben wir bereits in § 51.—52. kennen gelernt, nämlich die konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene. (Das Vergrösserungsverhältnis v' in (2) S. 285 und (4) S. 286 hat dieselbe Bedeutung wie m in der vorstehenden Gleichung (1).)

Andere Anwendungen des allgemeinen Grundsatzes der konformen Abbildung auf geodätische Verhältnisse sind: die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene (vgl. S. 287), dann die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel (d. h. der Haupt-Inhalt unseres gegenwärtigen Kapitels) und die konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene in verschiedenen Formen, deren eine, der Merkator-Projektion entsprechend, wir in dem nachfolgenden § 92. behandeln werden.

Gauss hat die allgemeine mathematische Theorie der konformen Abbildung und deren geodätische Anwendung begründet in folgenden Schriften:

„Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird, von *C. F. Gauss.* Als Beantwortung der von der königlichen Sozietät der Wissenschaften in Kopenhagen für 1822 aufgegebenen Preisaufgabe". Veröffentlicht in Schumachers „Astronomischen Abhandlungen, Heft 3, Altona 1825".

Ferner „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von *Carl Friedrich Gauss*", erste Abhandlung, der Königl. Sozietät überreicht 1843, Okt 23., desgl. zweite Abhandlung, der Königl. Sozietät überreicht 1846, Sept. 1. In der Gesamt-Ausgabe „*Carl Friedrich Gauss* Werke" sind diese Abhandlungen aufgenommen in Band IV, Göttingen 1873, S. 189—216, 259—340.

Hiezu ist auch die schon auf S. 287 erwähnte Abhandlung von Hauptmann *Schreiber* zu zählen, welche über die von *Gauss* für die Hannoversche Landesvermessung bearbeitete konforme Abbildung des Ellipsoids auf eine Ebene Auskunft giebt.

Die Theorie der konformen Abbildung für geodätische Zwecke hat in jüngster Zeit erhöhte Bedeutung erlangt, indem die trigonometrische Abteilung der preussischen Landesaufnahme diese Theorie in umfassender Weise praktisch verwertet hat, wie aus einer amtlichen Mitteilung von General *Schreiber* in den „Verhandlungen der 1887 er Konferenz der perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888, Annex X[b], S. 10—11 zu ersehen ist.

Wir behandeln in unserem nachfolgenden Kapitel die Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel nach den zitierten klassischen *Gauss*schen Original-Schriften, jedoch mit Weglassung der „Allgemeinen Auflösung der Aufgabe", welche in unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878. S. 377—379, mit aufgenommen war. Diese „Allgemeine Auflösung" ist für die Mathematik (Funktionen komplexer Veränderlicher) von Wert, aber für die vorliegende geodätische Anwendung überflüssig.

Wir haben in unserer Bearbeitung die Bezeichnungen von *Gauss* so gut es ging beibehalten, jedenfalls die Konstanten P, Q, α, m u. s. w., während im übrigen unser auch sonst gebrauchtes $V^2 = 1 + \eta^2$ sich nützlich erwiesen hat, namentlich an Stelle der ungemein sinnreichen, aber beim ersten Lesen von der Hauptsache ablenkenden goniometrischen Hilfsgrössen von Art. 4., die wir deshalb in unserem § 87. in den Anhang verwiesen haben.

Weggelassen haben wir alle Entwicklungen über die dritte Ordnung, unter Verweisung auf das Original-Werk.

Ändern mussten wir notwendig den Art. 13., welcher über Azimut-Reduktion handelt, weil hiebei *Gauss* die geodätische Linie als *kürzeste* Linie nach der Theorie der Variations-Rechnung einführt, die in unseren Gang (Geodätische Linie S. 367—376) nicht passt, weshalb wir eine andere Entwicklung § 90. an Stelle von Art. 13. gesetzt haben.

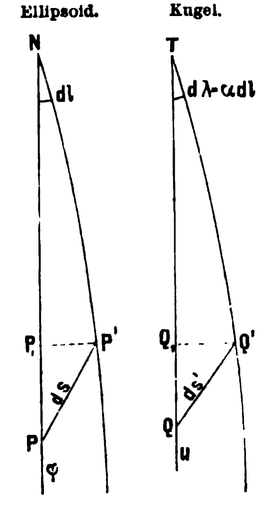
Man kann in diesem Sinne wohl noch weiter gehen durch kombinierte Anwendung der Formeln von § 79. auf das geodätische Dreieck φ, φ', l und der Formeln von § 57. auf das Abbild-Dreieck u, u', $\alpha\, l$.

Eine Vervollständigung der *Gauss*schen Theorie in Hinsicht auf die Azimut-Reduktion nach dem zitierten Art. 13. ist von amtlicher Seite in Aussicht gestellt in den „Verhandlungen der 1887er Konferenz in Nizza der perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888, Annex X[b], S. 10.

§ 86. Konforme Abbildung des Umdrehungs-Ellipsoids auf eine Kugel.

In Fig. 1. bezeichnet ds das Differential einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid und in Fig. 2. ist ds' das Differential eines entsprechenden Grosskreisbogens auf einer Kugel vom Halbmesser A. Im übrigen gelten folgende Bezeichnungen und daraus folgende Beziehungen:

	Ellipsoid	Kugel	
Punkt	P	Q	
Breite	φ	u	(1)
Längen-Unterschied	dl	$d\lambda = \alpha\, dl$	(2)



Hiebei ist α eine vorläufig eingeführte Konstante, deren Wert sich nachher ergeben wird. Weiter haben wir einander entsprechend:

Parallelbogen $P_1P' = N\cos\varphi\, dl \quad Q_1Q' = A\cos u\, \alpha\, dl$ (3)

Meridianbogen $PP_1 = M\, d\varphi \quad QQ_1 = A\, du$ (4)

Dabei sind M und N wie gewöhnlich die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids.

Wenn nun QQ_1Q' konforme Abbildung von PP_1P' sein soll, so müssen die Seiten der beiden Dreiecke ein konstantes Verhältnis haben, welches mit m bezeichnet sei, also:

$$\frac{A\, du}{M\, d\varphi} = \frac{\alpha\, A\cos u}{N\cos\varphi} = m \tag{5}$$

Hieraus erhält man als Beziehung zwischen der sphärischen Breite u und der sphäroidischen Breite φ die Differentialgleichung:

$$\frac{du}{d\varphi} = \alpha \frac{M}{N} \frac{\cos u}{\cos \varphi}$$

Das Krümmungs-Verhältnis $M:N$ wird nach (18) § 33. S. 210 eingeführt, wodurch man erhält:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{\alpha}{V^2} \frac{\cos u}{\cos \varphi} \tag{6}$$

oder in anderer Form, mit W^2 statt V^2 nach (19) § 33. S. 210:

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\alpha (1-e^2)}{W^2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{\alpha (1-e^2)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \tag{7}$$

Zur Integration zerlegen wir in Teilbrüche:

$$\frac{1-e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi}$$

Damit giebt die Integration von (7):

$$\log \tang \left(45° + \frac{u}{2}\right) = \alpha \left\{ \log \tang \left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2} e \log (1 + e \sin \varphi) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} e \log (1 - e \sin \varphi) \right\} - \log \frac{1}{k}$$

Dabei ist $-\log \frac{1}{k}$ als Integrations-Konstante zugesetzt; die vorstehende Gleichung lässt sich damit auch so schreiben:

$$\tang \left(45° + \frac{u}{2}\right) = \frac{1}{k} \tang^\alpha \left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \tag{8}$$

Wenn diese Beziehung zwischen u und φ erfüllt ist, so wird m aus beiden Formeln (5) übereinstimmend erhalten, und zwar nach der zweiten Form von (5), mit Einsetzung von N nach (17) S. 210:

$$m = \alpha \frac{A}{a} \frac{\cos u}{\cos \varphi} W \tag{9}$$

oder auch mit V statt W und c statt a:

$$m = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} V \tag{10}$$

Die Beziehung zwischen den geographischen Längen l und λ ergiebt sich, da α konstant ist, nach (2) sofort:

$$\lambda = \alpha l \tag{11}$$

Die Gleichungen (8), (10) und (11) enthalten bereits die Lösung der gestellten Aufgabe im Grundzuge, und wir wollen im Anschluss an die umstehenden Fig. 3. und Fig. 4. die bis jetzt gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen:

Fig. 3. stellt ein geodätisches Polar-Dreieck auf dem Ellipsoid vor, mit den Breiten φ und φ' und dem Längenunterschiede l; die geodätische Linie, welche die beiden Punkte mit den Breiten φ und φ' verbindet, hat die lineare Grösse s und die beiden Azimute α und α'.

Fig. 4. ist das konforme sphärische Abbild von Fig. 3.; den Breiten φ und φ' entsprechen die sphärischen Breiten u und u' nach der Gleichung (8), der sphärische

Fig. 3.
Ellipsoid.

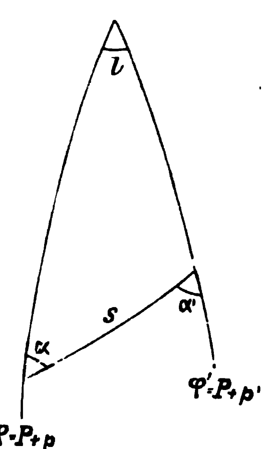
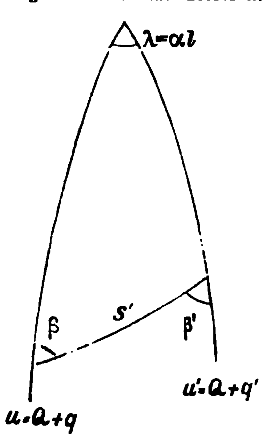


Fig. 4.
Kugel mit dem Halbmesser A.



Längenunterschied $\lambda = \alpha\, l$ wird aus dem Längenunterschied l des Ellipsoids erhalten durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor α; und der Grosskreisbogen s' steht zu der geodätischen Linie s in Beziehung durch das Vergrösserungs-Verhältnis m, indem $s' = \int m\, ds$ sein muss.

Die Azimute β und β' auf der Kugel sind *nicht* genau gleich den Azimuten α und α' auf dem Ellipsoid, jedoch werden bei den nachfolgenden Anwendungen die β und α wenigstens nahezu einander gleich sein.

Durch die Breiten-Bezeichnungen $\varphi = P + p$ und $u = Q + q$ ist angedeutet, dass P eine gewisse Normalbreite auf dem Ellipsoid und Q die entsprechende Normalbreite auf der Kugel ist, sowie dass p und q Breiten-Differenzen sind.

§ 87. Wahl der Konstanten.

Die Grundgleichungen (8), (10) und (11), welche am Schluss des vorigen § 86. gefunden wurden, enthalten drei willkürliche Konstanten, nämlich α, k und den Kugelhalbmesser A.

Man hat nun in seiner Gewalt, durch zweckmässige Bestimmung dieser Konstanten a, k und A zu bewirken, dass für ein bestimmtes Gebiet die Abweichung des Vergrösserungs-Verhältnisses m von dem Wert 1 möglichst klein wird.

Zu diesem Zwecke nehmen wir einen etwa der Mitte des Gebietes zugehörigen Wert P der Breite φ an, welchem auch ein gewisser Wert Q der Breite u auf der Kugel entsprechen wird.

Indem wir zugleich auch die Bezeichnungen p und q für Breiten-*Differenzen* auf dem Ellipsoid und auf der Kugel einführen, haben wir, wie auch schon in Fig. 3. und Fig. 4. des vorigen § 87. (s. oben) eingeschrieben ist, die zusammengehörenden Bezeichnungen:

$$\text{Ellipsoid-Breite} \quad \varphi = P + p \tag{1}$$
$$\text{Kugel-Breite} \quad u = Q + q \tag{2}$$

In der Normalbreite P, bzw. Q soll das Vergrösserungs-Verhältnis $m = 1$, also $\log m = 0$ sein, und für irgend welche andere Breite soll $\log m$ bestimmt sein durch eine Reihe, deren erste Glieder die Ableitungen $\frac{d \log m}{d u}$ und $\frac{d^2 \log m}{d u^2}$ sein werden.

Wir können nun über die drei Konstanten α, k und A so verfügen, dass auch diese beiden ersten Ableitungen für die Normalbreite verschwinden, wir haben also für die drei Konstanten α, k und A folgende drei Bedingungen:

$$\text{für } u = Q \text{ soll sein: } 1)\ m = 1 \text{ oder } \log m = 0 \tag{3}$$

$$2)\ \frac{d \log m}{d u} = 0 \tag{4}$$

$$3)\ \frac{d^2 \log m}{d u^2} = 0 \tag{5}$$

Hiernach haben wir uns zuerst mit den beiden ersten Ableitungen von $\log m$ zu beschäftigen, und nehmen zuerst von (10) und (6) § 86. S. 426 die zwei Gleichungen:

$$m = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} V \qquad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{6}$$

und

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \tag{7}$$

durch Ableitung von V erhält man:

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{e'^2}{V} \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{\eta^2}{V} \operatorname{tang} \varphi \qquad (\text{wo } \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi) \tag{8}$$

Nun giebt (6):

$$\log m = \log \frac{A\alpha}{c} + \log \cos u - \log \cos \varphi + \log V$$

$$\frac{d \log m}{d u} = -\operatorname{tang} u + \operatorname{tang} \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} - \frac{\eta^2}{V^2} \operatorname{tang} \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u}$$

$$\frac{d \log m}{d u} = -\operatorname{tang} u + \frac{\sin \varphi}{\alpha \cos u} \tag{9}$$

$$\frac{d^2 \log m}{d u^2} = -\frac{1}{\cos^2 u} + \frac{1}{\alpha \cos^2 u}\left(\cos \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} + \sin \varphi \sin u\right)$$

$$\frac{d^2 \log m}{d u^2} = \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 u}(-\alpha^2 + V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u) \tag{10}$$

Um nun die Bedingungen (3), (4) und (5) einzuführen, hat man in (6), (9) und (10) zu setzen: $\varphi = P$ und $u = Q$. Dieses giebt:

aus (6):
$$1 = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos Q}{\cos P} V \qquad (\text{wo } V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P) \tag{11}$$

aus (9):
$$0 = -\operatorname{tang} Q + \frac{\sin P}{\alpha \cos Q} \tag{12}$$

aus (10):
$$0 = -\alpha^2 + V^2 \cos^2 P + \alpha \sin P \sin Q \tag{13}$$

Nun giebt sofort (12):

$$\alpha \sin Q = \sin P \tag{14}$$

Dieses in (13) gesetzt giebt, mit Rücksicht auf V^2 in (11):

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 P \tag{15}$$

(14) giebt auch $\alpha^2 \cos^2 Q = \alpha^2 - \sin^2 P$ und dieses nebst (15) in (11) gesetzt, giebt:

$$A = \frac{c}{V^2} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 P} \tag{16}$$

Dieses ist, nach (22) § 33. S. 211, der *mittlere* Krümmungshalbmesser in der Breite P.

Aus (14) und (15) findet man auch:

$$\alpha^2 \cos^2 Q = (1 + e'^2 \cos^4 P) - (\sin^2 P) = \cos^2 P + e'^2 \cos^4 P$$
$$= \cos^2 P (1 + e'^2 \cos^2 P)$$
$$\alpha \cos Q = \cos P V \tag{17}$$

Aus (15) und (16) haben wir also die Konstanten α und A, und durch (14) wird auch die dritte Konstante k bestimmt, insofern dadurch P und Q miteinander verbunden sind; setzt man nun in (8) § 86. S. 426 $\varphi = P$ und $u = Q$, d. h. wendet man jene Gleichung auf die Normalbreite an, so erhält man:

$$k = \frac{\tang^\alpha \left(45° + \frac{P}{2}\right)}{\tang \left(45° + \frac{Q}{2}\right)} \left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \tag{18}$$

Es bietet sich nun folgender Gang der Rechnung dar: Man nimmt eine Normalbreite P auf dem Ellipsoid willkürlich an, berechnet damit den mittleren Krümmungshalbmesser A nach (16), dann α nach (15), Q nach (14) und endlich k nach (18); dann kann man für jede Ellipsoidbreite φ die zugehörige Kugelbreite u und auch das zugehörige Vergrösserungsverhältnis m nach (8) und (9) § 86. S. 426 berechnen.

Statt dessen kann man aber auch so verfahren, dass nicht eine Normalbreite P auf dem *Ellipsoid*, sondern eine Normalbreite Q auf der *Kugel* als willkürlich (runde Zahl) angenommen wird. In diesem Falle, der nicht wesentlich verschieden von dem ersten Falle ist, kann man aber nicht geradezu nach den Formeln (14) und (15) rechnen, sondern man muss aus (14) und (15) die Breite P eliminieren, um α^2 in Q auszudrücken. Wenn man hiezu aus (14) nimmt:

$$\cos^4 P = (1 - \alpha^2 \sin^2 Q)^2 = 1 - 2\,\alpha^2 \sin^2 Q + \alpha^4 \sin^4 Q$$

und wenn man dieses in (15) einsetzt, so wird man auf eine Gleichung geführt, welche α^2 und α^4 enthält, und nach α^2 aufgelöst dieses giebt:

$$\alpha^2 = \frac{1 + 2\,e'^2 \sin^2 Q - \sqrt{1 + 4\,e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q}}{2\,e'^2 \sin 4\,Q} \tag{19}$$

Diese Gleichung (19) nebst (14) gestattet dann die Weiterrechnung in der früheren Weise.

Da aber die Formel (19) zur unmittelbaren Ausrechnung sehr wenig geeignet ist, d. h. unmittelbar angewendet keine scharfe Berechnung geben kann, empfiehlt es sich, sie in eine Reihe zu entwickeln (in einfachster Weise nach (11) § 30. S. 197), deren drei erste Glieder sind:

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 Q - 2\,e'^4 \sin^2 Q \cos^6 Q + 5\,e'^6 \sin^4 Q \cos^8 Q \tag{20}$$

Damit ist alles zur Anwendung vorbereitet.

Gauss hat einen *sphärischen* Normalwert Q zu Grunde gelegt, nämlich:

$$\text{Kugel} \quad Q = 52°\ 40'\ 0'' \tag{21}$$

Ausserdem werden von *Gauss* als *Bessel*sche Erddimensionen angenommen:

$$log\, a = 6.514\,8235{\cdot}337 \text{ für Toisen}$$

und $$log\, a = 6.804\,6434{\cdot}637 \text{ für Meter} \quad (22)$$

$$log\, \sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458{\cdot}202 \quad (23)$$

$$log\, e = 8.912\,2052.079 \qquad log\, e^2 = 7.824\,4104{\cdot}158 \quad (24)$$

Die Werte (23) und (24) sind dieselben wie die von uns auf S. 207 angegebenen, während $log\, e^2$ nach (24) in den letzten Stellen von der Angabe auf S. 207 abweicht. Dieses rührt von den Unsicherheiten her, welche früher überhaupt in Bezug auf die letzten Stellen der *Bessel*schen Erddimensionen bestanden haben (vgl. S. 207 oben und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 24).

Soweit wir im folgenden eigene Berechnungen angeben, haben wir die Zahlen von S. 207 beibehalten, nämlich:

$$log\, a = 6.804\,6434{\cdot}637 \text{ für Meter} \quad (25)$$

$$log\, c = 6.806\,0976{\cdot}435 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (26)$$

$$log\, e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237 \quad , \quad log\, e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833 \quad (27)$$

$$log\,(1-e^2) = log\, \frac{1}{1+e'^2} = 9.997\,0916{\cdot}404 \quad (28)$$

Damit wollen wir die übrigen Konstanten nach den vorstehenden Formeln ausrechnen. Als willkürliche Annahme wird zu Grunde gelegt:

$$\text{Normal-Kugelbreite} \quad Q = 52°\ 40'\ 0'' \quad (29)$$

Damit berechnet man α^2 nach der Reihe (20):

$$\alpha^2 = \left\{ \begin{array}{r} 1{,}000\,908\,8703 \\ -\,2\,8399 \\ +\quad 111 \end{array} \right\} \ , \quad \alpha^2 = 1{,}000\,906\,0415$$

$$log\, \alpha = 0.000\,1966{\cdot}553 \quad (30)$$

$$\alpha = 1 + 0{,}000\,452\,918 \qquad \frac{1}{\alpha} = 1 - 0{,}000\,452\,713 \quad (31)$$

Es folgt die Berechnung von P nach (14); man findet:

$$P = 52°\ 42'\ 2{,}53251'' \quad (32)$$

$$log\, sin\, P = 9.900\,6297{\cdot}679 \quad , \quad log\, cos\, P = 9.782\,4573{\cdot}113$$

Mit $cos\, P$ hat man auch:

$$log\, e'^2\, cos^2 P = log\, \eta^2 = 7.392\,2334{\cdot}059 \quad (33)$$

und damit kann man geradezu $V^2 = 1 + \eta^2$ berechnen:

$$log\, V^2 = 0.001\,0702{\cdot}432 \quad , \quad log\, V = 0.000\,5351{\cdot}216 \quad (34)$$

Zur Probe kann man auch $log\, V^2$ nach der Formel (24) S. 211 berechnen, oder $log\, V$ durch Interpolation aus der Hilfstafel Seite [47] des Anhangs bestimmen; beides giebt dasselbe Ergebnis wie (34).

Ehe man weiter geht, kann man auch die Probe nach (17), $\alpha\, cos\, Q = V cos\, P$ anstellen, welche mit einem Fehler von 0·001 schliesst, der nicht weiter zu verfolgen ist.

Mit $log\, V^2$ nach (34) hat man auch nach (16) den Kugelhalbmesser A, die Ausrechnung mit (26) und (34) giebt:

$$log\, A = 6.805\,0274{\cdot}003 \quad (35)$$

Endlich ist auch noch k nach (18) zu berechnen, man hat hiezu $e\, sin\, P$ $= 0{,}064\,988\,270\,546$ und weiter:

$\log\left(\frac{1-e\sin P}{1+e\sin P}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}$	9.997 6898·845
$\log tang^{\alpha}\left(45°+\frac{P}{2}\right)$	0.471 9371·356
$\log cotg\left(45°+\frac{Q}{2}\right)$	9.528 7020·994
$\log k$	9.998 3291·195
$\log\frac{1}{k}$	0.001 6708·805
Gauss giebt $\log\frac{1}{k}$	0.001 6708·804 (36)

Hier haben wir die unerhebliche Differenz 0·001 gegen die Angabe von *Gauss* in Art. 6 der „Unt. üb. G. d. h. G.“, während die anderen Konstanten P, $\log\alpha$, $\log A$ nach (32), (30), (35) bis auf die letzte Dezimale mit den Angaben von *Gauss* stimmen.

Dieses ist eine erwünschte Versicherung, dass die Verschiedenheit der Werte $\log e^2$ in (24) und (27) sich in den Konstanten P, α, A und k bei Rechnung mit 10stelligen Logarithmen nicht mehr bemerklich macht; während in den späteren Coëfficienten-Berechnungen, wenn der Faktor η^2 auftritt, die kleine Verschiedenheit in den Annahmen von e^2 bzw. e'^2 bemerklich wird.

Wir wollen nun ein Zahlen-Beispiel zur Bestimmung von u und m bei gegebenem φ durchrechnen, nach den Formeln (8) und (10) § 86. S. 426, welche im folgenden unter (37) und (38) nochmals hergesetzt sind. Die nachfolgende Berechnung ist nur mit 7 richtigen Logarithmen-Stellen geführt (nebst $\pm$ 0·25 nach *Schrön*), das genügt hier, um den Rechnungsgang zu zeigen, der durch die Formeln (37) und (38) vorgezeichnet ist.

$$tang\left(45°+\frac{u}{2}\right)=\frac{1}{k}\,tang^{\alpha}\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \qquad (37)$$

$\varphi = 49°\ 0'$, $45°+\frac{\varphi}{2} = 69°\ 30'$

$e\sin\varphi = 0{,}061\ 657\ 385$

$\log e$	8.912 2052·1
$\log\sin\varphi$	9.877 7798·8
$\log e\sin\varphi$	8.789 9850·9
$\log(1-e\sin\varphi)$	9.972 3614.4
$\log(1+e\sin\varphi)$	0.025 9843·8
$\log\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}$	9.946 3770·6–10 − 0.053 6229·4
$\log -0{,}053\,..$	8.729 3506·4$_n$
$\log(0{,}5\,\alpha e)$	8.611 3718·7
$\log(0{,}5\,\alpha e\log -0{,}053\,..)$	7.340 7225·1$_n$
$\log\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}$	− 0.002 1914·0 9.997 8086·0
$\log tang^{\alpha}\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right)$	0.427 4558·4
$\log\frac{1}{k}$	0.001 6708·8
$\log tang\left(45°+\frac{u}{2}\right)$	0.426 9353·2

$\log tang\left(45°+\frac{\varphi}{2}\right)$	0.427 2623·2
$\log(\log tang\,..)$	9.630 6945·9
$\log\alpha$	0.000 1966.6
$\log(\alpha\log tang\,..)$	9.630 8912·5
$\alpha\log tang\,..$	0.427 4558·4

$45°+\frac{u}{2} = 69°\ 29'\ 9{,}04''$

$\frac{u}{2} = 24°\ 29'\ 9{,}04''$

$u = 48°\ 58'\ 18{,}08''$

$$\text{Vergrösserungs-Verhältniss } m = \frac{A}{c}\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} V \tag{38}$$

für $\varphi = 49°$ nach der Hilfstafel S. [47]

$log\ A$	6.805 0274·0
$Erg.\ log\ c$	3.193 9023·6
$log\ V$	0.000 6270·9
$log\ \alpha$	0.000 1966·6
$log\ cos\ u$	9.817 1896·8
$Erg.\ log\ cos\ \varphi$	0 183 0570·8
	0.000 0002·7

Das Ergebnis dieser Rechnung ist also:

$$\varphi = 49° \ 0' \ 0'' \qquad u = 48° \ 58' \ 18{,}08'' \qquad log\, m = 0.000\,0002{\cdot}7 \tag{39}$$

Die genaueren Werte hiefür, welche man aus der Hilfstafel Seite [42] des Anhangs durch Interpolation finden kann, sind:

$$\varphi = 49° \ 0' \ 0'' \qquad u = 48° \ 58' \ 18{,}0784'' \qquad log\, m = 0.000\,0002{\cdot}48 \tag{40}$$

Die Übereinstimmung zwischen (39) und (40) ist insofern hinreichend, als die Werte u und $log\, m$ von (39) nur mit 7stelligen Logarithmen ($\pm$ 0·25) gerechnet sind.

Diese Rechnung haben wir nur zur Veranschaulichung des Rechnungsganges hier hergesetzt, um zu zeigen, dass die Rechnung nach den geschlossenen Formeln (37) und (38) *umständlich* und verhältnismässig *ungenau* ist.

Ein besseres Rechnungs-Verfahren erhält man durch Reihen-Entwicklungen, zu welchen wir nun übergehen.

Anhang zu § 87.

Einführung von goniometrischen Hülfs-Grössen.

Unsere vorstehenden Entwicklungen und Berechnungen zur Bestimmung der Konstanten in den Grundformeln sind *sachlich* nichts anderes, als was *Gauss* in Art. 3.—5. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung" gegeben hat. In der *Form* aber sind wir von *Gauss* abgewichen, indem wir die bisherigen Bezeichnungen unseres Buches, namentlich $V^2 = 1 + \eta^2$ mit $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ beibehielten, und dann die Ausrechnung auf dem zuerst sich darbietenden Wege machten; und da wir damit den *Gauss*schen Zahlenwerten innerhalb der Genauigkeit 10stelliger Logarithmen-Rechnung gleichgekommen sind, wäre nichts weiter zu bemerken.

Nun hat aber *Gauss* in Art. 4. der „Untersuchungen" u. s. w. eine Gruppe von goniometrischen Hilfsgrössen, φ, ζ, η, Θ eingeführt, welche dazu dienen sollen, die logarithmischen Rechnungen bequemer und schärfer zu machen, deren Zusammenhang unter sich und mit den übrigen Grössen e, P, Q nicht sofort einzusehen ist.

Dieser Zusammenhang ist uns durch eine sphärische Figur am besten klar geworden, welche wir in nachstehender Figur 1. nebst den zugehörigen Gleichungen mitteilen, um dem Anfänger beim Lesen von Art. 4. der „Untersuchungen" behilflich zu sein.

Dabei behalten wir die *Gauss*sche Nummerierung der Gleichungen bei, indem z. B. (13_G), (14_G) u. s. w. die Nummern (13), (14) u. s. w. der *Gauss*schen Original-Abhandlung „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung" bedeuten.

Es wird zuerst ein Hilfswinkel φ eingeführt durch die Gleichung:

$$\sin \varphi = e \tag{13_G}$$

damit wird:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \tan^2 \varphi$$

Folglich nach (15):

$$a^2 = 1 + e'^2 \cos^4 P = 1 + \tan^2 \varphi \cos^4 P$$

Nun setzt man abermals:

$$\tan \varphi \cos^2 P = \tan \zeta \qquad (14_G)$$

folglich:

$$\alpha^2 = 1 + \tan^2 \zeta \quad , \quad \alpha = \frac{1}{\cos \zeta} \qquad (16_G)$$

Weiter wird gesetzt:

$$e \sin P = \sin \Theta \qquad (22_G)$$

Die durch (13_G), (14_G) und (22_G) eingeführten Hilfswinkel φ, ζ und Θ lassen sich nebst den Breiten P und Q in einer sphärischen Figur vereinigen, welche in Fig. 1 gezeichnet ist. Man hat hiebei den Bogen $AB = \Theta$, auf welchem die Bögen AD und BD rechtwinklig aufgesetzt sind, so dass D der Pol von AB ist, also bei D der Winkel Θ wieder erscheint.

Fig. 1.

Nach (13_G) und (22_G) ist $BC = P$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC, dessen eine Kathete $AB = \Theta$ und dessen Winkel bei $C = \varphi$ ist. Dadurch ist der Punkt C bestimmt und es wird von ihm eine Senkrechte CF auf BD gefällt, ferner $FB' = FB$ abgetragen, so dass BCB' ein gleichschenkliges Dreieck wird. Dass der bei C eingeschriebene Winkel $BCF = 90° - \zeta$ in Übereinstimmung mit (14_G) ist, zeigt sich so:

Dreieck CBF giebt

$$\cos P = \cot (90° - \zeta) \cot (90° - x)$$

Dreieck CBA giebt $\cos P = \cot \varphi \cot x$

woraus durch Multiplikation die Gleichung (14_G) folgt.

Von (14) und (16_G) haben wir:

$$\sin Q = \sin P \cos \zeta \qquad (17_G)$$

Dieses entspricht dem rechtwinkligen Dreieck BCF als Sinus-Gleichung, ausführlich geschrieben:

$$\sin Q = \sin P \sin (90° - \zeta)$$

Nun haben wir das Recht, aus der sphärischen Figur Fig. 1. beliebige Gleichungen herauszulesen, welche die gleiche Berechtigung haben, wie wenn sie aus den bisherigen Gleichungen rein goniometrisch abgeleitet wären. Die Senkrechte $CF = \eta$ wird aus dem rechtwinkligen Dreieck CFB erhalten durch die Gleichung:

$$\tan \eta = \sin \zeta \tan P \qquad (15_G)$$

Dasselbe Dreieck CFB giebt auch:

$$\cos \eta \cos Q = \cos P \qquad (18_G)$$

und

$$\sin \eta = \tan \zeta \tan Q \qquad (19_G)$$

und wenn man auf dasselbe Dreieck CFB eine *Neper*sche Gleichung ((12), (13) und (14) S. 195—196) anwendet, so erhält man:

$$\tan \frac{P - Q}{2} = \frac{\sin {}^1/_2 (90° - 90° + \zeta)}{\sin {}^1/_2 (90° + 90° - \zeta)} \tan \frac{\eta}{2}$$

$$\tan {}^1/_2 (P - Q) = \tan {}^1/_2 \zeta \tan {}^1/_2 \eta \qquad (20_G)$$

Das Dreieck CDB' giebt:

$$\frac{\sin (\varphi - 2\zeta)}{\sin (2Q - 90°)} = \frac{\sin \Theta}{\sin P}$$

Dann wegen (22_G) und (13_G):

$$\sin(2\zeta - \varphi) = e \cos 2Q = \sin\varphi \cos 2Q \qquad (21_G)$$

Aus den Dreiecken ABC und BCF findet man:

$$\cos\varphi = \sin x \cos\Theta$$
$$\cos(90° - x) = \sin(90° - \zeta)\cos\eta$$

und durch Elimination von x:

$$\cos\varphi = \cos\zeta \cos\eta \cos\Theta \qquad (23_G)$$

Unser V^2 lässt sich ebenfalls in φ und Θ ausdrücken. Nach (16) ist:

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P = \frac{1 - e^2 \sin^2 P}{1 - e^2} = \frac{\cos^2\Theta}{\cos^2\varphi}$$

nach (10) S. 206: $a = c\sqrt{1 - e^2} = c\cos\varphi \quad , \quad A = \frac{c}{V^2}$, also:

$$A = \frac{a \cos\varphi}{\cos^2\Theta}$$

Der Hilfswinkel Θ von (22_G), nämlich $\sin\Theta = e \sin P$, giebt auch eine Umformung für k nach (18), nämlich:

$$\frac{1 - e\sin P}{1 + e\sin P} = \frac{1 - \sin\Theta}{1 + \sin\Theta} = \cot g^2\left(\frac{90° + \Theta}{2}\right)$$

folglich k nach (18):

$$k = \frac{\tan g^{\alpha}(45° + {}^1/_2 P)}{\tan g(45° + {}^1/_2 Q)\tan g^{\alpha e}(45° + {}^1/_2 \Theta)}$$

Wir werden im nachfolgenden die goniometrischen Hilfsgrössen nicht anwenden, merken uns aber zum Umsetzen unserer Bezeichnungen in jene, hauptsächlich die oben gefundene Beziehung:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\Theta} = \frac{1}{V}.$$

§ 88. Reihen-Entwicklung für die Breiten-Differenz.

Die Beziehung zwischen der Breite φ auf dem Ellipsoid und der zugehörigen Breite u auf der Kugel ist zwar durch die Gleichung (8) § 86. S. 426 gegeben, welche zu jedem Werte φ den zugehörigen Wert u berechnen lässt; allein mancherlei Bedürfnisse werden dadurch doch nicht befriedigt; erstens ist jene geschlossene Formel zur Rechnung überhaupt unbequem (vgl. das Zahlenbeispiel S. 431—432), und kann zur Auflösung nach φ bei gegebenem u nur etwa *indirekt* benützt werden. Dieses und andere Gründe machen eine Reihen-Entwicklung erwünscht.

Da auf dem Ellipsoid eine Normalbreite P und auf der Kugel eine Normalbreite Q angenommen wurde, sollen die Breiten allgemein durch ihre Differenzen gegen P und Q ausgedrückt werden, d. h. wir setzen (nach S. 427):

$$\text{Ellipsoid} \quad \varphi = P + p \qquad (1)$$
$$\text{Kugel} \quad u = Q + q \qquad (2)$$

Da die Beziehung zwischen P und Q bekannt ist, handelt es sich jetzt nur noch um eine Beziehung zwischen p und q, welche in zwei Formen aufgestellt werden kann, nämlich:

entweder: $$p = \left.\frac{d\varphi}{du}\right] q + \left.\frac{d^2\varphi}{du^2}\right] \frac{q^2}{2} + \left.\frac{d^3\varphi}{du^3}\right] \frac{q^3}{6} \qquad (3)$$

oder: $$q = \left.\frac{du}{d\varphi}\right] p + \left.\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] \frac{p^2}{2} + \left.\frac{d^3u}{d\varphi^3}\right] \frac{p^3}{6} \qquad (4)$$

Dabei soll, wie immer im folgenden, das Zeichen] andeuten, dass nach Ausführung der Differentiierungen, $p = 0$ und $q = 0$, oder $\varphi = P$ und $u = Q$ zu setzen sei.

Wir wollen zuerst die Form (4) vornehmen, und haben hiezu von (6) § 86. S. 426:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{V^2}\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \tag{5}$$

Hiebei ist:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \tag{6}$$

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2}{V}t \qquad (t = \operatorname{tang} \varphi) \tag{7}$$

$$\frac{dV^n}{d\varphi} = -n\eta^2 V^{n-2} t \quad \text{und} \quad \frac{d\eta^n}{d\varphi} = -n\eta^n t \tag{8}$$

Dieses haben wir, weil es wiederholt gebraucht wird, vorausgeschickt, und nehmen die ebenfalls mehrfach vorkommende Ableitung des zweiten Faktors von (5) besonders:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right) = \frac{1}{\cos^2 \varphi}\left(-\alpha \sin u \frac{du}{d\varphi} \cos \varphi + \alpha \cos u \sin \varphi\right) \tag{9}$$

Setzt man hier (5) ein, und berücksichtigt $V^2 = 1 + \eta^2$ nach (6), so bekommt man:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right) = \frac{1}{V^2}\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\left(-\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} + t + \eta^2 t\right) \tag{10}$$

Wenn man nun (5) nochmals ableitet, so hat man zuerst wegen (8):

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{2\eta^2}{V^4}t\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} + \frac{1}{V^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right)$$

Setzt man den bereits in (9) vorbereiteten Wert ein, so erhält man:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{V^4}\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\left(t + 3\eta^2 t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right) \tag{11}$$

Als Vorbereitung der nächsten Ableitung hievon behandeln wir zuerst den letzten Teil, und finden in ähnlicher Weise wie oben bei (9) und (10):

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right) = \frac{1}{V^2}\left(\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right)^2 + \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}t(1 + \eta^2)\right) \tag{12}$$

Nun giebt (11) weiter:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^3u}{d\varphi^3} = {} & \frac{4\eta^2}{V^6}t\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\left(t + 3\eta^2 t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right) \\ & + \frac{1}{V^4}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right)\left(t + 3\eta^2 t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right) \\ & + \frac{1}{V^4}\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\left((1 + t^2) - 6\eta^2 t^2 + 3\eta^2(1 + t^2) - \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right)\right)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Da wir bei der dritten Potenz stehen bleiben wollen, handelt es sich jetzt darum, alle die Substitutionen zu machen, welche bei (3) und (4) durch] angedeutet sind, d. h. $\varphi = P$, $u = Q$ zu setzen. Es ist aber nach (14) und (17) § 87. S. 428 bis 429, $\alpha \sin Q = \sin P$ und $\alpha \cos Q = V \cos P$, und daraus folgt:

$$\left.\frac{\alpha \sin u}{\sin \varphi}\right] = 1 \qquad \left.\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\right] = t \qquad \left.\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\right] = V \tag{14}$$

und dieses in (10) und (12) gesetzt, giebt (da $V^2 = 1 + \eta^2$ ist):

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\Big] = \frac{\eta^2 t}{V} \qquad \frac{d}{d\varphi}\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi}\Big] = 1 + t^2 \tag{15}$$

Wenn man diese (14) und (15) in den drei allgemeinen Ableitungen (5), (11) und (13) einsetzt, so ziehen sich diese Ableitungen sehr zusammen, und wenn man alles gleichartige zusammen ordnet, so erhält man:

$$\frac{du}{d\varphi}\Big] = \frac{1}{V} \quad , \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2}\Big] = \frac{3\,\eta^2}{V^3}\,t \tag{16}$$

$$\frac{d^3u}{d\varphi^3}\Big] = \frac{3\,\eta^2}{V^5}\,(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2) \tag{17}$$

Mit diesen (16) und (17) kann man die Formel (4) zusammensetzen:

$$q = \frac{1}{V}p + \frac{3}{2}\frac{\eta^2 t}{V^3}p^2 + \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{V^5}(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2 t^2)\,p^3 \tag{18}$$

Auf ähnlichem Wege wie diese Reihe, welche nach Potenzen von p fortschreitet, kann man auch die Reihe (3) bestimmen, welche nach Potenzen von q fortschreitet und p bestimmt; indessen, wenn wir nicht weiter als bis zur dritten Ordnung gehen, bekommen wir die umgekehrte Reihe viel einfacher, wenn wir geradezu die Reihe (18) stufenweise umkehren (vgl. (50)—(52) S. 203). In erster Näherung giebt (18):

$$p = qV + q^2 \ldots \quad , \quad p^2 = q^2 V^2 + q^3 \ldots$$

$$p = qV - \frac{3}{2}q^2\eta^2 t \quad , \quad p^2 = q^2 V^2 - 3\,q^3 V \eta^2 t +$$

Dieses p^2 und $p^3 = q^3 V^3$, in (18) eingesetzt, und alles nach gleichen Potenzen geordnet, giebt sofort:

$$p = q\,V - \frac{3}{2}\,\eta^2 q^2 t + \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{V}(-1 + t^2 - \eta^2 + 5\,\eta^2 t^2)\,q^3 \tag{19}$$

In den Reihen (18) und (19) sind p und q in analytischem Masse verstanden; wir wollen nun statt dessen die unabhängige Veränderliche p in (18), q in (19) in Graden, und die Funktion q oder p in Sekunden zählen; dann nehmen die Reihen (18) und (19) folgende Formen an:

$$q = \frac{3600}{V}p + \frac{3600}{\varrho^\circ}\frac{3}{2}\frac{\eta^2 t}{V^3}p^2 - \frac{3600}{\varrho^{\circ 2}}\frac{\eta^2}{2V^5}(-1 + t^2 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\,p^3 \tag{20}$$

$$p = 3600\,V q - \frac{3600}{\varrho^\circ}\frac{3}{2}\,\eta^2 t\,q^2 + \frac{3600}{\varrho^{\circ 2}}\frac{\eta^2}{2V}(-1 + t^2 - \eta^2 + 5\,\eta^2 t^2)\,q^3 \tag{21}$$

Wenn man hier die Coëfficienten mit den Konstanten von § 87. ausrechnet, so bekommt man:

$$q = 3595{,}566\,945\,p + 0{,}304\,138\,6587\,p^2 - 0{,}000\,946\,265\,801\,p^3 + \ldots \tag{22}$$

$$p = 3604{,}438\,521\,q - 0{,}305\,264\,9836\,q^2 + 0{,}001\,002\,642\,525\,q^3 + \ldots \tag{23}$$

Wenn man diese Reihen als konvergierend und mit der dritten Potenz abbrechend behandeln will, so braucht man natürlich die Coëfficienten nicht mit so vielen Stellen; wir haben jedoch viele Stellen ausgerechnet zur Vergleichung mit den Zahlenangaben von *Gauss*, welcher in Art. 6. und Art. 8. die Reihen bis zur fünften Potenz ausgeführt giebt. Insbesondere die zur Tafel-Berechnung von *Gauss* angegebene Reihe von Art. 8. ist:

$$\left.\begin{aligned} p - q = \;& 443{,}852\,122\,\frac{q}{100} \\ & - 3052{,}649\,780\left(\frac{q}{100}\right)^2 \quad [3.484\,6769{\cdot}820] \\ & + 1002{,}642\,506\left(\frac{q}{100}\right)^3 \quad [3.001\,1461{\cdot}121] \\ & + 4119{,}589\,282\left(\frac{q}{100}\right)^4 \quad [3.614\,8539{\cdot}196] \\ & - 431{,}181\,623\left(\frac{q}{100}\right)^5 \quad [2.634\,661] \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die Anwendung dieser Reihe auf $q = -7°$ und $q = +7°$ giebt:

$u = Q + q =$	$45°\ 40'\ 0''$	$59°\ 40'\ 0''$
	$q = -7°$	$q = +7°$
	$-31{,}069\,965''$	$+31{,}069\,965$
	$-14{,}957\,984$	$-14{,}957\,984$
	$-\ 0{,}343\,906$	$+\ 0{,}343\,906$
	$+\ 0{,}098\,911$	$+\ 0{,}098\,911$
	$+\ 0{,}000\,725$	$-\ 0{,}000\,725$
$p - q =$	$-46{,}272\,219$	$+16{,}554\,073$
$p =$	$-7°\ 0'\ 46{,}272\,219''$,	$+\ 7°\ 0'\ 16{,}554\,073''$
hiezu $P =$	$52°\ 42'\ 2{,}53251''$	$52°\ 42'\ 2{,}53251''$
$\varphi = P + p =$	$45°\ 41'\ 16{,}26029''$	$59°\ 42'\ 19{,}08658''$

Diese Werte liegen bereits jenseits der Grenzen der *Gauss*schen Tafel, von der wir einen an den Grenzen etwas erweiterten Auszug auf Seite [42]—[43] des Anhangs gegeben haben.

Da das letzte Berechnungsglied immer noch 0,0007″ ausmacht, und die Konvergenz nicht sehr stark ist, kann man schliessen, dass für die Genauigkeit von 0,00001″, welche *Gauss* seiner Tafel gegeben hat, die Werte $q = -7°$ und $q = +7°$ als äusserste Grenzen zu betrachten sind.

§ 89. Reihen-Entwicklung für das Vergrösserungs-Verhältnis.

Das Vergrösserungs-Verhältnis ist nach (10) § 86. S. 426:

$$m = \frac{A}{c}\,\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi}\,V \tag{1}$$

In der Normalbreite $\varphi = P$ (und $u = Q$) ist dieses Verhältnis $m = 1$; und wenn, wie bisher, irgend eine Breite auf der Kugel $u = Q + q$ gesetzt wird, so wird für irgend eine solche Breite sich das Verhältnis m als Funktion von q darstellen lassen, oder die Reihe für $\log m$ habe zunächst diese Form:

$$\log m = \left.\frac{d \log m}{d q}\right] q + \left.\frac{d^2 \log m}{d q^2}\right]\frac{q^2}{2} + \left.\frac{d^3 \log m}{d q^3}\right]\frac{q^3}{6} + \cdots \tag{2}$$

Da aber die beiden ersten Ableitungen von $\log m$ gleich Null gesetzt wurden ((4) und (5) § 87. S. 428), so zieht sich (2) zusammen auf:

$$\log m = \left.\frac{d^3 \log m}{d q^3}\right]\frac{q^3}{6} + \cdots \tag{3}$$

Hiezu haben wir von (10) § 87. S. 428:

$$\frac{d^2 \log m}{d u^2} = \frac{-\alpha^2 + V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u}{\alpha^2 \cos^2 u} = \frac{Z}{N} \tag{4}$$

Dieses haben wir in vorübergehender Weise mit $Z:N$ bezeichnet, um durch Z den Zähler, durch N den Nenner auszudrücken, und damit wird:

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = \frac{1}{N^2} \left(\frac{d Z}{d u} N - \frac{d N}{d u} Z \right) \tag{5}$$

Allein wenn man nachher wieder die Substitutionen für die Normalbreiten Q und P nach (14) § 88. S. 435 zu machen hat, wird man finden, dass der Zähler Z in (4) verschwindet, es bleibt also nur von (5):

$$\left.\frac{d^3 \log m}{d u^3}\right] = \left.\frac{1}{N} \frac{d Z}{d u}\right] \tag{6}$$

Da auch α konstant ist, handelt es sich also nur noch um die Ableitung:

$$\frac{d}{d u} (V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u)$$

Dieses giebt:

$$\left(2 V \frac{d V}{d \varphi} \cos^2 \varphi - 2 V^2 \cos \varphi \sin \varphi \right) \frac{d \varphi}{d u} + \alpha \cos \varphi \frac{d \varphi}{d u} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u \tag{7}$$

Dabei ist nach (8) und (7) § 87. S. 428 zu beachten:

$$\frac{d V}{d \varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t \quad \text{und} \quad \frac{d \varphi}{d u} = \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u}$$

Dieses in (7) eingesetzt giebt:

$$(-2 \eta^2 t \cos^2 \varphi - 2 V^2 \cos \varphi \sin \varphi) \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} + \alpha \cos \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u$$

Nun muss man wieder die Substitutionen (14) § 88. S. 435 machen, und wenn man gleichzeitig den Nenner $N = \alpha^2 \cos^2 u$ zusetzt, so bekommt man nach (6) (mit $\tan g\, \varphi = t$):

$$\left.\frac{d^3 \log m}{d u^3}\right] = -\frac{2 \eta^2}{V} t - 2 V t + \frac{1}{V} t + \frac{1}{V} t$$

und mit $V^2 = 1 + \eta^2$ zieht sich dieses zusammen auf:

$$\left.\frac{d^3 \log m}{d u^3}\right] = \frac{-4 \eta^2}{V} t \tag{8}$$

und die Reihe für $\log m$ ist daher nach (3):

$$\log m = -\frac{2 \eta^2}{3 V} t q^3 + q^4 \ldots \tag{9}$$

Wenn man hiebei stehen bleiben will, d. h. wenn man q^4 und p^4 vernachlässigen will, so kann man leicht auch $\log m$ in p^3 ausdrücken, denn da nach (19) § 88. S. 436 in erster Näherung $p = q V$ ist, kann man (9) auch so schreiben:

$$\log m = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t p^3 + \ldots \tag{10}$$

In (9) und (10) bedeutet *log* den *natürlichen* Logarithmus; will man also *Brigg*sche Logarithmen haben, so muss man noch den Modulus μ zusetzen, und wenn man zugleich die Formeln für q oder p in Graden einrichten will, so muss man noch mit $\varrho^{\circ 3}$ dividieren; d. h. man erhält aus (9):

$$log\ m = -\frac{\mu}{\varrho^{\circ 3}} \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t\, q^3 \tag{11}$$

Die Ausrechnung mit den Konstanten von (25) — (28) § 87. S. 430 giebt für Einheiten der siebenten Logarithmenstelle:

$$log\ m = -0{\cdot}049\,796\,165\, q^3 + \ldots \tag{12}$$

Auf gleiche Weise erhält man von (10):

$$log\ m = -0{\cdot}049\,612\,434\, p^3 + \ldots \tag{13}$$

In Art. 7. und Art. 9. der „Unters. üb. G. d. h. G." hat *Gauss* diese Entwicklungen bis zur sechsten Potenz fortgesetzt, und die darnach berechneten Werte *log m* sind in unserer Tafel Seite [42] — [43] mitgeteilt.

Es ist dazu zu bemerken, dass die mit der dritten Potenz abbrechende Formel (12) nur etwa bis zu Abständen $q = \pm 2°$, also für die Zone von 50° 40′ bis 54° 40′ ausreicht, wenn man *log m* auf 0·001 genau haben will, während weiter hinaus die in (12) weggelassenen Glieder mit q^4, q^5, q^6 sehr bemerklich werden, wie aus folgender Zusammenstellung zu ersehen ist.

u	*log m*	— 0,049796 q^3	*log m*	*u*
52° 40′	+ 0·000	± 0·000	— 0·000	52° 40′
51° 40′	+ 0·050	± 0·050	— 0·050	53° 40′
50° 40′	+ 0·396	± 0·397	— 0·401	54° 40′
48° 40′	+ 3·148	± 3·175	— 3·231	56° 40′
46° 40′	+ 10·559	± 10·716	— 10·990	58° 40′
		Formel (13)		

(14)

Dabei stehen in den mit *log m* überschriebenen Spalten die *genauen* Werte von *log m*, welche zu vergleichen sind mit den in der mittleren Spalte enthaltenen Näherungswerten nach Formel (13).

Bisher haben wir immer nur *log m* behandelt, eine Formel für *m* selbst erhalten wir, da in (9) und (10) natürliche Logarithmen gelten, sehr einfach hieraus:

$$m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t\, q^3 + \ldots \quad \text{oder} \quad m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t\, p^3 \tag{15}$$

Das Vergrösserungs-Verhältnis *m* gilt zunächst nur im differentialen Sinne, d. h. wenn ds eine kleine Strecke auf dem Ellipsoid ist, so ist $m\, ds = ds'$ die entsprechende Abbildung auf der Kugel, und wenn es sich um eine ausgedehnte Strecke s handelt, so ist zu rechnen:

$$s' = \int^{s} m\, ds = s - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t \int p^3\, ds \tag{16}$$

oder

$$s' = \int m\, ds = s - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t \int q^3\, ds \tag{17}$$

Da wir dieses nur genähert ausrechnen wollen, so sind uns die beiden Formen (16) und (17) gleichwertig, wir vernachlässigen dabei in dem Integral von (17) einen Faktor m (indem wir ds statt ds' schreiben), und im ganzen vernachlässigen wir auch den Umstand, dass die geodätische Linie sich nicht genau in einem Grosskreisbogen abbildet (was im nachfolgenden § 90. ausführlicher erörtert werden wird), und wir werden nun (17) dadurch integrieren, dass wir q als Funktion von s darstellen.

Zu diesem Zwecke zählen wir die Breiten-Differenzen q von einem Werte q_0 an, welcher der *Mitte* des ganzen Bogens s entspricht, und die Länge des Bogens s selbst zählen wir ebenfalls von der Mitte an mit $+x$ in dem Azimut β_0 und mit $-x$ in der Gegenrichtung.

Da der Kugelhalbmesser $= A$ ist, haben wir nach (8) S. 313 mit den angenommenen Bezeichnungen die Breiten-Differenz:

$$q - q_0 = \frac{x}{A} \cos \beta_0 - \frac{x^2}{2A^2} \sin^2 \beta_0 \tang (Q + q_0)$$

Es genügt für das folgende zu wissen, dass dieses eine quadratische Funktion von x ist, weshalb wir mit abkürzenden Coëfficienten-Bezeichnungen schreiben:

$$q = q_0 + f x + g x^2 + \ldots$$

Auch q^3 wird in erster Näherung eine quadratische Funktion von x sein, und sich so darstellen lassen:

$$q^3 = q_0^3 + f' x + g' x^2 + \ldots \tag{18}$$

Für den Anfangspunkt mit $x = -\frac{s}{2}$ soll $q = q_1$ sein, und für den Endpunkt mit $x = +\frac{s}{2}$ soll $q = q_2$ sein, d. h.:

$$q_1^3 = q_0^3 - f' \frac{s}{2} + g' \frac{s^2}{4} \tag{19}$$

$$q_2^3 = q_0^3 + f' \frac{s}{2} + g' \frac{s^2}{4} \tag{20}$$

Nun giebt das in (17) gebrauchte Integral mit Einsetzung von (18), indem für ds das allgemeinere dx geschrieben wird:

$$\int q^3 \, dx = q_0^3 x + f' \frac{x^2}{2} + g' \frac{x^3}{3}$$

Diese Integration ist zu nehmen zwischen den Grenzen $x = -\frac{s}{2}$ und $x = +\frac{s}{2}$ und giebt damit, wenn wir das bestimmte Integral mit J bezeichnen:

$$J = q_0^3 s + g' \frac{s^3}{12}$$

Dieses lässt sich aber in (19) und (20) ausdrücken, denn es ist:

$$\frac{q_1^3 + 4 q_0^3 + q_2^3}{6} s = \left(q_0^3 + g' \frac{s^2}{12}\right) s = J \tag{21}$$

Das ist der in (17) einzusetzende Integralwert, und indem wir nun den drei Werten q_1, q_0, q_2 entsprechend, auch drei Werte m_1, m_0, m_2 nach (15) einführen, nämlich:

$$m_1 = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t \, q_1^3 \quad , \quad m_0 = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta}{V} t \, q_0^3 \quad , \quad m_2 = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta}{V} t \, q_2^3 \tag{22}$$

erhalten wir durch Einsetzen von (21) und (22) in (17):

$$s' = s \left(1 - \frac{m_1 + 4 m_0 + m_2}{6}\right) \tag{23}$$

Es wird also zur Reduktion von s auf s' ein gewisser Mittelwert des Vergrösserungsverhältnisses m angewendet, welcher dadurch entsteht, dass der Wert m_0 für die *Mitte* der Linie mit 4fachem Gewicht nebst m_1 und m_2 für die Endpunkte je mit 1fachem Gewicht zusammen genommen werden.

Die Rechnung nach der Formel (20) setzt voraus, dass nach (18) die Masse x oder s *klein* seien im Verhältnis zu q, und ausserdem, dass höhere Potenzen als q^3 in (15) zu vernachlässigen sind. Dass letzteres nur mit gewisser Beschränkung der Genauigkeit zulässig ist, haben wir in der tabellarischen Übersicht (14) gezeigt.

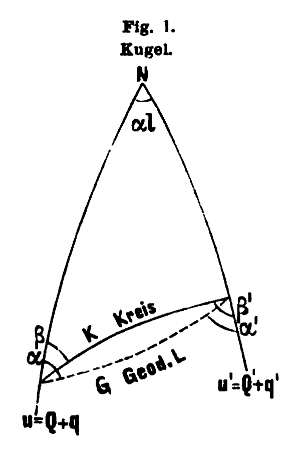
Da also die Voraussetzungen, auf welchen die Formel (23) beruht, nur teilweise erfüllt sind, so ist es in vielen Fällen auch hinreichend, schlechthin einen Mittelwert aus den beiden *End*werten m_1 und m_2 zu nehmen, also:

$$\frac{\log m_1 + \log m_2}{2} = \log m. \tag{24}$$

§ 90. Azimut-Reduktion.

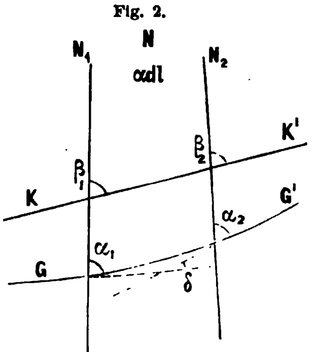
In nebenstehender Fig. 1., welche sich auf die Kugel bezieht, betrachten wir zwei von dem Ellipsoid herübergetragene Punkte mit den Kugelbreiten u und u' und dem Längen-Unterschied αl. Der mit K bezeichnete Verbindungsbogen sei grösster Kreisbogen der Kugel, und ausserdem haben wir eine Kurve G gezogen, welche das konforme Abbild der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid ist.

Fig. 1. Kugel.



Eine geodätische Linie des Ellipsoids bildet sich nämlich im allgemeinen *nicht* als Grosskreisbogen der Kugel ab, und es handelt sich nun darum, die Azimut-Differenzen $\alpha - \beta$ und $\beta' - \alpha'$ zwischen dem Abbild G der geodätischen Linie und dem Grosskreisbogen K zu bestimmen, wobei zu bemerken ist, dass die Azimute α und α' der geodätischen Linie richtig auf die Kugel übergehen, vermöge des Prinzips der *konformen* Abbildung. Die Azimute α, α', β, β' der nebenstehenden Figur sind dieselben wie die gleich bezeichneten Azimute α, α' und β, β' in den früheren Fig. 3. und Fig. 4. § 86. S. 427.

Fig. 2.



Wir betrachten nun mit Fig. 2. die Meridian-Konvergenz $\alpha_2 - \alpha_1$ für ein kleines Stück des Abbildes der geodätischen Linie, und die Meridian-Konvergenz $\beta_2 - \beta_1$ für ein entsprechendes, zwischen denselben Meridianen liegendes Stück des Kreisbogens. Wenn dl der Längenunterschied auf dem Ellipsoid, also $\alpha\, dl$ der entsprechende Längenunterschied auf der Kugel ist, wobei α die Längen-Reduktionskonstante*) nach (15) § 87. S. 428 ist, so bestehen folgende zwei Differential-Gleichungen:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = dl \sin \varphi \tag{1}$$
$$\beta_2 - \beta_1 = \alpha\, dl \sin u \tag{2}$$

*) Wir benützen das Zeichen α hier in zweifacher Bedeutung, erstens als Azimut der geodätischen Linie und zweitens als Reduktions-Konstante für die Längen-Unterschiede l; dieser kleine Misstand, welcher zu Verwechslungen nicht wohl führen kann, da wir hier darauf aufmerksam machen, ist entstanden aus dem Wunsche, die Fundamental-Bezeichnungen der klassischen Abhandlung von *Gauss*, und damit jene Längen-Konstante α, beizubehalten.

Also die Differenz:

$$\delta = (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = dl\,(\alpha \sin u - \sin \varphi) \tag{3}$$

Nun kann man zeigen, dass diese Differenz δ die *Krümmung* des Bogens G in Fig. 2. ist, vorausgesetzt, dass alle drei anderen Linien des kleinen Vierecks gerade seien. Es ist nämlich die Winkelsumme des kleinen Vierecks von Fig. 2.:

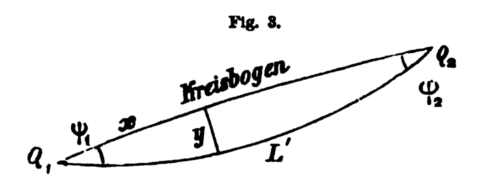
$$(180^\circ - \beta_1) + \beta_2 + (180 - \alpha_2) + \alpha_1 = 360^\circ + (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = 360^\circ + \delta \tag{4}$$

und dieses stimmt mit dem in Fig. 2. eingeschriebenen Winkel δ.

Man beachte hiebei, dass alle drei anderen Seiten des kleinen Vierecks Fig. 2. ausser G, grösste Kreisbögen sind, der Querabstand y der Linien K und G wird sich nachher als sehr klein, nur von der Ordnung $\eta^2\, s^2\, q^2$ zeigen, und deswegen kommt der sphärische Excess des kleinen Vierecks, mit G als Grosskreisbogen, d. h. die Flächenkrümmung neben der Linienkrümmung, nicht in Betracht, oder kurz: Wir können den kleinen Winkel δ nach (3) als Mass der *relativen Krümmung* der Kurve G gegen den Kreisbogen K betrachten, und deswegen mit Annahme eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems x, y nach Fig. 3. setzen:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\delta}{dx} = (\alpha \sin u - \sin \varphi)\,\frac{dl}{dx} \tag{5}$$

Fig. 3.



Dabei mussten wir links — schreiben, wenn δ in Fig. 2. positiv sein soll, weil bei einem Coordinaten-System wie Fig. 3. die Kurve L' gegen die x-Axe konkav ist, wenn der zweite Differential-Quotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ negativ ist.

Wenn etwa die Kurve G nicht so verliefe, wie in Fig. 3. und in der dazu gehörigen Gleichung (5) angenommen ist, so würden nachher die kleinen Winkel ψ_1 und ψ_2 *negativ* herauskommen müssen.

Nun kommt es zuerst darauf an, die Funktion $\alpha \sin u - \sin \varphi$ zu entwickeln, und dazu haben wir nach Fig. 3. und Fig. 4. § 86. S. 427:

$$\varphi = P + p \qquad u = Q + q \tag{6}$$

also:

$$\sin \varphi = \sin P + p \cos P - \frac{p^2}{2} \sin P \tag{7}$$

$$\alpha \sin u = \alpha \sin Q + \alpha\, q \cos Q - \alpha \frac{q^2}{2} \sin Q \tag{8}$$

Zur Vergleichung zwischen p und q hat man nach (18) § 88. S. 436 die Reihe:

$$q = \frac{p}{V} + \frac{3}{2}\,\frac{\eta^2}{V^3}\, p^2 \operatorname{tang} P \tag{9}$$

Zugleich beachte man auch die Grundformeln für P und Q nach (14) und (17) § 87. S. 428—429:

$$\alpha \sin Q = \sin P \quad \text{und} \quad \alpha \cos Q = V \cos P \tag{10}$$

Wenn man nun die Differenz von (7) und (8) bildet, dabei (9) und (10) einsetzt, und auch $V^2 = 1 + \eta^2$ beachtet, so bekommt man:

$$\alpha \sin u - \sin \varphi = \frac{2\eta^2}{V^2}\, p^2 \sin P \tag{11}$$

Nun zu (5) zurückkehrend, brauchen wir weiter von (6) und (4) § 78. S. 387:

$$d\,l = \frac{d\,s}{N}\frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \quad \text{wobei} \quad d\,s = \frac{d\,x}{m} \tag{12}$$

Das hier gebrauchte Vergrösserungs-Verhältnis m ist nach (15) § 89. S. 439:

$$m = 1 - \frac{2}{3}\frac{\eta^2}{V^4}\tan g\,P\,p^3 \tag{13}$$

Es genügt jedoch hier, in erster Näherung $m = 1$ zu setzen, wodurch auch die geodätische Linie s auf dem Ellipsoid und der entsprechende Bogen s' auf der Kugel als gleich lang angenommen werden. Damit geben (11) und (12) in (5) eingesetzt:

$$-\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{2\,\eta^2}{V^2}\frac{\sin P \sin\alpha}{\cos\varphi\;N}\,p^2 \tag{14}$$

Wir dürfen hier auch noch $\varphi = P$ setzen, weil Glieder von der Ordnung p^3 ohnehin schon in (11) vernachlässigt sind; und indem wir nach (9) mit $p = q\,V$, auf q übergehen, haben wir von (14):

$$-\frac{d^2 y}{d\,x^2} = \frac{2\,\eta^2}{N}\,t \sin\alpha\,q^2 \qquad (t = \tan g\,P) \tag{15}$$

oder:

$$-\frac{d^2 y}{d\,x^2} = F \sin\alpha\,q^2 \qquad \text{wo } F = \frac{2\,\eta^2}{N}\,t \tag{15a}$$

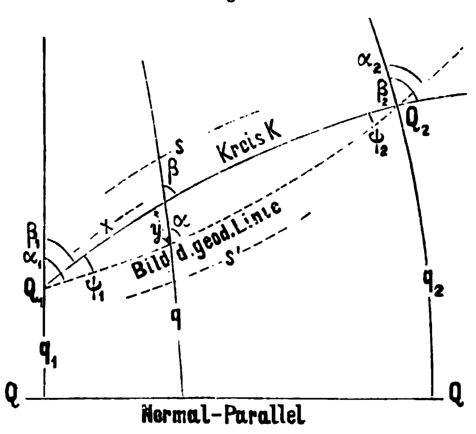
Um auf x überzugehen, haben wir in erster Näherung nach Fig. 4. zu setzen:

$$q = q_1 + \frac{x}{A}\cos\beta_1 + \ldots$$

also:

$$q^2 = q_1^2 + 2\,q_1\frac{x}{A}\cos\beta_1 \tag{16}$$

Fig. 4.



Hiebei ist q_1 derjenige Wert von q, welcher zu dem Anfangspunkt Q_1 gehört, und q_2 derjenige Wert von q, welcher zu dem Endpunkte Q_2 des betrachteten Bogens s gehört. In gleicher Weise haben wir auch für das Azimut β, welches der Breite q und der Abscisse x entspricht, nach (15) S. 315:

$$\beta = \beta_1 + \frac{x}{A}\sin\beta_1\,t_1 \quad , \quad \sin\beta = \sin\beta_1 + \frac{x}{A}\sin\beta_1\cos\beta_1\,t_1 \tag{17}$$

Man hat also aus (16) und (17):

$$q^2 \sin\beta = q_1^2 \sin\beta_1 + \frac{x}{A}(2 q_1 \sin\beta_1 \cos\beta_1 + q_1^2 \sin\beta_1 \cos\beta_1 t_1) \tag{18}$$

Dieses ist eine lineare Funktion von x, welche zur vorübergehenden Abkürzung so geschrieben werden mag:

$$q^2 \sin\beta = f + g x \tag{19}$$

Damit wird nach (15 a), wenn zugleich $\alpha = \beta$ gesetzt wird:

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = F(f + g x) \tag{20}$$

$$-\frac{d y}{d x} = -\psi_1 + F\left(f x + \frac{g x^2}{2}\right) \tag{21}$$

$$-y = -\psi_1 x + F\left(\frac{f x^2}{2} + \frac{g x^3}{6}\right) \tag{22}$$

Dabei ist $-\psi_1$ bei (21) als Integrations-Konstante zugesetzt, während in (22) bei y, das mit $x = 0$ verschwinden muss, keine weitere Integrations-Konstante hinzukommt. Wenn $x = s'$ wird, oder auch mit der Näherung $m = 1$, wenn $x = s$ wird, so muss $y = 0$ und $\frac{d y}{d x} = -\psi_2$ werden, dieses giebt aus (22) und (21) folgende zwei Gleichungen:

$$0 = -\psi_1 s + F\left(f \frac{s^2}{2} + g \frac{s^3}{6}\right)$$

$$+\psi_2 = -\psi_1 + F\left(f s + g \frac{s^2}{2}\right)$$

Diese zwei Gleichungen dienen zur Bestimmung von ψ_1 und ψ_2, und geben nach ψ_1 und ψ_2 aufgelöst:

$$\psi_1 = F s\left(\frac{f}{2} + g \frac{s}{6}\right) \tag{23}$$

$$\psi_2 = F s\left(\frac{f}{2} + g \frac{s}{3}\right) \tag{24}$$

Wenn wir nun die Funktion (19) wieder zur Hand nehmen, so können wir aus derselben mit $x = 0$ und mit $x = s$ folgende zwei Gleichungen ableiten:

$$q_1^2 \sin\beta_1 = f$$
$$q_2^2 \sin\beta_2 = f + g s$$

Diese zwei Gleichungen in Verbindung mit (23) und (24) geben:

$$\psi_1 = \frac{F s}{2} \frac{2 q_1^2 \sin\beta_1 + q_2^2 \sin\beta_2}{3}$$

$$\psi_2 = \frac{F s}{2} \frac{q_1^2 \sin\beta_1 + 2 q_2^2 \sin\beta_2}{3}$$

Wenn wir nun die Bedeutung von F nach (15 a) einsetzen, wollen wir wieder α statt β schreiben (vgl. oben bei (19) und (20)), also:

$$\psi_1 = \eta^2 t \frac{s}{N} \frac{2 q_1^2 \sin\alpha_1 + q_2^2 \sin\alpha_2}{3} \tag{25}$$

$$\psi_2 = \eta^2 t \frac{s}{N} \frac{q_1^2 \sin\alpha_1 + 2 q_2^2 \sin\beta_2}{3} \tag{26}$$

Der hier vorkommende Quotient $\frac{s}{N}$ soll durch $\frac{s}{A}$ ersetzt werden, indem N der Quer-Krümmungshalbmesser und A der mittlere Krümmungshalbmesser für die Normalbreite P sind, d. h. es ist nach (21) und (22) S. 210—211:

$$N = \frac{c}{V} \quad , \quad A = \frac{c}{V^2} \text{ also } \frac{A}{N} = \frac{1}{V} \tag{27}$$

Ausserdem wird zur Abkürzung eingeführt:

$$\eta^2 \frac{t}{V} q^2 = k \tag{28}$$

insbesondere
$$\frac{\eta^2 t}{V} q_1^2 = k_1 \quad \text{und} \quad \frac{\eta^2 t}{V} q_2^2 = k_2 \tag{28a}$$

Damit gehen (25) und (26) in diese Formen über:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \psi_1 = \frac{2 k_1 \sin \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \tag{29}$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = \psi_2 = \frac{k_1 \sin \alpha_1 + 2 k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \tag{30}$$

Zur Anwendung in Zahlen muss man die Funktion k nach (28) auf bestimmtes Mass einrichten. Nehmen wir wie bisher q in Graden und dann die kleinen Winkel ψ in Sekunden, so hat man zu setzen:

$$k = \frac{\varrho''}{\varrho^{\circ 2}} \frac{\eta^2}{V} t q^2$$

mit den Konstanten von § 87. wird dieses ausgerechnet:

$$k = 0{,}203\,259\,386\, q^2$$

die hiernach berechneten Werte k sind nur erste Näherungen, welche von den genaueren Werten k der *Gauss*schen Tafel ähnliche Abweichungen zeigen, wie zwischen den ersten Näherungen und den genauen Werten von $\log m$, welche wir in (14) § 89. S. 439 zusammengestellt haben.

§ 91. Hilfstafeln und Zahlenbeispiele.

Gauss hat eine ausführliche Tafel zur Reduktion der sphärischen Breiten auf sphäroidische Breiten, nebst $\log m$ und k berechnet und in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie", erste Abhandlung S. 37—45 mitgeteilt. (*Carl Friedrich Gauss*' Werke, IV. Band, Göttingen 1873, S. 293—300.)

Auf Seite [42]—[43] unseres Anhangs haben wir einen Auszug der *Gauss*schen Tafel abgedruckt, mit dem 10fachen Intervall $\Delta u = 10'$, ($\Delta u = 1'$ bei *Gauss*). Ausserdem haben wir auf Seite [41] eine Hilfstafel zur Reduktion der geographischen Längen mit der Konstanten α beigegeben.

Unsere Haupttafel Seite [42]—[43] verlangt Interpolation mit *zweiten Differenzen*, wozu § 31. S. 204 Anleitung giebt. Damit bekommt man nahezu dieselbe Genauigkeit, wie mit der Originaltafel selbst, so dass für einzelne Fälle, z. B. Übungsbeispiele, der Auszug als Ersatz des nicht immer zugänglichen Originals dienen kann. Auch giebt der Auszug eine bequeme *Übersicht* der Gesamt-Verhältnisse; man sieht z. B., dass $\log m$ nicht über 0·1 geht auf der ganzen breiten Zone von 51° 20′ bis 54° 0′. Ähnlich verhält es sich mit den Azimut-Korrektionen, welche von der Tafel-

grösse k abhängen; man kann also auf dieser ganzen nahe 3° oder rund 300 000 Meter breiten Zone eine Triangulierung *sphärisch* berechnen, ohne eine andere Nebenarbeit als das Verwandeln der Breiten φ und u durch Aufschlagen in der Tafel.

Man hat dabei zuerst *einen* astronomisch bestimmten Ausgangspunkt vom Ellipsoid auf die Kugel zu übertragen, dann das ganze Dreiecksnetz sphärisch zu berechnen, und zum Schluss *alle* Kugel-Breiten u wieder auf φ, d. h. auf das Ellipsoid zu übertragen. Dieses ist der Grund, warum *Gauss* die *Kugel*breite u als unabhängige Veränderliche für die Tafel genommen hat.

Ausser der *Gauss*schen Tafel ist in neuerer Zeit noch eine zweite solche Tafel mit südlicherer Normalbreite, nämlich $Q = 46° 30'$, berechnet worden von *Marek* und *Horsky*. Dieselbe, welche, wie die *Gauss*sche Tafel, die *Bessel*schen Erddimensionen zu Grunde legt, ist mitgeteilt in dem Werke von *Marek* „Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, Budapest 1875", S. 252 bis 262. Die Breiten sind wie bei *Gauss* auf 0,00001″ angegeben, dann *log m* auf 0·01 und k auf 0,01″. Das Intervall Δu ist 1′ 40″ = 100″. Einiges weitere hierüber haben wir früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1877", S. 40—46 mitgeteilt, und einen Auszug der *Marek*schen Tafel gab unsere vorige Auflage, Karlsruhe 1878, S. 403—404.

Die *Gauss*sche Tafel geht von 46° 40′ bis 58° 40′, die *Marek*sche Tafel geht von 41° 30′ bis 51° 30′; und es ist somit nun die ganze 17° 10′ breite Zone von 41° 30′ bis 58° 40′ von Mitteleuropa für konforme Abbildung eingerichtet, und zwar ist die 4° 50′ breite Zone zwischen 46° 40′ und 51° 30′ doppelt vorhanden. Innerhalb dieser letzteren Zone ist diejenige Tafel die bequemere, welche sich auf die näherliegende Normalbreite bezieht, oder welche ein Vergrösserungsverhältnis m giebt, welches näher dem Wert 1 ist. Ungefähr bei 49° 35′ geben beide Tafeln denselben Wert $\log m = 0.000\,0001{\cdot}5$, es ist also z. B. für Süddeutschland im allgemeinen die *Gauss*sche und die *Marek*sche Tafel nahezu gleich günstig.

Als *Anwendung* der *Gauss*schen Theorie und der soeben beschriebenen Hilfstafeln wollen wir die Berechnung unseres kleinen sphäroidischen Normal-Beispiels (1) § 77. S. 386, nehmen in dieser Form:

$$\textit{Gegeben}: \quad \varphi_1 = 49° \, 30' \, 0'' \qquad \varphi_2 = 50° \, 30' \, 0'' \tag{1}$$

$$l = 1° \, 0' \, 0'' \tag{2}$$

Gesucht: α_1, α_2 und s.

Das erste ist, die Breiten φ_1 und φ_2 auf die Kugel zu übertragen, d. h. die entsprechenden u_1 und u_2 aus der Tafel zu entnehmen. Von Seite [42] unseres Anhangs haben wir:

u	φ	Differenzen	
49° 20′ 0″	49° 21′ 44,31358″	+ 10′ 1,07480″	— 0,01736″
49° 30′ 0″	49° 31′ 45,38838″		
10′ 0″ = 600″		= 601,07480″	

$\varphi = 49° \, 30'$ hat gegen die Nachbarwerte die Differenzen:

$$\left.\begin{array}{ll} & 8' \, 15{,}68642'' = 495{,}68642'' \\ \text{und} & 1' \, 45{,}38838'' = 105{,}38838'' \end{array}\right\} 601{,}07480''$$

Man berechnet zuerst näherungsweise:

$$z = \frac{495{,}68642}{601{,}07480} = 0{,}82466$$

Dann für die zweite Differenz nach Anleitung von (4) S. 204:

$$\frac{1-z}{2} = \frac{0{,}17534}{2} = 0{,}08767,$$

$$(-0{,}08767)(-0{,}01736'') = +0{,}00152''$$

$$\text{hiezu erste Differenz} = 601{,}07480''$$

$$\text{Verbesserte erste Differenz} = 601{,}07632''$$

$$\text{Proportional-Teil} = \frac{495{,}68642}{601{,}07632}\,600'' = 494{,}79882'' = 8'\ 14{,}79882''$$

Also: $u = 49°\ 28'\ 14{,}79882''$

Die Rechnung nach der *Gauss*schen Originaltafel gab auf 0,00001″ genau dasselbe, nämlich in Zusammenstellung für alle Werte die uns hier interessieren:

Ellipsoid, φ	Kugel, u	$\log m$	k	
49° 30′ 0″	$u_1 = 49°\ 28'\ 14{,}79881''$	1·609	2,049″	
50° 0′ 0″	49° 58′ 11,67462″	0·969	1,462″	(3)
50° 30′ 0″	$u_2 = 50°\ 28'\ 8{,}70541''$	0·525	0,973″	

Von der zweiten dieser drei Angaben brauchen wir für die Zwecke unseres Beispiels nur etwa $\log m = 0{\cdot}969$, wenn wir den Mittelwert nach der Formel (23) § 89. S. 440 berechnen wollen, welche in der dort angegebenen Mittelbildung auch für $\log m$ gilt, und in unserem Falle giebt:

$$\log m = \frac{1{\cdot}609 + 4 \times 0{\cdot}969 + 0{\cdot}525}{6} = 1{\cdot}017 \tag{4}$$

Nun wird der Längenunterschied $l = 1°\ 0'\ 0''$ von (2) auf die Kugel reduziert, was durch Multiplikation mit der Konstanten α, bzw. durch Benützung der Hilfstafel Seite [41] des Anhangs geschieht, mit dem Ergebnis:

$$\lambda = \alpha l = 1°\ 0'\ 1{,}630505'' \tag{5}$$

Nun macht man mit u_1 und u_2 von (3) nebst λ von (5) eine sphärische Polar-Dreiecksberechnung nach (4) und (5) S. 295, wodurch man erhält:

$$\beta_1 = 32°\ 25'\ 21{,}4923'' \qquad \beta_2 = 33°\ 11'\ 19{,}4197'' \tag{6}$$

und $\log \sin \frac{\sigma}{2} = 8.015\,5452{\cdot}409$, $\frac{\sigma}{2} = 0°\ 35'\ 37{,}85453''$

$$s' = A\frac{\sigma}{\varrho} \text{ giebt } \log s' = 5.121\,6104{\cdot}130$$

hiezu nach (4) $\quad -\log m = \quad -1{\cdot}017$

$$\log s = 5.121\,6103{\cdot}113\ ,\quad s = 132\,315{,}375^{m} \tag{7}$$

Es folgen noch die Azimut-Reduktionen nach den Formeln (29) und (30) § 90. S. 445. Man hat hiezu:

$$k_1 = 2{,}049'' \qquad k_2 = 0{,}973''$$
$$\alpha_1 = 32°\ 25' \qquad \alpha_2 = 33°\ 11'$$

Die Ausrechnung giebt:

$$\psi_1 = \alpha_1 - \beta_1 = +0{,}0189'' \qquad -\psi_2 = \alpha_2 - \beta_2 = -0{,}0149''$$

Diese Reduktionen zu β_1 und β_2 in (6) hinzugefügt, geben:

$$\alpha_1 = 32° \; 25' \; 21{,}5112'' \qquad \alpha_2 = 33° \; 11' \; 19{,}4048'' \qquad (8)$$

In diesen (7) und (8) besteht die Auflösung der gestellten Aufgabe, und diese (7) und (8) stimmen auch hinreichend überein mit den entsprechenden Zahlenwerten von (1) S. 386.

§ 92. Doppel-Projektion der Preussischen Landes-Aufnahme.

Wenn man nach der im bisherigen dargelegten *Gauss*schen Theorie das Ellipsoid auf eine Kugel abgebildet hat, so dass jedem Punkte mit der Länge l und der Breite φ auf dem Ellipsoid, ein Punkt mit der Breite u und der Länge λ auf der Kugel entspricht, so kann man mit diesen sphärischen geographischen Coordinaten u, λ beliebige sphärische Umwandlungen vornehmen, z. B. daraus sphärische *rechtwinklige* Coordinaten x, $\mathfrak{y}$ ableiten, und diese letzteren Coordinaten kann man wieder konform in ebene rechtwinklige Coordinaten x, $\mathfrak{y}$ abbilden.

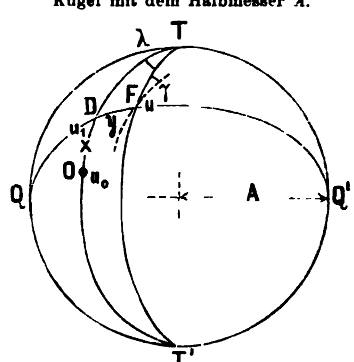
Dieses ist das System, welches von General *Schreiber* für die trigonometrische Abteilung der Preussischen Landes-Aufnahme angenommen worden ist.

Wir werden die Theorie der dadurch bestimmten Doppelprojektion nach den darüber vorhandenen Veröffentlichungen*) hier entwickeln, und haben deshalb zuerst:

I. Berechnung der sphärischen rechtwinkligen Coordinaten x, $\mathfrak{y}$.

In Fig. 1. haben wir die *Gauss*sche Kugel, vom Halbmesser A, und darauf einen Meridian TOT', von welchem die Längen λ gezählt werden.

Fig. 1.
Kugel mit dem Halbmesser A.



Irgend ein Punkt F habe von diesem Anfangs-Meridian an gezählt, die Länge λ, nach Osten positiv, und ferner die Breite u. Derselbe Punkt habe auch die rechtwinkligen Coordinaten x, $\mathfrak{y}$ in Bezug auf den Ursprungs-Meridian, in welchem der Nullpunkt O mit der Breite u_0 angenommen wird. Die Ordinate $\mathfrak{y}$ liegt auf einem Bogen QQ' rechtwinklig zu TOT' und bestimmt auf TO die Fusspunktsbreite u_1 des Punktes D. Wir betrachten auch einen Parallelbogen zu TOT', um die Meridian-Konvergenz γ zur Anschauung zu bringen, welche in dem Punkte F gegen den Anfangs-Meridian stattfindet.

Wenn wir nun die Aufgabe stellen, aus gegebenen u_0, u, λ die rechtwinkligen Coordinaten x, $\mathfrak{y}$, nebst der Meridian-Konvergenz γ zu bestimmen, so erinnern wir uns zugleich, dass wir diese Aufgabe in Bezug auf die *Soldner*schen Coordinaten bereits früher in § 54. S. 292—293 behandelt haben. Sei es nun, dass wir jene frühere

*) „Verhandlungen der 1887er Konferenz in Nizza der perm. Komm. d. intern. Erdm., Berlin 1888, Annex X[b]", S. 10—12, und frühere Mitteilung in *Jordan-Steppes* „Deutsches Vermessungswesen, 1882, I.". S. 151—154. Weiteres ist auch zitiert und erläutert in „Zeitschr. f. Verm., 1886", S. 253—256, und „Zeitschr. f. Verm., 1889", S. 8—14.

Entwicklung wieder benützen, oder die einfachen Formeln aus Fig. 1. unmittelbar ab lesen, wir werden haben:

$$tang\, u_1 = \frac{tang\, u}{cos\, \lambda} \quad , \quad x = \frac{u_1 - u_0}{A} \tag{1}$$

$$sin \frac{\mathfrak{y}}{A} = sin\, \lambda\, cos\, u \tag{2}$$

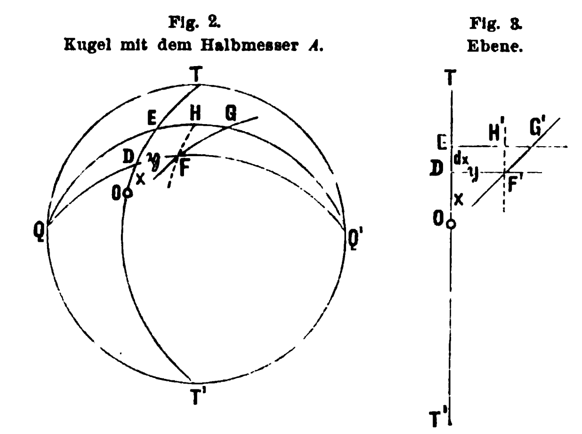
$$tang\, \gamma = tang\, \lambda\, sin\, u \tag{3}$$

Diese Formeln werden wir in dieser *geschlossenen* Form benützen, und nicht wie früher in § 54. in Reihen entwickeln, weil es sich um grosse Werte x und $\mathfrak{y}$ handelt, bei welchen die Entwicklung viele Glieder haben müsste.

II. Konforme ebene Abbildung der rechtwinkligen Coordinaten. *)

In Fig. 2. haben wir wieder dieselben Verhältnisse wie in der vorhergehenden Fig. 1., jedoch mit *zwei* Punkten F und G, welche bzw. die rechtwinkligen Coordinaten x, $\mathfrak{y}$ und x', $\mathfrak{y}'$ haben.

Fig. 3. zeigt ein ebenes Abbild von Fig. 2., wobei zuerst der Anfangs-Meridian $TEDOT'$ wieder als $TEDOT'$ erscheint, und zwar in *unveränderter* Grösse, so dass also ODE in Fig. 2. und in Fig. 3. in gleichen Massen dargestellt sind, namentlich auch $OD = OD$ und $DE = DE$ in *beiden* Figuren.



Da der Punkt D die Breite u_1 und O die Breite u_0 hat, erhält man die Abscisse x des Punktes D und aller Punkte auf der Ordinate DF' aus der Differenz $u_1 - u_0$:

$$x = (u_1 - u_0) \frac{A}{\varrho} \tag{4}$$

wobei: $$log \frac{A}{\varrho} = 1.490\,6022{\cdot}671$$

und für die *Gauss*sche Kugel: $u_0 = 52° \; 40' \; 0''$.

Die Ordinatenlinien DF' und EG' in Fig. 3. sind geradlinig rechtwinklig zu TT' gezogen, und die Ordinatenlängen $DF' = y$ und $EG' = y'$ sollen so gewählt werden, dass die Abbildung konform wird, d. h. so dass die beiden rechtwinkligen Dreiecke FGH und $F'G'H'$, die wir nun als unendlich klein annehmen, einander *ähnlich* werden. Hiezu ist nötig, dass zwischen den Katheten ein konstantes Verhältnis besteht:

$$\frac{F'H'}{FH} = \frac{H'G'}{HG} = m \tag{5}$$

---

*) Diese Abbildung ist in der Karten-Projektionslehre unter dem Namen sphärische „*Merkator*"-Projektion bekannt, wobei jedoch an Stelle des Meridians TOT' von Fig. 2., der Äquator der Erde, und an Stelle von $\mathfrak{y}$ die geographische Breite tritt.

Hiebei ist:

$$\left.\begin{array}{ll} F'H' = dx \quad , & H'G' = dy \\ FH = dx \cos\frac{\mathfrak{y}}{A} \quad , & HG = d\mathfrak{y} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Daraus folgt:

$$dy = \frac{1}{\cos\frac{\mathfrak{y}}{A}}\, dy \qquad (7)$$

Die Integration dieser Gleichung giebt:

$$y = \frac{A}{\mu} \log tang\left(45° + \frac{\mathfrak{y}}{2A}\right) \qquad (8)$$

wobei, wie gewöhnlich, μ der logarithmische Modulus ist. Nachdem die Beziehung zwischen $\mathfrak{y}$ und y bestimmt ist, hat man auch das Vergrösserungs-Verhältnis m nach (4) und (7):

$$m = \frac{dy}{d\mathfrak{y}} = \sec\frac{\mathfrak{y}}{A} \qquad (9)$$

Die Funktion (8) kann man in eine Reihe entwickeln, indem man zunächst setzt:

$$tang\left(45° + \frac{\mathfrak{y}}{2A}\right) = \frac{1 + tang\frac{\mathfrak{y}}{2A}}{1 - tang\frac{\mathfrak{y}}{2A}} = \frac{1+t}{1-t} \qquad (10)$$

Die logarithmische Reihe (13) S. 198 hierauf angewendet giebt:

$$\log tang\left(45° + \frac{\mathfrak{y}}{2A}\right) = 2\mu\left(t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \dots\right) \qquad (11)$$

Die Tangenten-Reihe (19) S. 199 giebt:

$$tang\frac{\mathfrak{y}}{2A} = t = \left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)^5 + \dots$$

$$t^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^3 + \frac{1}{32}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^5 + \dots$$

$$t^5 = \frac{1}{32}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^5 + \dots$$

Wenn man diese t, t^3, t^5 in (11) einsetzt, und dann den Ausdruck (8) bildet, so erhält man:

$$y = \mathfrak{y} + \frac{\mathfrak{y}^3}{6A^2} + \frac{\mathfrak{y}^5}{24A^4} + \dots \qquad (12)$$

Dabei ist $\mathfrak{y}$ linear (in Metern) vorausgesetzt; wenn man aber $\mathfrak{y}$ in Winkelmass hat, was durch $\mathfrak{y}''$ (d. h. $\mathfrak{y}$ in Sekunden) ausgedrückt sein soll, so hat man (12) so zu schreiben:

$$y = A\left(\frac{\mathfrak{y}''}{\varrho''} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{y}''}{\varrho''}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathfrak{y}''}{\varrho''}\right)^5 + \dots\right) \qquad (13)$$

Diese Entwicklung bis zur fünften Ordnung ist ausreichend für Abstände etwa bis zu 3°; für weitere Ausdehnung hat die Formel (12) nach einer Entwicklung von *Schols**) bis zur elften Ordnung folgende Glieder:

---

*) Annales de l'école polytechnique de Delft, 1re livraison, Leide, 1884. Sur l'emploi de la projection de *Mercator* pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, par *Ch. M. Schols.*

$$y = \mathfrak{y} + \frac{1}{6}\frac{\mathfrak{y}^3}{A^2} + \frac{1}{24}\frac{\mathfrak{y}^5}{A^4} + \frac{61}{5040}\frac{\mathfrak{y}^7}{A^6} + \frac{277}{72576}\frac{\mathfrak{y}^9}{A^8} + \frac{50521}{39916800}\frac{\mathfrak{y}^{11}}{A^{10}} \tag{14}$$

und die Umkehrung:

$$\mathfrak{y} = y - \frac{1}{6}\frac{y^3}{A^2} + \frac{1}{24}\frac{y^5}{A^4} - \frac{61}{5040}\frac{y^7}{A^6} + \frac{277}{72576}\frac{y^9}{A^8} - \frac{50521}{39916800}\frac{y^{11}}{A^{10}} \tag{15}$$

Bleiben wir zunächst bei dem zweiten Gliede der Reihe (12) oder (14) stehen, so haben wir:

$$y = \mathfrak{y}\left(1 + \frac{\mathfrak{y}^2}{6A^2}\right) \tag{16}$$

Dieses stimmt überein mit der früheren Formel (4) oder (5) von § 51. S. 282 für die *Gauss*schen konformen rechtwinkligen Coordinaten, in erster Annäherung, wodurch bestätigt ist, was schon vorher erkannt war (vgl. auch S. 287), dass jene *Gauss*sche Projektion und die sphärische *Merkator*-Projektion in erster Näherung identisch sind.

Damit ist auch bewiesen, dass die früheren Formeln für Reduktion der Richtungswinkel und der Entfernung, in erster Näherung auf unseren neuen Fall angewendet werden dürfen, wenn man nur überall das frühere η nun durch $\mathfrak{y}$, oder in den Korrektionsgliedern durch y, sowie r durch A ersetzt. Wir nehmen also von (10) S. 283 die Formel:

$$\log s - \log S = (y + y')^2 \frac{\mu}{8A^2} + (y' - y)^2 \frac{\mu}{24A^2} \tag{17}$$

Dabei ist S eine Seite in Wirklichkeit und s dieselbe Seite in der Projektion; die Konstanten zu (17) sind (für Einheiten der siebenten Logarithmenstelle):

$$\log \frac{\mu}{8A^2} = 2{\cdot}124\,6395 - 20 \quad , \quad \log \frac{\mu}{24A^2} = 1{\cdot}647\,5183 - 20$$

Auch das Vergrösserungs-Verhältnis m, dessen strenge Formel in (9) enthalten ist, ist in erster Näherung kurz entwickelt:

$$m = 1 + \frac{y}{2A^2} \tag{18}$$

oder:

$$\log m = y^2 \frac{\mu}{2A^2} \qquad \left(\log \frac{\mu}{2A^2} = 2{\cdot}726\,6995 - 20\right)$$

Ferner haben wir von (16) S. 284 die Reduktion für Richtungswinkel:

$$\alpha - \alpha_0 = (x' - x)(y' + y)\frac{\varrho}{4A^2} - (x' - x)(y' - y)\frac{\varrho}{12A^2} \tag{19}$$

Dabei ist:

$$\log \frac{\varrho}{4A^2} = 1.102\,3103 - 10 \quad , \quad \log \frac{\varrho}{12A^2} = 0.625\,1891 - 10$$

Diese Formeln (17) und (19) sind für das grosse Coordinatensystem der preussischen Landes-Aufnahme (vgl. L. A. S. 344) ausreichend; die Entwicklung auf höhere Potenzen giebt *Schols* in der oben zitierten Abhandlung (Anmerkung S. 450).

Wir wollen die Anwendung der vorstehenden Formeln an unserem schon mehrfach benützten hannoverschen Beispiele Ägidius-Wasserturm zeigen.

Wie schon auf S. 336 angegeben ist, haben diese beiden Punkte folgende geographische Coordinaten im Systeme der Landes-Aufnahme:

	Breite	Länge L	$l = L - 31°$	
Ägidius	$\varphi' = 52° \ 22' \ 14{,}9611''$	$L' = 27° \ 24' \ 24{,}6290''$	$l' = -3° \ 35' \ 35{,}3710''$	(20)
Wasserturm	$\varphi = 52° \ 21' \ 49{,}9080''$	$L = 27° \ 22' \ 25{,}0168''$	$l = -3° \ 37' \ 34{,}9832''$	
Differenzen	$0' \ 25{,}0531''$	$1' \ 59{,}6122''$	$1' \ 59{,}6122''$	

Die Reduktion auf die *Gauss*sche Kugel geschieht bei φ durch Anwendung der Hilfstafel Seite [42]—[43] (bzw. der *Gauss*schen Originaltafel), und bei l durch Multiplikation mit der Konstanten $\alpha = 1{,}000\,452\,918$, bzw. nach der hiezu gehörigen Hilfstafel Seite [41]. Man findet auf diese Weise:

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & u' = 52° \ 20' \ 13{,}92412'' & \lambda' = -3° \ 35' \ 41{,}22966'' \\ \text{Wasserturm} & u = 52° \ 19' \ 48{,}90327'' & \lambda = -3° \ 37' \ 40{,}89604'' \end{array} \Bigg\} \quad (21)$$

Die weitere Rechnung geht nach den sphärischen Formeln (1) und (2) und giebt:

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & u_1' = 52° \ 23' \ 30{,}36875 \ , & \left(\frac{\mathfrak{y}'}{A}\,\varrho\right) = 2° \ 11' \ 44{,}00948'' = 7904{,}00948'' \\ \text{Wasserturm} & u_1 = 52° \ 23' \ \ 9{,}01197 \ , & \left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\,\varrho\right) = 2° \ 12' \ 58{,}29036'' = 7978{,}29036'' \end{array} \Bigg\} \quad (22)$$

Zugleich berechnet man nach (3) auch die beiden Meridian-Konvergenzen:

$$\begin{array}{ll} \text{Ägidius} & \gamma' = 2° \ 50' \ 49{,}5606'' \\ \text{Wasserturm} & \gamma = 2° \ 52' \ 23{,}4645'' \end{array} \Bigg\} \ \gamma - \gamma' = 1' \ 33{,}9039'' \quad (23)$$

Von (22) geht man über zu den rechtwinkligen ebenen Coordinaten x, y, und zwar für x nach (4) und für y nach der Reihe (13). Die Ausrechnung giebt:

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & y' = -244\,656{,}086^{\text{m}} & x' = -30624{,}970^{\text{m}} \\ \text{Wasserturm} & y = -246\,956{,}480^{\text{m}} & x = -31285{,}873^{\text{m}} \end{array} \Bigg\} \quad (24)$$

Zu diesen von uns selbst auf dem angegebenen Wege berechneten Coordinaten stellen wir auch die im Jahre 1887 amtlich von der Landes-Aufnahme erhaltenen Werte zur Vergleichung:

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & y' = -244\,656{,}090^{\text{m}} & x' = -30\,624{,}971^{\text{m}} \\ \text{Wasserturm} & y = -246\,956{,}479^{\text{m}} & x = -31\,285{,}875^{\text{m}} \end{array} \Bigg\} \quad (24^*)$$

Die Übereinstimmung zwischen (24) und (24*) ist genügend. Wir behalten (24*) bei, und haben davon:

$$y' - y = +2300{,}389^{\text{m}} \qquad x' - x = +660{,}904^{\text{m}} \quad (25)$$

Hieraus die Richtungswinkel, von Nord über Ost, zunächst ohne Korrektionsglieder:

$$(WA)_0 = a_0 = 73° \ 58' \ 14{,}12'' \qquad (AW)_0 = a'_0 = 253° \ 58' \ 14{,}12'' \quad (26)$$

Hiezu kommen die Korrektionen nach (19), welche bei der kurzen Entfernung AW nur wenig ausmachen, nämlich bzw. $-0{,}41''$ und $+0{,}41''$, so dass (25) übergeht in:

$$\begin{array}{llll} \text{Richtungswinkel} & (WA) = a = 73° \ 58' \ 13{,}71'' & (AW) = a' = 253° \ 58' \ 14{,}53'' & (27) \\ \text{hiezu von (23) Merid.-Konv.} & -\ 2° \ 52' \ 23{,}46'' & -\ 2° \ 50' \ 49{,}56'' & \\ \text{Also Azimute:} & \alpha = 71° \ \ 5' \ 50{,}25'' & \alpha' = 251° \ \ 7' \ 24{,}97'' & (28) \end{array}$$

Wir wenden auch die Formel (17) an, und finden aus den Differenzen (25):

$$\log s = 3.379\,0236 \quad (29)$$

hiezu nach (17): $\qquad - \quad 3220$

$$\text{also} \ \log S = 3.378\,7016 \quad (30)$$

Die hier auftretende logarithmische Korrektion + 3220 bekommt man auch aus der Formel (18) für *log m*, wenn man für y das *Mittel* aus y und y' in (24*) nimmt, nämlich $y = -245\,806^m$; dieses genügt hier, weil die fragliche Entfernung s sehr klein ist.

Zur Berechnung von m in beiden Punkten getrennt, hat man auch noch die scharfe Formel (9), welche auf (22) angewendet giebt:

$$\begin{array}{ll} \text{Ägidius} & \log sec\, 2^\circ\, 11'\, 44{,}009'' = 0{,}000\,3189{\cdot}4 \\ \text{Wasserturm} & \log sec\, 2^\circ\, 12'\, 58{,}290'' = 0{,}000\,3249{\cdot}6 \\ \hline & \text{Mittel } \log m = 0{,}000\,3219{\cdot}5 \end{array} \quad (31)$$

Dieses stimmt mit 3220 bei (29) und (30).

Nun können wir zur Versicherung auch noch frühere Berechnungen zuziehen, nämlich in (27) S. 328 wurde gefunden $\log s = 3.378\,7016$, was mit (30) stimmt, und die beiden Azimute:

$$\alpha = 71^\circ\, 5'\, 50{,}33'' \qquad \alpha' = 71^\circ\, 7'\, 25{,}05'' \quad (32)$$

Diese α und α' sollen mit (28) übereinstimmen (abgesehen von $\pm 180^\circ$ bei α'). Wenn nun kleine Differenzen von 0,08″ zwischen (28) und (32) bestehen, während wir doch in allen trigonometrischen Rechnungen mindestens auf 0,01″ scharf gerechnet haben, so ist das hier doch unerheblich, weil der Rechnungsweg über rechtwinklige lineare Coordinaten (24) bzw. (24*) geführt hat, die auf $0{,}001^m$ als letzte Recheneinheit angegeben wurden, so dass sie die gewöhnlichen Abrundungs-Unsicherheiten in den rechtwinkligen Coordinaten bei kurzer Entfernung bereits 0,01″ erheblich beeinflussen.

Oder kurz: Ebenso wie auf S. 338—339 die Berechnungen für geographische Coordinaten und rechtwinklige *Soldner*sche Coordinaten in Bezug auf den Meridian von Celle hinreichend unter sich gestimmt haben, so stimmen auch nun alle Berechnungen mit den konformen rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf den 31. Längengrad als x-Axe, sowie alle unsere auf die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel gemachten Berechnungen völlig hinreichend unter sich überein.

Kapitel X.

Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

§ 93. Theorie des geodätischen Dreiecks in erster Näherung.

Unter einem „geodätischen Dreieck“ verstehen wir ein aus drei geodätischen Linien auf irgend einer krummen Fläche gebildetes Dreieck, dessen Seiten die Längen der geodätischen Linien sind (zwischen den Eckpunkten linear gemessen), und dessen Winkel diejenigen drei Winkel sind, welche die Tangenten der geodätischen Linien in den Eckpunkten einschliessen.

Unsere ganze nachfolgende, in diesem Kapitel X. zu behandelnde Theorie macht die Annahme, dass die Seiten der geodätischen Dreiecke verhältnismässig *klein* seien gegen die in Betracht kommenden Krümmungshalbmesser von Normalschnitten der

krummen Fläche, so dass konvergierende Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von $\frac{s}{R}$ (wo s eine geodätische Linie und R ein Krümmungs-Halbmesser ist) immer möglich sind.

Ausserdem machen wir bei den in diesem § 93. zu entwickelnden Formeln die noch mehr beschränkende Annahme, dass für jeden Normalschnitt der krummen Fläche, im Bereiche unserer Untersuchung, die *Änderung* der Krümmung in den Formeln unberücksichtigt bleiben kann (wobei aber verschiedene Normalschnitte verschiedene Krümmungen haben.

Um über alle hiebei vorkommenden Vernachlässigungen von vornherein Klarheit zu schaffen, schicken wir einige hierauf bezügliche Entwicklungen voraus.

Allgemeine Reihen-Entwicklungen.

In Fig. 1. sei eine Kurve AC in Bezug auf ihre Tangente AB als x-Axe bestimmt durch die Gleichung:

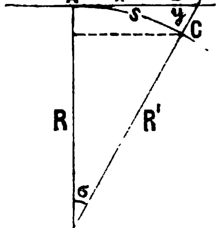


Fig. 1.

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^3}{S^2} + \dots \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{R} + \frac{3x^2}{S^2} + \dots \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R} + \frac{6x}{S^2} + \dots \tag{3}$$

Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser ϱ ist bekanntlich:

$$\varrho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Wenn man hier die Reihen (2) und (3) einsetzt und entwickelt, so erhält man:

$$\varrho = R\left(1 - 6\frac{xR}{S^2} + x^2 \dots\right) \tag{4}$$

oder:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{6xR}{S^2} + \dots\right) = \frac{1}{R} + \frac{6x}{S^2} + x^2 \dots \tag{5}$$

Dabei ist R der Krümmungs-Halbmesser für $x = 0$, d. h. der Krümmungs-Halbmesser der Kurve AB im Punkte A, wie in Fig. 1. mit $AK = R$ eingeschrieben ist.

Auch die Kurvenlänge $AC = s$ kann man leicht angeben, indem man entwickelt:

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = x + \frac{x^3}{6R^2} + x^4 \dots \tag{6}$$

Nachdem so die Punkte A, K und C bestimmt sind, ziehen wir die Gerade KC, und bestimmen dadurch auch eine Strecke $KC = R'$ und einen Centriwinkel $AKC = \sigma$, wofür die strengen Gleichungen bestehen:

$$R' = \sqrt{x^2 + (R-y)^2} \quad \text{und} \quad tang\, \sigma = \frac{x}{R-y}$$

Diese Gleichungen geben entwickelt:

$$R' = R\left(1 - \frac{x^3}{R\,S^2} + x^4 \ldots\right) = R\left(1 - \frac{s^3}{R\,S^2} + s^4 \ldots\right) \tag{7}$$

$$\sigma = \frac{x}{R} + \frac{x^3}{2\,R^3} + \ldots \quad \text{oder } \sigma = \frac{s}{R} + \frac{s^4}{R^4} \ldots \tag{8}$$

Hiebei ist die Beziehung zwischen x und s nach (6) benützt, und man sieht aus der zweiten Form (8), dass man bis zur Ordnung σ^3 einschliesslich, schlechthin setzen darf $\sigma = \frac{s}{R}$.

Wenn man also z. B. die Funktion $\frac{e}{R'} \sin \sigma$ zu bilden hat, und man schreibt dafür kurz $\frac{e}{R} \sin \sigma$, so hat man nach (7) nur ein Glied von der Ordnung $\sigma^3 \sin \sigma$, d. h. von der Ordnung σ^4 vernachlässigt u. s. w.

Durch solche Betrachtungen wird man im folgenden sich immer überzeugen können, dass nur Glieder vernachlässigt werden, die in der Potenz-Ordnung höher stehen, als die letzten beibehaltenen Glieder, und dass alle Glieder von der letzten beibehaltenen Ordnung wirklich vorhanden sind.

In diesem Sinne kann man z. B. aus den Gleichungen (7), (8) und (10) S. 358 mit $\alpha = 0$ oder $\alpha = 90°$ schliessen, dass eine kurze geodätische Linie in der Richtung eines *Haupt*-Normalschnittes in erster Näherung als eine *ebene* Kurve behandelt werden kann, oder dass hiemit nur kleine Azimutwinkel vernachlässigt werden, welche im Vergleich mit $\alpha' - \alpha_1$ der nachfolgenden Fig. 2. S. 456, Grössen nächst höherer Ordnung sind.

Von früheren Entwicklungen werden wir von § 67. und § 71. einiges hier wieder benützen, wir wollen aber dabei bemerken, dass alle jene Entwicklungen von § 67. — § 71. innerhalb der ersten Näherungen, die wir jetzt allein brauchen, nicht bloss für das Ellipsoid, sondern auch für irgend welche krumme Fläche (wie bei den nachfolgenden Fig. 2. und 3.) gültig sind, wenn man unter $V^2 = 1 + \eta^2 = \frac{N}{M}$ nicht speziell die Haupt-Krümmungshalbmesser N und M des Ellipsoides, sondern allgemeiner irgend einer krummen Fläche versteht, und wenn man damit auch η^2 nicht speziell $= e'^2 \cos^2 \varphi$ sondern allgemeiner $\eta^2 = \frac{N - M}{M}$ setzt, jedoch mit der Beschränkung, dass η^2 eine *kleine* Grösse ist.

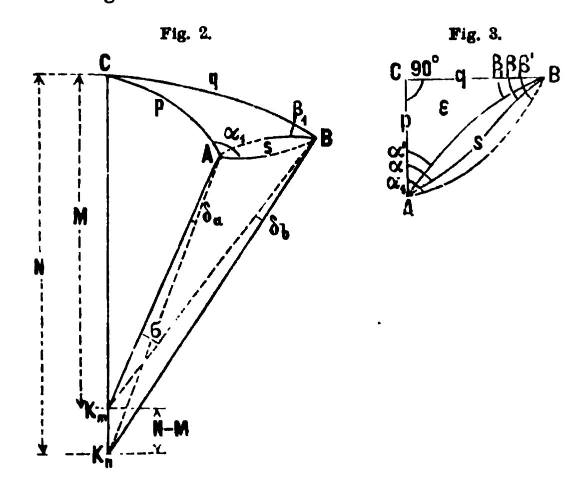
Dass jene Formeln von § 67. — § 71., soweit wir sie nun brauchen (z. B. mit Vernachlässigung von η^4 neben η^2), diesen allgemeineren Sinn haben, davon kann man sich durch eine kurze Rückschau auf die Entstehung jener Formeln, ohne die ganze Entwicklung zu wiederholen, überzeugen.

Das rechtwinklige geodätische Dreieck mit Katheten in den Hauptkrümmungs-Richtungen.

Wir betrachten in den umstehenden Fig. 2. und Fig. 3. ein kleines rechtwinkliges geodätisches Dreieck, dessen Katheten $CA = p$ und $CB = q$ in den Richtungen der beiden Haupt-Krümmungen liegen, auf einer krummen Fläche, welche nach CA den Krümmungs-Halbmesser M und nach CB den Krümmungs-Halbmesser N hat.

Wir nehmen dabei die Bezeichnungen wie gewöhnlich für das Umdrehungs-

Ellipsoid, und denken unter p und M die Beziehung zum Meridian, unter q und N die Beziehung rechtwinklig zum Meridian, indessen gelten die nächsten Betrachtungen auch allgemeiner.



Unter K_m und K_n verstehen wir die beiden Krümmungs-Mittelpunkte, so dass für einen kleinen Bogen p die beiden Längen $C K_m$ und $A K_m$ beide $= M$ und entsprechend $C K_n = B K_n = N$ angenommen werden kann; damit ist auch die kleine Entfernung $K_n K_m = N - M$.

Durch die 4 Punkte A, B, K_m, K_n sind auch die beiden Normalschnitte zwischen A und B bestimmt, nämlich $K_m A B$ der Normalschnitt von A nach B und $K_n B A$ der Normalschnitt von B nach A, ähnlich wie früher in Fig. 1. § 67. S. 347; und von gleicher Bedeutung wie früher sind auch die zwei kleinen Winkel δ_a und δ_b bei A und B, sowie die 4 Azimutalwinkel α_1, α' und β_1, β', welche in Fig. 3. besonders angezeichnet sind.

Den kleinen Winkel δ_a bekommt man aus dem schmalen Dreieck $A K_m K_n$:

$$\sin \delta_a : (N - M) = \sin \frac{p}{M} : N$$

$$\delta_a = \frac{N - M}{M} \frac{p}{N} = \left(\frac{N}{M} - 1\right) \frac{p}{N} \tag{9}$$

Nun machen wir wieder dieselbe Betrachtung wie früher (1) § 69. S. 357, und nehmen von dort in erster Näherung, mit den teilweise nun anderen Bezeichnungen:

$$\tang \mu \sin \delta_a = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha')}{\sin \alpha} \tag{10}$$

Dabei ist μ der Depressionswinkel der Sehne AB gegen die Tangente in A, d. h. in unserem Falle:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{s}{M} \tag{11}$$

Dieses (11) nebst (9) in (10) gesetzt, giebt:

$$\alpha_1 - \alpha' = \frac{p s \sin \alpha}{2 M N} \left(\frac{N}{M} - 1\right) = (\varepsilon) \left(\frac{N}{M} - 1\right) \tag{12}$$

Dabei ist (ε) ein Näherungswert des geodätischen Excesses in dem Sinne von Fig. 4. S. 358, und die Formel (12) ist auch im wesentlichen dieselbe wie (12) S. 358, denn für das Ellipsoid ist:

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + \eta^2 \quad , \quad \text{also } \frac{N}{M} - 1 = \eta^2 \tag{13}$$

also nach (12): $$\alpha_1 - \alpha' = \eta^2 (\varepsilon) \tag{14}$$

und ebenso: $$\beta' - \beta_1 = \eta^2 (\varepsilon) \tag{15}$$

Wir wollen die Bezeichnungen V^2 und η^2, welche wir vom Ellipsoid übernommen haben, hier auch allgemeiner in dem Sinne von (13) anwenden.

Gehen wir nun zur geodätischen Linie AB über, so können wir die früheren Betrachtungen von § 75. ebenfalls auf unseren Fall übertragen, und wir haben dann nach (30) und (31) S. 380, mit den Bezeichnungen von Fig. 3.:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3}\eta^2(\varepsilon) \qquad \beta - \beta_1 = \frac{1}{3}\eta^2(\varepsilon) \tag{16}$$

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{3}\eta^2(\varepsilon) \qquad \beta' - \beta = \frac{2}{3}\eta^2(\varepsilon) \tag{17}$$

Nun betrachten wir die sphärischen Excesse ε_n und ε_m, welche den sphärischen Dreiecken, bzw. den Dreikanten mit den Kugelmittelpunkten K_n und K_m von Fig. 2. zukommen, nämlich:

$$\varepsilon_m = \alpha_1 + \beta' - 90° = \frac{pq}{2M^2} \tag{18}$$

$$\varepsilon_n = \alpha' + \beta_1 - 90° = \frac{pq}{2N^2} \tag{19}$$

Für die geodätische Linie sei entsprechend:

$$\varepsilon = \alpha + \beta - 90° \tag{20}$$

Dann kann man wegen (16) und (17), ε in folgenden zwei Formen darstellen, wo (ε) ein Näherungswert von ε ist:

$$\varepsilon = \varepsilon_m - \eta^2(\varepsilon) = \frac{pq}{2M^2}(1 - \eta^2) \tag{21}$$

oder:

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \eta^2(\varepsilon) = \frac{pq}{2N^2}(1 + \eta^2) \tag{22}$$

Die zweite Gleichung (22) von diesen zwei zusammengehörigen giebt wegen (13) unmittelbar:

$$\varepsilon = \frac{pq}{2N^2}\frac{N}{M} = \frac{pq}{2MN} = \frac{pq}{2r^2} \tag{23}$$

Dabei ist gesetzt:

$$\sqrt{MN} = r \tag{24}$$

Aber auch die erste Gleichung (21) giebt dieselbe Form (23), wenn man die höheren Potenzen η^4 u. s. w. vernachlässigt, denn dann ist:

$$1 - \eta^2 = \frac{1}{1 + \eta^2} = \frac{M}{N} \tag{25}$$

Damit geht auch (21) in (23) über:

Der Excess ε unseres rechtwinkligen geodätischen Dreiecks wird also nach (23) gerade so berechnet, wie der Excess eines *sphärischen* Dreiecks mit dem *mittleren* Krümmungs-Halbmesser r als Kugel-Halbmesser.

Wir wollen nun den Centriwinkel σ bei K_m für die Bogenlänge $AB = s$ bestimmen. Wenn R der Krümmungs-Halbmesser des Bogens AB ist (d. h. der Krümmungs-Halbmesser der krummen Fläche in der Richtung AB), so wird man σ in dieser Form darstellen können:

$$\sigma = \frac{s}{R} + \delta, \text{ wobei } \sin\delta = \frac{R - M}{R}\sin\sigma$$

Dieses bis zur dritten Potenz entwickelt, wird geben:

$$\sigma \doteq \frac{s}{M} - \left(\frac{R}{M} - 1\right)\frac{s^3}{6M^3} \tag{26}$$

Zur Bestimmung von R hat man den *Euler*schen Satz (1) § 34. S. 213:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{M} + \frac{\sin^2\alpha}{N}$$

Daraus kann man entwickeln:

$$\frac{R}{M} = 1 + \eta^2 \sin^2\alpha$$

Also wird (26):

$$\sigma = \frac{s}{M}\left(1 - \frac{\eta^2 s^2 \sin^2\alpha}{6 M^2}\right) \tag{27}$$

Diese Formel gilt auch, wenn $s = q$, also $\alpha = 90°$ gesetzt wird, und damit können wir für das sphärische Dreieck mit dem Mittelpunkte K_m die strenge Gleichung schreiben:

$$\sin\left(\frac{q}{M} - \frac{\eta^2}{6}\frac{q^3}{M^3}\right) = \sin\sigma \sin\alpha_1 = \sin\left(\frac{s}{M} - \frac{\eta^2}{6}\frac{s^3 \sin^2\alpha}{M^3}\right)\sin\alpha_1$$

Wenn man dieses mit α_1 nach (17) entwickelt und in den höheren Gliedern $s \sin\alpha = q$ und $s\cos\alpha = p$ setzt, so wird man finden:

$$q = s\sin\alpha - \frac{p^2 q}{6 M^2}(1 - \eta^2) = s\sin\alpha - \frac{p^2 q}{6 M N} \tag{28}$$

Auf ähnliche Weise haben wir auch entwickelt:

$$p = s\cos\alpha + \frac{p q^2}{3 M N} \tag{29}$$

Da nach (24), $MN = r^2$ ist, haben wir nun als Zusammenfassung von (23), (28) und (29):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{pq}{2r^2} \\ q &= s\sin\alpha - \frac{p^2 q}{6 r^2} \qquad & p &= s\cos\alpha + \frac{p q^2}{3 r^2} \\ \text{oder:}\quad q &= s\sin\alpha - \frac{s^3 \sin\alpha\cos^2\alpha}{6 r^2} \qquad & p &= s\cos\alpha + \frac{s^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3 r^2} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Diese Gleichungen haben bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ dieselbe Form wie die früheren *sphärischen* Formeln von § 44. (3) S. 249 und (8)—(11) S. 250—251.

Übergang zum allgemeinen Dreieck.

Nachdem für das betrachtete rechtwinklige geodätische Dreieck dieselben Formeln gefunden sind, wie früher für das rechtwinklige *sphärische* Dreieck in § 44. S. 249—251, ist auch der Übergang zu einem allgemeinen Dreieck ebenso zu machen, wie für das sphärische Dreieck Fig. 4. S. 251, und wir können daher den *Legendre*schen Satz bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich nun auch für ein solches geodätisches Dreieck, das sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken von der Form Fig. 3. S. 456 zusammensetzen lässt, als bewiesen annehmen.

Das ist aber noch nicht der ganz allgemeine Fall, denn jenes rechtwinklige Dreieck Fig. 3. hat die Besonderheit, dass seine Katheten p und q in den Richtungen der beiden *Haupt*krümmungen der Fläche liegen; und wir können daher nach dem bisherigen Beweisgang den *Legendre*schen Satz nur für solche geodätische Dreiecke als bewiesen annehmen, welche *eine* Seite in einer Haupt-Krümmungsrichtung liegen haben.

Indessen lässt sich der Übergang von einem solchen Dreieck zu einem beliebig gestalteten und auch gegen die Haupt-Krümmungsrichtungen beliebig liegenden Dreieck vollends leicht bewerkstelligen, indem nach Fig. 4. das allgemeine Dreieck ABC in zwei Dreiecke ACD und ABD zerlegt wird, welche die Seite AD in einer Haupt-Krümmungsrichtung gemeinschaftlich haben.

Fig. 4.

Wenn ε_1 und ε_2 die Excesse dieser beiden Dreiecke ACD und ABD sind, so hat man nach Fig. 4.:

$$\frac{b}{d} = \frac{\sin\left(D + \frac{\varepsilon_1}{3}\right)}{\sin\left(C - \frac{\varepsilon_1}{3}\right)} \quad , \quad \frac{c}{d} = \frac{\sin\left(D - \frac{\varepsilon_2}{3}\right)}{\sin\left(B - \frac{\varepsilon_2}{3}\right)}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}\,\frac{\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{3}\operatorname{cotg} B\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{3}\operatorname{cotg} D\right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{3}\operatorname{cotg} C\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{3}\operatorname{cotg} D\right)} \tag{31}$$

Hiebei ist:

$$\varepsilon_1 = \frac{(q-e)\,p}{2r^2} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{(q'+e)\,p}{2r^2} \quad , \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{(q+q')\,p}{2r^2} = \frac{a\,p}{2r^2} = \varepsilon \tag{32}$$

$$\operatorname{cotg} C = \frac{q}{p} \qquad \operatorname{cotg} D = \frac{e}{p} \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{q'}{p}$$

Wenn man diese geometrischen Beziehungen in (31) berücksichtigt, so wird man bald finden:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{cotg} B\right)}{\sin C\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{cotg} C\right)} = \frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{3}\right)} \tag{33}$$

Dieses ist dieselbe Form wie diejenige des *Legendre*schen Satzes für kleine *sphärische* Dreiecke (§ 41.).

Wir heben noch besonders hervor, dass $\frac{a\,p}{2}$ die *Fläche* F des Dreiecks ABC in Fig. 4. ist, dass also nach (32):

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \tag{34}$$

Nun können wir allgemein folgendes aussprechen:

Ein kleines geodätisches Dreieck auf irgend einer krummen Fläche kann wie ein *sphärisches* Dreieck berechnet werden, das mit dem geodätischen Dreieck gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, und auf einer Kugel liegt, deren Halbmesser der *mittlere* Krümmungs-Halbmesser r der krummen Fläche an der Stelle ist, auf welcher das geodätische Dreieck liegt. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Dreiecksseiten s *klein* seien im Verhältnis zum Halbmesser r, und die Rechnung ist nur richtig bis auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 \frac{s^3}{r^3}$ einschliesslich $\left(\text{also } \eta^2 \frac{s^4}{r^4} \text{ und } \eta^4 \frac{s^2}{r^2} \text{ ausschliesslich}\right)$.

Die *Änderung* von r^2 wird innerhalb des Bereiches des Dreiecks vernachlässigt.

§ 94. Kongruente Linien-Abbildung und geodätischer Excess.

Im Anschluss an die Betrachtungen, welche in § 72. zu der geometrischen Definition der geodätischen Linie geführt haben, wollen wir irgend eine Linie auf einer krummen Fläche in einzelnen Elementen nach Streckenmass und Azimutalwinkeln aufgenommen, und entsprechend in einer Ebene aufgetragen denken. Die dadurch entstehende Linie in der Ebene nennen wir „kongruentes Abbild" der Linie auf der krummen Fläche, und das ganze Verfahren nennen wir „kongruente Linien-Abbildung".

Eine geodätische Linie giebt in solcher kongruenter Abbildung eine Gerade von gleicher Grösse wie die Rektifikation der geodätischen Linie.

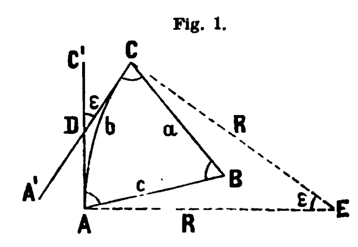
Ein Parallelkreisbogen des Umdrehungs-Ellipsoids giebt eine kongruente ebene Abbildung, welche sich durch Kegelabwicklung leicht darstellen lässt. In der Breite φ ist der Kegel-Halbmesser $= N \cot g\, \varphi$, und für den Längenunterschied l ist die Meridian-Konvergenz $= l \sin \varphi$; ein Parallelkreisbogen in der Breite φ mit dem Längenunterschied l giebt daher in kongruenter ebener Abbildung einen Kreisbogen vom Halbmesser $N \cot g\, \varphi$ mit dem Centriwinkel $l \sin \varphi$; die Bogenlänge wird also $= N \cot g\, \varphi\, l \sin \varphi = N\, l \cos \varphi$, übereinstimmend mit der Länge des Parallelkreisbogens selbst.

Wenn von einem *geschlossenen* Linienzuge, auf dem Umdrehungs-Ellipsoid oder auf einer anderen krummen Fläche, in dieser Weise eine kongruente ebene Abbildung gemacht wird, so wird der abgebildete ebene Zug im allgemeinen *nicht schliessen*, und die dabei sich zeigenden Schlussfehler stehen in Beziehung zu der Krümmung der Fläche, auf welcher der geschlossene Linienzug liegt. Nur bei einer abwickelbaren Fläche wird die kongruente ebene Abbildung eines geschlossenen Zuges im allgemeinen wieder geschlossen sein.

Die Schlusswidersprüche werden, wie bei den durch Messungsfehler erzeugten Schlussfehlern der Feldmess-Züge, teils linear, teils als Winkel sich zeigen, und da uns der in der Winkelsumme auftretende Schluss-Widerspruch besonders interessiert, wollen wir ihm als Verallgemeinerung des bekannten sphärischen Excesses die Benennung „*geodätischer Excess*" geben.

In Fig. 1. seien AB und BC die kongruenten ebenen Abbildungen zweier Seiten eines geodätischen Dreiecks auf einer krummen Fläche, so dass die zwei Seiten AB, BC und der Winkel bei B kongruent abgebildet sind; will man aber die Abbildung auch für die dritte Seite CA fortsetzen, so bekommt man entweder CA' oder AC', welche beide das Dreieck ABC nicht schliessen, sondern sich in D schneiden, und daselbst den geodätischen Excess ε zur Anschauung bringen. Man kann den Excess ε auch durch die Krümmung einer Linie AbC veranschaulichen, welche bei A und C die Geraden AC' und CA' berührt, denn die Gesamtkrümmung dieser Kurve AbC ist eben jener Winkel ε.

Fig. 1.



Wenn die Kurve AbC ein *Kreis*bogen ist, wie in Fig. 1. mit dem Mittelpunkt E, so erscheint der Excess ε auch als Centriwinkel dieses Bogens, und es besteht zwischen der Bogenlänge b, dem Halbmesser R und dem Excess ε die Gleichung $b = R\varepsilon$.

Als ein zweites Beispiel betrachten wir ein durch zwei Meridiane und zwei Parallelkreise begrenztes Trapez des Umdrehungs-Ellipsoids (oder einer anderen Umdrehungsfläche), und wir bemerken dabei zuerst, dass die begrenzenden Parallelkreise *nicht* geodätische Linien sind, dass aber doch der Excess des Vierecks bestimmt ist.

Fig. 2.

In Fig. 2. sei $ABCD$ die kongruente Linien-Abbildung von drei Seiten eines solchen Trapezes, AB entspricht dem Parallelkreisbogen auf der Breite φ mit der Länge l, es ist daher in kongruenter Linien-Abbildung AB ein Kreisbogen vom Halbmesser $AS = BS = N \cot g\, \varphi$ und dem Centriwinkel Θ als Meridian-Konvergenz $= l \sin \varphi$, also:

$$BS = N \cot g\, \varphi \qquad \Theta = l \sin \varphi \qquad (1)$$

Der Meridianbogen zwischen den Breiten φ und $\varphi + \Delta\varphi$ giebt die kongruente Abbildung:

$$BC = M \Delta\varphi \qquad (2)$$

Dabei sei M der Meridian-Krümmungshalbmesser für die Mittelbreite, indem $\Delta\varphi$ als nicht sehr gross angenommen ist.

Die dritte Seite CD ist kongruente Abbildung des Parallelkreisbogens in der Breite $\varphi + \Delta\varphi$, mit dem Längenunterschied l, d. h. es ist CD ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt S' auf BS und dessen Centriwinkel Θ' bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$CS' = N' \cot g\, (\varphi + \Delta\varphi) \quad , \quad \Theta' = l \sin (\varphi + \Delta\varphi) \qquad (3)$$

Ebenso wie BC auf dem Halbmesser BS, kann man auch AD' auf AS kongruent abbilden, oder DA' auf dem Halbmesser $S'D$.

Man hat also einen nicht in sich selbst zurückkehrenden Linienzug $D'ABCDA$ als kongruente Linien-Abbildung des Trapez-Umfanges auf dem Ellipsoid, wobei $D'A'$ und DA' als Abbildungen *desselben* Meridianbogens, beide in richtiger Länge, aber in verschiedenen Richtungen dargestellt sind, so dass der kleine Winkel ε, unter dem sie sich schneiden, den Winkelschlussfehler der Abbildung oder den geodätischen Excess des Trapezes auf der krummen Fläche darstellt. Um diesen Winkel ε näher zu bestimmen, haben wir aus Fig. 2.:

$$\varepsilon = \Theta' - \Theta$$

oder wegen (3):

$$\varepsilon = l\,(\sin (\varphi + \Delta\varphi) - \sin \varphi) = l \cos \varphi\, \Delta\varphi \qquad (4)$$

Hiebei haben wir die Breiten-Differenz $\Delta\varphi$ als sehr klein angenommen und als Differential behandelt. In gleichem Sinne ist auch schon bei (2) der Meridianbogen $= M \Delta\varphi$ gesetzt, und da der Parallelbogen $AB = N\, l \cos \varphi$ ist, kann für sehr kleines $\Delta\varphi$ die Fläche des Trapezes angegeben werden:

$$F = M N l \cos \varphi\, \Delta\varphi \qquad (5)$$

Der mittlere Krümmungs-Halbmesser in dem schon früher bei (22) S. 211 definierten Sinne ist:

$$r = \sqrt{MN} \qquad (6)$$

und daraus folgt durch Vergleichung mit (4):

$$\frac{F}{r^2} = l \cos \varphi\, \Delta\varphi = \varepsilon \qquad (7)$$

Damit ist bewiesen, dass auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (allgemeiner auf jeder Umdrehungsfläche) der geodätische Excess eines unendlich schmalen Trapezes proportional der Trapezfläche F ist, und ebenso berechnet wird, wie wenn die Fläche F auf einer *Kugel* läge, deren Halbmesser r der *mittlere* Krümmungs-Halbmesser, d. h. nach (6), das geometrische Mittel aus den beiden Haupt-Krümmungshalbmessern M und N des Ellipsoids in der betreffenden Breite ist.

Der Längenunterschied l in (7) kann hiebei beliebig gross sein; zur weiteren Anwendung ist es aber nützlich, auch l unendlich klein anzunehmen, und damit den Satz auszusprechen, dass der Excess jedes unendlich kleinen Trapezes von der Form Fig. 2. sich nach der Formel (7) aus F und r^2 berechnen lässt. Endlich da jede andere unendlich kleine Fläche als zusammengesetzt aus unendlich kleinen Trapezen betrachtet werden darf, ist es nach dem Ergebnis unserer Betrachtung richtig, den Excess einer irgendwie begrenzten kleinen Fläche F des Umdrehungs-Ellipsoids, oder einer anderen Umdrehungsfläche, zu berechnen nach der Formel:

$$e = \frac{F}{r^2} \qquad (8)$$

Wir haben also für den Excess eines Trapezes einer Umdrehungsfläche dieselbe Berechnung wie für den Excess eines kleinen geodätischen Dreiecks nach (34) § 93. S. 459, und wir können nun den weiteren Schluss bilden, dass für einen durch kleine Dimensionen begrenzten Teil irgend einer krummen Fläche, der geodätische Excess durch die Formel (8) angegeben wird.

Konforme Linien-Abbildung.

Im Anschluss an die *kongruente* Linien-Abbildung in dem bisher betrachteten Sinn, kann man auch noch eine andere damit verwandte Art der Linien-Abbildung betrachten, für welche wir festsetzen, dass alle Brechungswinkel oder Krümmungen richtig dargestellt werden, dagegen die linearen Masse in irgend welcher Weise verzerrt erscheinen. Z. B. ein auf der krummen Erdoberfläche mit Theodolit und Messlatten gemessener Zug kann in einer Ebene so dargestellt werden, dass alle Brechungswinkel geodätisch richtig übertragen werden, dass aber die mit Messlatten gemessenen Polygonseiten an verschiedenen Stellen des ebenen Bildes in verschiedenen Massstäben aufgetragen werden. Eine solche ebene Darstellung eines geschlossenen Zuges auf einer krummen Fläche giebt in dem Winkelschluss-Widerspruch den geodätischen Excess ebenso, wie die früher betrachtete kongruente ebene Linien-Abbildung, dagegen werden die linearen Anschluss-Widersprüche in beiden Fällen verschieden.

Wir wollen die Linien-Abbildung mit richtigen Brechungs- und Krümmungs-Verhältnissen, aber mit veränderlichen Streckenmassstäben, *konforme* Linien-Abbildung nennen (entsprechend der konformen Flächen-Abbildung, bei welcher auch nur die Winkelverhältnisse richtig übertragen werden).

Die so definierte „*konforme*" Linien-Abbildung ist nicht auf die Ebene beschränkt, d. h. sie gilt nicht nur für Übertragung von irgend einer Fläche auf die Ebene, sondern auch für Übertragung auf andere Flächen. So haben wir z. B. eine konforme Linien-Abbildung in der Übertragung vom Ellipsoid auf eine Kugel nach dem Gesetz der reduzierten Breiten (Fig. 1. und Fig. 2. S. 406), dabei wird eine geodätische Linie auf dem Ellipsoid als Grosskreisbogen auf eine Kugel abgebildet, mit unveränderten Azimuten. Wenn man ein geschlossenes geodätisches Dreieck in dieser Weise vom Ellipsoid auf die Kugel überträgt, so bekommt man einen *nicht* geschlossenen dreiseitigen sphärischen Linienzug, dessen sphärischer Winkelschluss-Fehler die Differenz zwischen dem geodätischen Excess und dem sphärischen Excess ist. Wir werden dieses in § 100. weiter verfolgen.

§ 95. Geodätische rechtwinklige Coordinaten und Polar-Coordinaten.

Ganz analog den Coordinaten-Systemen, welche wir in der Ebene mit geraden Linien und auf der Kugel mit grössten Kreisen benützen, kann man auch auf irgend einer Fläche mit geodätischen Linien Coordinaten-Systeme anordnen.

In Fig. 1. sei OG eine geodätische Linie, auf welcher ein Punkt P durch das

Mass $OP = p$ bestimmt ist, und ebenso auch andere Punkte P', P'' u. s. w. durch ihre auf der geodätischen Linie OG gemessenen Abstände.

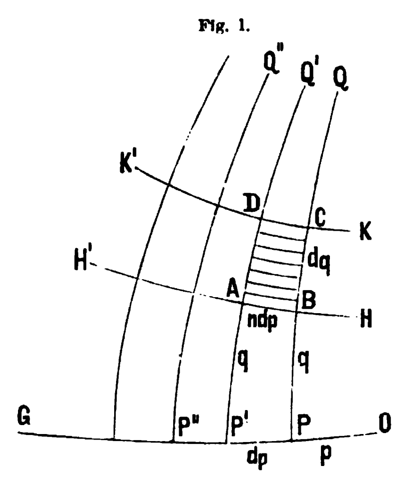


Fig. 1.

In den Punkten P, P', P'' u. s. w. werden geodätische Linien PQ, $P'Q'$, $P''Q''$ u. s. w. rechtwinklig zu OG gezogen, und auf den Linien PQ werden gleiche Masse q abgetragen, so dass eine geodätische Parallele HH' entsteht, und eine zweite Parallele KK' im Abstande $q + dq$ von der Anfangslinie OG.

Solcher Linien der zwei Systeme PQ und HH' können wir ganze Scharen gezogen denken; dieselben schneiden sich gegenseitig rechtwinklig (geodätische Parallele S. 375—376) und bilden ein System von Vierecken, deren eines $ABCD$ in Fig. 1. besonders hervorgehoben ist.

Die ganze Anordnung der Linien in Fig. 1. können wir ein rechtwinkliges geodätisches Coordinaten-System nennen, mit dem Nullpunkte O, von welchem die Abscissen p in der Richtung OG, und die Ordinaten q rechtwinklig zu OG gezählt werden. Es hat also der Punkt B die Coordinaten p, q, der Punkt C hat p, $q + dq$, der Punkt A hat $p + dp$, q u. s. w.

Der Abscissen-Unterschied PP' ist $= dp$ angenommen, und das entsprechende Mass BA haben wir mit $n\,dp$ bezeichnet, wobei n eine von der Krümmung der Fläche abhängige Funktion ist, mit welcher wir uns später besonders zu beschäftigen haben werden.

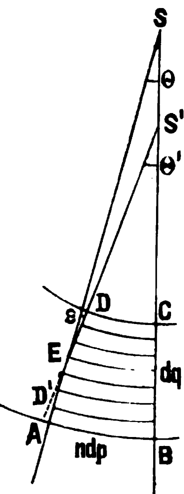


Fig. 2.

Nachdem somit alle Verhältnisse des Vierecks klar gemacht sind, betrachten wir in Fig. 2. die kongruente ebene Abbildung des Linienzuges $ABCD$ in dem Sinne von § 94.

Der Linienzug $ABCDA$ wird in der kongruenten Abbildung nicht schliessen, sondern einen Winkelschluss-Fehler $\varepsilon = \Theta' - \Theta$ geben, den wir nun näher zu bestimmen haben.

Der Winkel Θ kann mit den Bezeichnungen von Fig. 2. dargestellt werden (auch bei windschiefem Viereck) in der Form:

$$\Theta = -\frac{d\,(n\,dp)}{dq} \tag{1}$$

Dabei soll Θ selbst als absolut gelten, und die Ableitung von $n\,dp$ nach q muss negativ gesetzt werden, wenn $n\,dp$ abnimmt bei wachsendem q, wie in Fig. 2. angenommen ist.

Der kleine Winkel $\varepsilon = \Theta' - \Theta$ kann als Differential von Θ aufgefasst werden, d. h.:

$$\varepsilon = d\,\Theta = -\frac{d^2\,(n\,dp)}{dq^2}\,dq \tag{2}$$

Betrachtet man ferner die Fläche F des Vierecks, d. h. $F = n\,dp\,dq$, so hat man nach (34) § 93. S. 459 und (8) § 94. S. 462:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} = \frac{n\,dp\,dq}{r^2} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n}\frac{1}{dp}\frac{d^2(n\,dp)}{dq^2} \tag{4}$$

Bei dieser Betrachtung gilt aber in der zweiten Ableitung von $n\,dp$ nach q der Faktor dp als konstant (vgl. $PP' = dp$ in Fig. 1.), es wird also:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n}\frac{d^2 n}{dq^2} \tag{5}$$

Man kann diese wichtige Gleichung (5) bzw. (4) auch dadurch aus Fig. 2. ableiten, dass man eine *Kurve* AD betrachtet, welche AS und $D'S'$ berührt, also in ihrer Krümmung den Winkel ε giebt. Der Krümmungs-Halbmesser der Kurve AD kann als Reciproke von $\frac{d^2(n\,dp)}{dq^2}$ genommen werden, und damit kommt man ebenfalls auf die Formel (2) und dann auf (5).

Die grosse Wichtigkeit, welche die Differential-Formel (5) für die Geodäsie besitzt, beruht darin, dass dadurch eine Beziehung hergestellt wird zwischen geodätisch *zugänglichen* Massen $n\,dp$, dq u. s. w. einerseits, und dem geodätisch *unzugänglichen* Krümmungs-Halbmesser r andererseits. Legt man das Messungs-System Fig. 1. in einer *Ebene* an, so wird das Viereck $ABCD$ ein Rechteck mit $BA = CD = PP'$, und die geodätisch messbaren Verkürzungen von BA und CD gegen PP', welche man auf einer krummen Fläche findet, gestatten nach dem Gesetz der Formel (5) einen Schluss auf die Krümmung der Fläche.

Polar-Coordinaten.

In ähnlicher Weise, wie ein System rechtwinkliger Coordinaten in Fig. 1. gebildet wurde, kann man auch ein System von Polar-Coordinaten mit geodätischen Linien anordnen.

Man braucht nur anzunehmen, dass in Fig. 1. die geodätischen Linien PQ, $P'Q'$, $P''Q''$ u. s. w., welche alle von einer Abscissenlinie OP ausgehen, statt dessen alle von einem *Punkte* (in der Verlängerung von Q) ausgehen, oder alle nach einem Punkte zusammenlaufen, und dass dann die Linien HH', KK', nicht mehr geodätische Parallelen, sondern geodätische Kreise um jenen Punkt seien; dann kann man alles was sich auf Fig. 1. bezieht, auch auf das beschriebene Polar-System übertragen.

Das Krümmungsmass.

Als „*mittleren Krümmungs-Halbmesser*“ r in einem Punkte einer krummen Fläche haben wir das geometrische Mittel der beiden Haupt-Krümmungshalbmesser N und M bezeichnet, also $r = \sqrt{MN}$ oder $r^2 = MN$ gesetzt.

Der reciproke Wert von r^2 wird nach *Gauss* das „*Krümmungsmass*“ genannt, d. h. es ist:

$$\text{Krümmungsmass}\quad k = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{MN} \tag{6}$$

und mit dieser neuen Bezeichnung schreiben wir die wichtige Gleichung (5) nochmals, d. h.:

$$k = \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n}\frac{d^2 n}{dq^2} \tag{7}$$

Wir benützen die Benennung „Krümmungsmass“ (mensura curvaturae) in diesem Sinne als eine durch *Gauss* eingeführte und bereits feststehende.

Gleichzeitig damit ist der Begriff und die Bezeichnung Gesamtkrümmung (curvatura totalis seu integra) eines begrenzten Flächenteils eingeführt worden, nämlich:

$$\text{Gesamtkrümmung} = \int k\,dF \tag{8}$$

Das Produkt eines differentialen Flächenteiles dF in das für einen einzelnen Punkt von dF gültige, und im Bereiche von dF als konstant zu betrachtende Krümmungsmass k, giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils dF, und das bei (8) angegebene Integral giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils F.

Diese Begriffe und Benennungen hängen damit zusammen, dass die Gesamtkrümmung eines Flächenteils F gemessen werden kann durch einen entsprechenden Teil F' einer Kugel vom Halbmesser $= 1$, indem alle Flächen-Normalen der Begrenzungs-Linie von F mit sich selbst parallel in den Kugelmittelpunkt verlegt werden, und so den Teil F' der Kugel begrenzen, welcher gewissermassen ein Abbild des Flächenteils F wird.

Die von *Gauss* in Art. 6. der „Disquisitiones generales circa superficies curvas" eingeführten Definitionen und Benennungen, betreffend das Krümmungsmass k und die Gesamtkrümmung, bilden keinen wesentlichen Bestandteil der allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke, namentlich kann der Begriff der Gesamtkrümmung in der Geodäsie entbehrt und durch den „geodätischen Excess" ersetzt werden.

Sobald man sich überzeugt hat, dass für einen unendlich kleinen krummen Flächenteil dF der durch kongruente Umfangs-Abbildung (§ 94.) darzustellende geodätische Excess $d\varepsilon = k\,dF$ ist (wo $k = 1 : r^2$), so kann man auch nach geometrischer Anschauung so weiterschliessen:

Die Fläche F wird in eine grosse Zahl kleiner Teilflächen dF zerlegt, welche alle ihrem Umfang nach in einer Ebene geschlossen, folglich *nicht* kongruent, abgebildet werden. Bei einem ersten Teil dF_1 wird in der Abbildung der Schluss erzwungen durch eine lineare relative Krümmung $d\varepsilon_1$, welche irgendwo an dem Umfang von dF_1 angebracht werden muss. Ein an dieser Stelle ansetzender zweiter Flächenteil dF_2 muss dann, wenn er in der Ebene geschlossen dargestellt werden soll, nicht bloss seinen eigenen Excess $d\varepsilon_2$, sondern auch den von dF_1 ihm zugeschobenen Betrag $d\varepsilon_1$, durch eine der konformen Abbildung widersprechende lineare Krümmung $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2$ zum Ausdruck bringen. So wird das ebene Kartenbild $\int dF'$, wenn es die einzelnen Teile dF' sämtlich *geschlossen* darstellt, an seinem Umfange allmählich alle Beträge $d\varepsilon$ in Gestalt von linearen Krümmungen, die der kongruenten Abbildung des Umfangs widerstreiten, zum Ausdruck bringen, und der Polygon-Schlussfehler ε des kongruent abgebildet gedachten Umfangs wird daher der Summe aller Einzel-Excesse der Flächenteile gleich sein, d. h.:

$$\varepsilon = \int k\,dF \tag{9}$$

Dieses ist mit (8) übereinstimmend.

Bei einer *abwickelbaren* Fläche ist in jedem Punkte der eine Haupt-Krümmungshalbmesser unendlich, der andere endlich, setzen wir also $N = \infty$, $M = M$, so wird auch $r^2 = \infty$ und $k = 0$, folglich auch die Gesamtkrümmung nach (8) und der Excess ε nach (9) beide $=$ Null.

Wenn man hier den geodätisch entbehrlichen Begriff der Gesamtkrümmung bei Seite lässt, und nur von geodätischem Excess nach der Definition (9) redet, so vermeidet man die Abweichung der *Gauss*schen Terminologie von dem gewöhnlichen

Sprachgebrauche, welche darin liegt, dass eine abwickelbare Fläche, z. B. ein Cylinder, mit der Gesamtkrümmung = Null behaftet, d. h. als ungekrümmt bezeichnet wird.

Übrigens muss dieser Fall $k = 0$ in vielen unserer früheren, nur auf das Erd-Ellipsoid berechneten Entwicklungen ausgeschlossen werden, wegen folgender mehrfach benützter Formeln:

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + \eta^2 \quad , \quad \eta^2 = \frac{N - M}{M}.$$

Beim Erd-Ellipsoid ist η^2 eine *kleine* Grösse, und wir haben häufig η^4 gegen η^2 vernachlässigt, was für $k = 0$ mit $N = \infty$ ganz unzulässig wäre. In allen Fällen, in welchen wir in diesem Sinne η^4 und η^6 u. s. w. gegen η^2 vernachlässigt haben, ist die strenge Definition, dass r das *geometrische* Mittel aus N und M sei, verlassen, denn auch das *arithmetische* Mittel und viele andere Mittel-Funktionen von M und N sind bei Vernachlässigung von η^4 als gleich zu betrachten.

Alle unsere von § 94. bis hierher geführten allgemeinen geometrischen Betrachtungen sind entstanden aus dem Wunsche, die Formel (7), $k = -\frac{1}{n}\frac{d^2 n}{d q^2}$, welche zum weiteren gebraucht wird, auf geometrisch anschaulichem Wege zu begründen. Diese Formel hat *Gauss* in Art. 19. der Abhandlung „Disquisitiones generales" etc. gegeben $\left(\text{mit anderen Zeichen: } k = -\frac{1}{m}\frac{d^2 m}{dp^2}\right)$; und durch geometrisch anschauliche Herleitung dieser Formel haben wir den geodätischen Schlussteil Art. 20.—28. jener klassischen Abhandlung auch ohne den abstrakt mathematischen Teil von Art. 1. — Art. 19. dem Geodäten zugänglich gemacht.

Die fragliche Abhandlung ist: „Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore Carolo Friderico *Gauss*, Göttingae 1828 (societati regiae oblatae d. 8. Octob. 1827) und in „*Carl Friedrich Gauss* Werken", IV. Band, Göttingen 1873, S. 217—258.

In neuester Zeit wurde die Abhandlung in deutscher Übersetzung herausgegeben: „Allgemeine Flächentheorie u. s. w. von *A. Wangerin*, Leipzig, *Engelmann* 1889.

Unsere nachfolgenden § 96. — § 99. bringen die Schluss-Artikel 20. — 28. der Disquisitiones generales zur Darstellung.

§ 96. Verbindung eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems.

In Fig. 1.*) S. 467 ist O der Ausgangspunkt zweier geodätischer Coordinaten-Systeme, eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems, so dass z. B. der Punkt A die rechtwinkligen Coordinaten p, q und die Polar-Coordinaten s, α hat. Entsprechend hat der Punkt B die rechtwinkligen Coordinaten $p + dp$, $q + dq$ und die Polar-Coordinaten $s + ds$, $\alpha + d\alpha$.

Ausser dem Richtungswinkel α des Polar-Systems ist der Winkel β eingeführt, welchen der Strahl s und die Ordinate q bei A miteinander bilden.

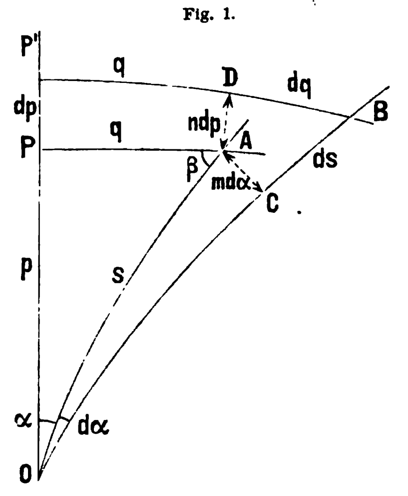
Zwischen beiden Ordinaten q und $q + dq$ bei A sei der Querabstand $AD = n\,dp$ und entsprechend $AC = m\,d\alpha$ der Querabstand bei A zwischen den beiden Strahlen OA und OB.

Dabei sind n und m Funktionen von ähnlicher Bedeutung wie n im vorigen § 95. bei (1) — (5) S. 463—464. Zur Verdeutlichung dieser Funktionen n und m mag man sich etwa den Fall denken, dass das ganze System auf einer *Kugel* vom Halbmesser r läge, dann wäre sehr einfach:

*) Die Bezeichnungen sind im wesentlichen die *Gauss*schen von Art. 23. u. ff. der „Disquisitiones generales"; nur α, β und s stehen statt der *Gauss*schen φ, ψ und r, weil wir φ für die geographische Breite und r für den mittleren Krümmungs-Halbmesser vorbehalten wollen.

$$\left.\begin{array}{ll} n = \cos\frac{q}{r} & m = \sin\frac{s}{r} \\ \text{oder entwickelt: } n = 1 - \frac{q^2}{2r^2} + \dots & m = \frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3} + \dots \end{array}\right\} \text{(Kugel)} \quad (1)$$

Zur Untersuchung des allgemeinen Falles irgend einer krummen Fläche, auf welcher das System Fig. 1. liege, betrachten wir zuerst das kleine Viereck $ACBD$, welches bei C und D rechtwinklig ist. Indem wir in differentialem Sinne dieses Viereck als *eben* behandeln, entnehmen wir aus demselben durch Coordinaten-Umformung die Gleichungen:



$$ds = n\,dp \sin\beta + dq \cos\beta \quad (2)$$

$$m\,d\alpha = dq \sin\beta - n\,dp \cos\beta \quad (3)$$

oder in Gestalt von Differential-Gleichungen:

$$\frac{\partial s}{\partial p} = n \sin\beta \qquad \frac{\partial s}{\partial q} = \cos\beta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -\frac{n}{m}\cos\beta \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial q} = \frac{1}{m}\sin\beta \quad (5)$$

Aus den beiden Gleichungen (4) folgt durch Quadrieren:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 + n^2\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 \quad (6)$$

ferner aus (4) und (5) durch Multiplizieren:

$$\frac{\partial s}{\partial p}\,\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -n^2\,\frac{\partial s}{\partial q}\,\frac{\partial \alpha}{\partial q} \quad (7)$$

Nun muss die Funktion n entsprechend der Flächen-Krümmung eingeführt werden. Um die Beziehung von n zu der Flächen-Krümmung zunächst unbestimmt zu halten, wird n als algebraische Funktion mit unbestimmten Coëfficienten $f, g, h \dots$ eingeführt:

$$n = 1 + f q^2 + g q^3 + h q^4 + \dots \quad (8)$$

Dabei ist kein Glied mit der ersten Potenz q angenommen, weil nach (1) die Bedeutung von n so ist, dass auf einer Kugel kein Glied mit q vorkommt, und weil dasselbe auch bei dem Ellipsoid und allen Flächen von stetiger konvex-konvexer Krümmung der Fall ist, oder allgemeiner, weil dem rechtwinkligen Abgehen der Ordinaten q von der Abscissenaxe OP in Fig. 1., die erste Ableitung $\frac{dn}{dq}$ für $q = 0$, selbst $= 0$ entsprechen muss.

Durch die Gleichung (8) ist n nur als Funktion von q dargestellt; um n auch als Funktion von p zu erhalten, muss man die Coëfficienten f, g, h u. s. w. von (8) selbst wieder als Funktionen von p darstellen, dieses geschehe durch die Annahmen:

$$\left.\begin{array}{l} f = f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + \dots \\ g = g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \dots \\ h = h_0 + h_1 p + h_2 p^2 + \dots \end{array}\right\} \quad (9)$$

Wenn man diese Ausdrücke (9) in (8) einsetzt, und dabei nur die Glieder bis zur vierten Potenz einschliesslich beibehält, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} n = 1 + f_0 q^2 + f_1 p q^2 + f_2 p^2 q^2 + \ldots \\ + g_0 q^3 + g_1 p q^3 + \ldots \\ + h_0 q^4 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Wenn man dieses zweimal partiell nach q ableitet, und dann wieder die Bedeutung der Coëfficienten (9) berücksichtigt, oder wenn man unmittelbar (8) nach q zweimal ableitet, so bekommt man:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial q^2} = 2f + 6gq + 12hq^2 \qquad (11)$$

Durch diese Annahmen für die Funktion n ist die krumme Fläche, auf welcher das Coordinatensystem Fig. 1. liegt, soweit charakterisiert, als für die nachfolgenden geodätischen Aufgaben nötig ist; für die analoge Funktion m dürfen nicht etwa ebenfalls unabhängige Annahmen gemacht werden, weil m bereits mit n durch die erste Gleichung (5) verbunden ist.

Nun kann man den Ausdruck für das Krümmungsmass nach (5) und (7) § 95. S. 464 anwenden:

$$-k = \frac{1}{n}\frac{d^2 n}{d q^2}$$

Wenn man (8) und (11) hier einsetzt, so bekommt man:

$$-k = \frac{2f + 6gq + 12hq^2}{1 + fq^2 + gq^3 + hq^4}$$

oder bis zur zweiten Potenz einschliesslich genau:

$$-k = 2(f + 3gq + 6hq^2)(1 - fq^2) = 2(f + 3gq + (6h - f^2)q^2)$$

Wenn man hier wieder die Coëfficienten (9) einsetzt, so bekommt man bis zur zweiten Ordnung einschliesslich:

$$\left.\begin{aligned} k = -2f_0 - 2f_1 p - 6 g_0 q \\ -2f_2 p^2 - 6 g_1 p q - (12 h_0 - 2 f_0^2) q^2 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Wir werden nun aber k auf eine *lineare* Funktion beschränken, d. h. wir werden setzen:

$$k = -2f_0 - 2f_1 p - 6 g_0 q \qquad (14)$$

Diese Annahme (14) schliesst in sich, dass in (13) ist:

$$f_2 = 0 \quad , \quad g_1 = 0 \quad , \quad 12 h_0 = 2 f_0^2 \text{ oder } h_0 = \frac{1}{6} f_0^2 \qquad (15)$$

Damit reduziert sich auch das frühere n von (10) auf:

$$n = 1 + f_0 q^2 + f_1 p q^2 + g_0 q^3 + \frac{1}{6} f_0^2 q^4 \qquad (16)$$

Im folgenden braucht man mehrfach auch $\frac{1}{n}$, weshalb man nach (8) S. 197 entwickelt:

$$\frac{1}{n} = 1 - f_0 q^2 - f_1 p q^2 - g_0 q^3 + \frac{5}{6} f_0^2 q^4 \qquad (17)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Theorie des geodätischen Dreiecks übergehen.

§ 97. Reihen-Entwicklung für das rechtwinklige geodätische Dreieck.

Wir haben von (6) § 96. S. 467:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 \tag{1}$$

Um hier statt der Ableitungen von s nach p und nach q die entsprechenden Ableitungen von s^2 einzuführen, hat man:

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial p} = \frac{\partial (s^2)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p} = 2s\frac{\partial s}{\partial p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (s^2)}{\partial q} = 2s\frac{\partial s}{\partial q} \tag{1a}$$

also:

$$n^2 = \left(\frac{1}{2s}\frac{\partial (s^2)}{\partial p}\right)^2 + n^2\left(\frac{1}{2s}\frac{\partial (s^2)}{\partial q}\right)^2$$

oder:

$$4s^2 = \left(\frac{1}{n}\frac{\partial (s^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial (s^2)}{\partial q}\right)^2 \tag{2}$$

Denkt man sich s^2 in eine Reihe nach Potenzen von p und q entwickelt, so wird diese Reihe mit den Gliedern $p^2 + q^2$ beginnen, weil für unendlich kleine Werte p und q die Fig. 1. S. 471 auf ein ebenes rechtwinkliges Dreieck zusammenschrumpft. Wir wollen daher die Reihe für s^2 zunächst in folgender Form annehmen:

$$s^2 = p^2 + q^2 + Ap^2q + Bpq^2 \tag{3}$$

wobei A und B vorläufig unbestimmt angenommene Coëfficienten sind, welche durch Vergleichung mit (2) bestimmt werden müssen. Man hat zunächst aus (3):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial p} = 2p + 2Apq + Bq^2 + \ldots$$

hiezu von (17) § 96. S. 468:

$$\frac{1}{n} = 1 - f_0 q^2 + \ldots \tag{4}$$

Ferner aus (3):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial q} = 2q + Ap^2 + 2Bpq + \ldots \tag{5}$$

Aus (4) und (5) kann man den Ausdruck (2) zusammen setzen; man erhält bis zur dritten Potenz:

aus (2): $4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 12Ap^2q + 12Bpq^2$

andererseits aus (3): $4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4Ap^2q + 4Bpq^2$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt als Coëfficienten-Vergleichung $12A = 4A$ und $12B = 4B$, d. h. $A = 0$ und $B = 0$.

Man findet also, dass in der Reihe (3) nur die zwei ersten Glieder bestehen, und dass die Glieder mit dritten Potenzen p^2q und pq^2 verschwinden. Wir machen deshalb nun eine Annahme mit Gliedern vierter Ordnung, d. h. statt (3) sei nun:

$$s^2 = p^2 + q^2 + Ap^3q + Bp^2q^2 + A'pq^3 \tag{6}$$

Dieses giebt:

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial p} = 2p + 3Ap^2q + 2Bpq^2 + A'q^3$$

hiezu von (17) §. 96. S. 468:

$$\frac{1}{n} = 1 - f_0 q^2 - \ldots \tag{7}$$

Ferner aus (6):

$$\frac{\partial s^2}{\partial q} = 2q + A p^3 + 2 B p^2 q + 3 A' p q^2 \qquad (8)$$

Wenn man aus (7) und (8) die Formel (2) zusammensetzt, so findet man:

aus (2): $$4 s^2 = 4 p^2 + 4 q^2 + 16 A p^3 q + 8 (2B - f_0) p^2 q^2 + 16 A' p q^3$$

andererseits aus (6): $$4 s^2 = 4 p^2 + 4 q^2 + 4 A p^3 q + 4 B p^2 q^2 + 4 A' p q^3$$

Die Coëfficienten-Vergleichung in diesen beiden Gleichungen giebt:

$$16 A = 4 A \qquad 16 B - 8 f_0 = 4 B \qquad 16 A' = 4 A'$$

d. h.: $$A = 0 \qquad B = \frac{2}{3} f_0 \qquad A' = 0$$

Folglich nun nach (6):

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f_0 p^2 q^2 \qquad (9)$$

Auf diesem Wege eine Stufe weiter gehend, erhält man bis zur fünften Ordnung:

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f_0 p^2 q^2 + \frac{1}{2} f_1 p^3 q^2 + \frac{1}{2} g_0 p^2 q^3 \qquad (10)$$

Um zur sechsten Ordnung zu gelangen, fügen wir zu (10) noch folgende unbestimmte Glieder hinzu (wobei A, B, C wieder *neue* Bedeutungen haben):

$$+ A p^6 + B p^5 q + C p^4 q^2 + D p^3 q^3 + C' p^2 q^4 + B' p q^5 + A' q^6 \qquad (10\,a)$$

Wenn man damit den Ausdruck (2) bildet, so erhält man:

$$4 s^2 = 4 p^2 + 4 q^2 + \frac{8}{3} f_0 p^2 q^2 + 2 f_1 p^3 q^2 + 2 g_0 p^2 q^3$$

$$+ 24 A p^6 + 24 B p^5 q + \left(24 C + \frac{16}{9} f_0^2\right) p^4 q^2 + 24 D p^3 q^3$$

$$+ 24 A' q^6 + 24 B' p q^5 + \left(24 C' + \frac{16}{9} f_0^2\right) p^2 q^4$$

Wenn man dieses, in Hinsicht auf die Coëfficienten, mit (10) und (10 a) vergleicht, so sieht man, dass A, B, D, B', A' sämtlich $= 0$ werden, und es wird:

$$C = C' = -\frac{4}{45} f_0^2$$

Damit giebt die bis zur sechsten Ordnung vervollständigte Reihe (10) und (10 a):

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{1}{6} (4 f_0 p^2 q^2 + 3 f_1 p^3 q^2 + 3 g_0 p^2 q^3) - \frac{4}{45} f_0^2 (p^4 q^2 + p^2 q^4) \qquad (11)$$

Dabei ist für lineare Funktion k, nach (15) § 96. S. 468, $f_2 = 0$, $g_1 = 0$ und $h_0 = \frac{1}{6} f_0^2$ gesetzt. (Wenn man diese beschränkenden Annahmen für f_2, g_1 und h_0 nicht macht, bekommt man statt der vorstehenden (11) die allgemeinere Formel [1] von Art. 24. der „Disquis. gen.“.)

Einführung des Krümmungsmasses.

Der allgemeine lineare Ausdruck für das Krümmungsmass ist nach (14) § 96. S. 468:

$$k = -2 f_0 - 2 f_1 p - 6 g_0 q \qquad (12)$$

Wenden wir diese Funktion auf unseren Fall nach Andeutung von Fig. 1. an, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} k_\alpha &= -2 f_0 \\ k_{90} &= -2 f_0 - 2 f_1 p \\ k_\beta &= -2 f_0 - 2 f_1 p - 6 g_0 q \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Fig. 1.

$$k_\alpha + 2 k_{90} + 2 k_\beta = -(8 f_0 + 6 f_1 p + 6 f_0 q)$$

Dieses ist gerade der Ausdruck, welcher in der grossen Klammer von (11) vorkommt, und wenn wir zugleich in der letzten Klammer von (11) statt $4 f_0^2$ den Wert k_α^2 aus (13) setzen, oder weil es in dem *letzten* Gliede einer konvergierenden Reihe ist, kurzweg k statt k_α, so geht (11) über in:

$$s^2 = p^2 + q^2 - \frac{k_\alpha + 2 k_{90} + k_\beta}{12} p^2 q^2 - \frac{k^2}{45} p^2 q^2 (p^2 + q^2) \quad (14)$$

Reihen-Entwicklungen für $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$.

Von den allgemeinen Differential-Formeln des § 96. haben wir (4) S. 467:

$$n \sin \beta = \frac{\partial s}{\partial p} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\partial s}{\partial q}$$

oder mit Einführung der Veränderlichen s^2, wie oben bei (1a):

$$n \sin \beta = \frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} \qquad \cos \beta = \frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial q}$$

$$2 s \sin \beta = \frac{1}{n} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} \qquad 2 s \cos \beta = \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \quad (15)$$

Nun ist s^2 nach (11) bestimmt worden, woraus man durch Differentiieren findet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} &= 2p + \frac{4}{3} f_0 p q^2 + \frac{3}{2} f_1 p^2 q^2 + g_0 p q^3 - \frac{16}{45} f_0^2 p^3 q^2 - \frac{8}{45} f_0^2 p q^4 \\ \text{hiezu (17) S. 468:} \quad \frac{1}{n} &= 1 - f_0 q^2 - f_1 p q^2 - g_0 q^3 + \frac{5}{6} f_0^2 q_4 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Ferner die Ableitung nach q von (11):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial q} = 2q + \frac{4}{3} f_0 p^2 q + f_1 p^3 q + \frac{3}{2} g_0 p^2 q^2 - \frac{8}{45} f_0^2 p^4 q - \frac{16}{45} f_0^2 p^2 q^3 \quad (17)$$

Die beiden Gleichungen (15) lassen sich nach (16) und (17) ausführen, und geben:

$$s \sin \beta = p - \frac{1}{3} f_0 p q^2 - \frac{1}{4} f_1 p^2 q^2 - \frac{1}{2} g_0 p q^3 - \frac{8}{45} f_0^2 p^3 q^2 + \frac{7}{90} f_0^2 p q^4 \quad (18)$$

$$s \cos \beta = q + \frac{2}{3} f_0 p^2 q + \frac{1}{2} f_1 p^3 q + \frac{3}{4} g_0 p^2 q^2 - \frac{4}{45} f_0^2 p^4 q - \frac{8}{45} f_0^2 p^2 q^3 \quad (19)$$

Wenn man wieder die Krümmungsmasse nach (13) einführt, so bringt man (18) und (19) auf diese Formen:

$$s \sin \beta = p + \frac{k_\alpha + k_{90} + 2 k_\beta}{4} \frac{p q^2}{6} - \frac{k^2}{360} p q^2 (16 p^2 - 7 q^2) \quad (20)$$

$$s \cos \beta = q - \frac{2 k_\alpha + 3 k_{90} + 3 k_\beta}{8} \frac{p^2 q}{3} - \frac{k^2}{45} p^2 q (p^2 + 2 q^2) \quad (21)$$

Diese Gleichungen gelten natürlich auch für den anderen Winkel α, und geben mit entsprechender Vertauschung der p, q und der k:

$$s \sin \alpha = q + \frac{k_\beta + k_{90} + 2k_\alpha}{4} \frac{p^2 q}{6} - \frac{k^2}{360} p^2 q (16 q^2 - 7 p^2) \tag{22}$$

$$s \cos \alpha = p - \frac{2k_\beta + 3k_{90} + 3k_\alpha}{8} \frac{p q^2}{3} - \frac{k^2}{45} p q^2 (q^2 + 2p^2) \tag{23}$$

Zur Probe kann man auch rechnen:

$$(s \sin \beta)^2 + (s \cos \beta)^2 = s^2 \quad \text{oder} \quad (s \sin \alpha)^2 + (s \cos \alpha)^2 = s^2$$

Man wird dadurch denselben Ausdruck für s^2 finden, wie schon bei (14).

Man kann die Reihen (20) — (23) auch umkehren (ähnlich wie in § 44. S. 250 bis 251 die Reihen für $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ umgekehrt wurden). Man findet:

$$p = s \cos \alpha + \frac{s^3}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha \frac{3k_\alpha + 3k_{90} + 2k_\beta}{8} + \frac{k^2}{15} p q^2 (-p^2 + 2q^2) \tag{24}$$

$$q = s \sin \alpha - \frac{s^3}{6} \sin \alpha \cos^2 \alpha \frac{2k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{4} + \frac{k^2}{120} p^2 q (p^2 - 8q^2) \tag{25}$$

Dabei ist im letzten Glied $p = s \cos \alpha$ und $q = s \sin \alpha$ genommen.

Ausserdem kann man durch Zeichenvertauschung auch folgende Formeln bilden:

$$p = s \sin \beta - \frac{s^3}{6} \sin \beta \cos^2 \beta \frac{k_\alpha + k_{90} + 2k_\beta}{4} + \frac{k^2}{120} p q^2 (q^2 - 8p^2) \tag{26}$$

$$q = s \cos \beta + \frac{s^3}{3} \sin^2 \beta \cos \beta \frac{2k_\alpha + 3k_{90} + 3k_\beta}{8} + \frac{k^2}{15} p^2 q (2p^2 - q^2) \tag{27}$$

Geodätischer Excess des rechtwinkligen Dreiecks.

Nach Fig. 1. S. 471 ist:

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + 90^\circ) - 180^\circ = \alpha + \beta - 90^\circ \tag{28}$$

$$\sin \varepsilon = -\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \tag{29}$$

Da wir die Reihen für $s \sin \alpha$, $s \sin \beta$, sowie $s \cos \alpha$, $s \cos \beta$ in (20) — (23) haben, können wir die zwei zu (29) erforderlichen Produkte bilden, nämlich:

$$\begin{aligned} s^2 \sin \alpha \sin \beta = p q &+ \frac{p^3 q}{6} \frac{2k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{4} + \frac{k^2}{360} p^3 q (7p^2 - 16q^2) \\ &+ \frac{p q^3}{6} \frac{k_\alpha + k_{90} + 2k_\beta}{4} + \frac{k^2}{36} p^3 q^3 \\ &+ \frac{k^2}{360} p q^3 (-16p^2 + 7q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 \cos \alpha \cos \beta = p q &- \frac{p q^3}{3} \frac{3k_\alpha + 3k_{90} + 2k_\beta}{8} - \frac{k^2}{360} p q^3 (16p^2 + 8q^2) \\ &- \frac{p^3 q}{3} \frac{2k_\alpha + 3k_{90} + 3k_\beta}{8} + \frac{k^2}{9} p^3 q^3 \\ &- \frac{k^2}{360} p^3 q (8p^2 + 16q^2) \end{aligned}$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke von einander abzieht, und wenn man dabei die gleichartigen Glieder zusammen ordnet, so erhält man:

$$s^2 \sin \varepsilon = \frac{p q}{2} \frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} (p^2 + q^2) + \frac{15}{360} k^2 p q (p^2 - q^2)^2 \tag{30}$$

Hiezu hat man von (14):

$$\frac{p^2+q^2}{s^2} = 1 + \frac{k_\alpha + 2k_{90} + k_\beta}{12\,s^2}\, p^2 q^2 + k^2 \ldots$$

Wenn man dieses in (30) einsetzt, und in den Gliedern mit k^2 die einzelnen k_α, k_β, k_{90} nicht mehr unterscheidet (wie auch bei früheren Formeln in gleichem Falle nicht unterschieden wurde) und wenn man die Glieder von der Ordnung k^3 (ebenfalls wie bisher) ganz vernachlässigt, so erhält man aus (30):

$$\varepsilon = \frac{p\,q}{2}\,\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} + \frac{p\,q}{24}\,k^2\,(p^2+q^2) \tag{31}$$

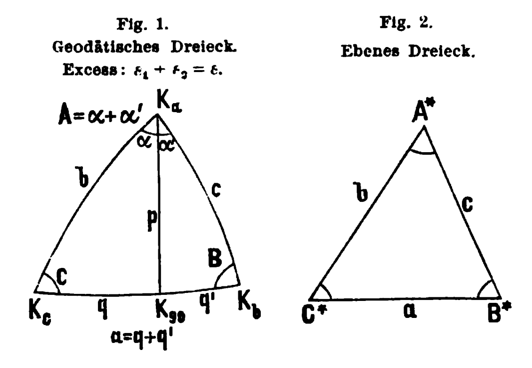
Diese Formel, welche mit $\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} = \frac{1}{r^2}$ in die frühere sphärische Formel (3) S. 249 übergeht, sagt in Worten, dass man den geodätischen Excess eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks erhält, wenn man das Dreieck wie ein *sphärisches* Dreieck berechnet, dessen Kugelhalbmesser r dem arithmetischen Mittel der Krümmungsmasse k_α, k_{90}, k_β in den drei Ecken des Dreiecks entspricht.

Dieser Satz lässt sich auch leicht auf ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck ausdehnen, wie wir alsbald im nächsten § 98. sehen werden.

§ 98. Berechnung des allgemeinen (schiefwinkligen) geodätischen Dreiecks.

Mit den Reihen-Entwicklungen für das rechtwinklige geodätische Dreieck, welche wir in dem vorstehenden § 97. kennen gelernt haben, kann man durch Zusammensetzung zweier rechtwinkliger Dreiecke zu einem allgemeinen (schiefwinkligen) Dreieck auch die trigonometrische Berechnung solcher allgemeiner geodätischer Dreiecke zu stande bringen.

Wir werden dabei in gleicher Weise vorgehen, wie früher in § 44., wo wir mit Fig. 4. S. 251 aus den Formeln für zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke den erweiterten *Legendre*schen Satz hergeleitet haben. Ebenso werden wir nun die Formeln behandeln, durch welche *Gauss* im Jahre 1827 in Art. 25. der „Disquisitiones generales circa superficies curvas" den bedeutenden Schritt von *Legendres* Kugel-Satze zur Trigonometrie auf einer krummen Fläche überhaupt gemacht hat.



Indem wir im wesentlichen die früheren Bezeichnungen beibehalten, bilden wir in Fig. 1. ein geodätisches Dreieck mit den Seiten b, c und $a = q + q'$, indem eine Senkrechte p das Dreieck b, c, a in zwei rechtwinklige Dreiecke p, q, sowie p, q' zerlegt.

Sind ε_1 und ε_2 die geodätischen Excesse der beiden rechtwinkligen Teildreiecke, so ist nach (31) des vorigen § 97. (s. oben):

$$\varepsilon_1 = \frac{p\,q}{2}\,\frac{k_a + k_{90} + k_c}{3} + k^2 \ldots \tag{1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{p\,q'}{2}\,\frac{k_a + k_{90} + k_b}{3} + k^2 \ldots \tag{2}$$

Indem wir zunächst die Glieder von der Ordnung k^2 bei Seite lassen, können wir uns leicht überzeugen, dass der Excess $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ des ganzen Dreiecks in erster Näherung (d. h. vorbehältlich der Glieder mit k^2) so berechnet wird:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{p\,(q + q')}{2}\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} \tag{3}$$

Um die Übereinstimmung dieser Formel (3) mit der Summe von (1) und (2) nachzuweisen, braucht man nur die der ganzen Theorie zu Grunde liegende Annahme einzuführen, dass das Krümmungsmass k eine lineare Funktion der Coordinaten auf der Fläche sein, also auf der Linie $a = q + q'$ sich proportional den Strecken q und q' ändern soll, d. h. es muss sein:

$$k_{90} = k_c + \frac{q}{q + q'}\,(k_b - k_c) \quad \text{oder} \quad k_{90}\,(q + q') = k_c\,q' + k_b\,q \tag{4}$$

und damit geht die Summe von (1) und (2) in (3) über. Man kann also nun die Gleichung (3) so schreiben:

$$\varepsilon = \frac{a\,p}{2}\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \ldots \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \ldots \tag{5}$$

Dabei soll $\triangle$ ein Näherungswert für die Fläche des Dreiecks sein, z. B. kann $\triangle$ statt $= \frac{ap}{2}$ auch die Fläche eines ebenen Dreiecks sein, das man aus den drei Seitenlängen a, b, c konstruiert. Wenn übrigens die in (5) vernachlässigten Glieder von der Ordnung k^2 berücksichtigt werden sollen, dann muss auch die Bedeutung von $\triangle$, z. B. ob es $= \frac{ap}{2}$ oder gleich der Fläche des ebenen Dreiecks a, b, c sein soll, unterschieden werden, weil je nach dieser Unterscheidung auch die höheren Glieder von der Ordnung k^2 verschieden ausfallen.

In Fig. 2. haben wir ein *ebenes* Dreieck gezeichnet, welches dieselben Seiten a, b, c wie das geodätische Dreieck Fig 1. hat, aber deswegen andere Winkel A^*, B^*, C^* haben muss, deren Summe $= 180°$ ist, und deren Differenzen gegen die geodätischen Winkel A, B, C nun untersucht werden sollen.

Von (20)—(23) § 97. S. 471—472 haben wir folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} b\cos\alpha &= p - \frac{p\,q^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_c}{8} \\ c\cos\alpha' &= p - \frac{p\,q'^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_b}{8} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} b\sin\alpha &= q + \frac{p^2 q}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_c}{4} \\ c\sin\alpha' &= q' + \frac{p^2 q'}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_b}{4} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hieraus bildet man:

$$b\,c\cos\alpha\cos\alpha' = p^2 - \frac{p^2\,q^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_c}{8} - \frac{p^2\,q'^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_b}{8}$$

$$b\,c\sin\alpha\sin\alpha' = q\,q' + \frac{p^2\,q\,q'}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_c}{4} + \frac{p^2\,q\,q'}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_b}{4}$$

Da $\alpha + \alpha' = A$, also $\cos\alpha \cos\alpha' - \sin\alpha \sin\alpha' = \cos A$ ist, erhält man hieraus:

$$\left.\begin{aligned} b c \cos A = p^2 - q q' - \frac{p^2 k_a}{24}(3 q^2 + 3 q'^2 + 4 q q') - \frac{p^2 k_c}{24}(2 q^2 + q q') \\ - \frac{p^2 k_{90}}{24}(3 q^2 + 3 q'^2 + 2 q q') - \frac{p^2 k_b}{24}(2 q'^2 + q q') \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Zwischen den verschiedenen Dreiecksseiten bestehen Beziehungen, nämlich nach (14) § 97. S. 471:

$$b^2 = p^2 + q^2 - \frac{p^2 q^2}{3} \frac{k_a + 2 k_{90} + k_c}{4} \quad (9)$$

$$c^2 = p^2 + q'^2 - \frac{p^2 q'^2}{3} \frac{k_a + 2 k_{90} + k_b}{4} \quad (10)$$

Nun wird nach Fig. 2. das *ebene* Dreieck betrachtet, welches dieselben Seitenlängen b, c und $a = q + q'$ hat wie das geodätische Dreieck Fig. 1., während die Winkel andere werden, nämlich A^*, B^*, C^*.

Dieses Dreieck Fig. 2. giebt die Gleichung:

$$a^2 = (q + q')^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos A^* \quad (11)$$

Man hat also aus (11), (10) und (9):

$$2 b c \cos A^* = b^2 + c^2 - (q^2 + q'^2 + 2 q q')$$

$$= 2 p^2 - 2 q q' - \frac{k_a p^2}{12}(q^2 + q'^2) - \frac{k_{90} p^2}{6}(q^2 + q'^2) - \frac{k_c p^2}{12} q^2 - \frac{k_b p^2}{12} q'^2$$

Vergleicht man dieses mit (8), so erhält man:

$$b c (\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2 k_a}{24}(2 q^2 + 2 q'^2 + 4 q q') + \frac{p^2 k_{90}}{24}(q^2 + q'^2 + 2 q q')$$

$$+ \frac{p^2 k_c}{24}(q^2 + q q') + \frac{p^2 k_b}{24}(q'^2 + q q')$$

$$b c (\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2 (q + q')}{24}(2 k_a (q + q') + k_{90}(q + q') + k_c q + k_b q') \quad (12)$$

Hier ist wieder das Krümmungsmass k_{90} mit Hilfe der Gleichung (4) zu eliminieren; dadurch bekommt man aus (12):

$$b c (\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2 (q + q')^2}{24}(2 k_a + k_b + k_c) \quad (13)$$

Hier ist:

$$\cos A^* - \cos A = (A - A^*) \sin A^*$$

und

$$b c \sin A^* = p (q + q') = 2 \triangle$$

wobei $\triangle$ ein Näherungswert für die Dreiecksfläche sein soll. Damit giebt (13):

$$A - A^* = \frac{\triangle}{12}(2 k_a + k_b + k_c)$$

Indem wir den schon bei (5) gemachten Vorbehalt bezüglich der Bedeutung von $\triangle$ als *erster Näherung* für die ebene oder krumme Dreiecksfläche auch hier machen müssen, schreiben wir die sämtlichen drei Gleichungen von der Art der soeben gefundenen zusammen:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\varepsilon}{12}\,(2k_a + k_b + k_c) \\ B - B^* &= \frac{\varepsilon}{12}\,(k_a + 2k_b + k_c) \\ C - C^* &= \frac{\varepsilon}{12}\,(k_a + k_b + 2k_c) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$$\text{Summe:} \qquad \varepsilon = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} \qquad (15)$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, wie die schon bei (5) gefundene, und wenn wir die Glieder von der Ordnung k^2 vernachlässigen wollen, so ist die sphäroidische Dreiecks-Berechnung durch die Formeln (14) und (15) erledigt, ebenso wie die *sphärische* Dreiecks-Berechnung durch den einfachen *Legendre*schen Satz (11) — (12) S. 239 bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, aber $\frac{1}{r^4}$ ausschliesslich, bestimmt war.

Um nun in unserem Falle auch noch die Glieder von der Ordnung k^2 $\left(\text{entsprechend } \frac{1}{r^4}\right)$ zu finden, können wir die ganze vorstehende Entwicklung (6) — (15) mit Zusetzung aller Glieder von der Ordnung k^2 wiederholen, und es ist dabei nur etwa das eine besonders zu bemerken, dass dann die Dreiecksfläche $\triangle$ nicht mehr nach Belieben $= \frac{a\,p}{2}$ oder $= \frac{b\,c}{2} \sin A^*$ gesetzt werden darf.

Indem wir für Entwicklung mit Gliedern k^2 nun festsetzen, dass $\triangle$ die Fläche des *ebenen* aus den drei Seitenlängen a, b, c zu konstruierenden Hilfsdreiecks Fig. 2. sein soll, erhalten wir eine Beziehung zwischen $p\,(q + q')$ und $\triangle$, zunächst durch weitere Benützung der Gleichungen (6) und (7), nämlich:

$$\sin A = \sin(\alpha + \alpha') = \sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha'$$

$$b\,c\sin A = p\,(q + q')\left(1 + \frac{k}{6}\,(p^2 - 2\,q\,q')\right)$$

$$b\,c\sin A = b\,c\left(\sin A^* + \frac{\triangle}{3}\,k\cos A^*\right) \text{ u. s. w.}$$

Da hiemit der Weg zur Entwicklung von $A - A^*$ bis auf Glieder k^2 einschliesslich vorgezeichnet ist, beschränken wir uns im weiteren, das *Schluss*-Ergebnis der Entwicklung hier mitzuteilen, umsomehr als die Glieder mit k^2, wenn man innerhalb derselben keine Unterscheidung zwischen k_a, k_b, k_c mehr macht, lediglich *sphärische* Form annehmen, und nichts anderes sind, als die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ in den Formeln (31a), (32a), (33a) S. 254, welche wir den Formeln (14) schlechthin zuzusetzen berechtigt sind.

Entweder durch solche Zusetzung, oder durch unmittelbare Weiter-Entwicklung für das geodätische Dreieck bis k^2 findet man:

$$\left.\begin{aligned}
A - A^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{2k_a + k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{15} \\
B - B^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{k_a + 2k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{7a^2 + b^2 + 7c^2}{15} \\
C - C^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{k_a + k_b + 2k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{7a^2 + 7b^2 + c^2}{15}
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + \frac{\triangle}{8}\,k^2\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad (17)$$

Durch diese Formeln (16) und (17) ist die Auflösung eines geodätischen Dreiecks auf die Auflösung eines *ebenen* Dreiecks zurückgeführt, also vollkommen erledigt, und weitere Formeln sind nicht nötig.

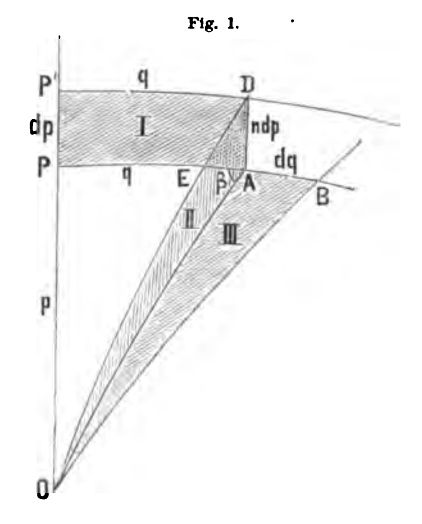
Wenn wir jedoch die sphärischen Vorbilder unserer Formeln auf S. 254 und S. 255 betrachten, so finden wir, dass uns das Analogon zu (35), (38) und (39), S. 254—255 fehlt, das zum praktischen Rechnen zwar nicht erforderlich, aber doch so interessant ist, dass wir im nächsten § 99. uns damit beschäftigen werden.

§ 99. Krumme Oberfläche des geodätischen Dreiecks.

Wir nehmen in Fig. 1. die Vereinigung eines rechtwinkligen und eines Polar-Systems von geodätischen Coordinaten auf der krummen Fläche wieder vor.

Der Punkt A hat in dem rechtwinkligen geodätischen Coordinaten-System mit dem Ursprung O die Abscisse $OP = p$ und die Ordinate $PA = q$, und das dadurch bestimmte rechtwinklige Dreieck OPA habe die krumme Fläche $= F$.

Fig. 1.



Um das Differential dF zu bestimmen, untersuchen wir, um was sich die Fläche F ändert, wenn p und q bzw. sich um dp und dq ändern.

Wenn P allein sich ändert, so rückt der Punkt A in der geodätischen Parallelen von A nach D, und die Flächen-Änderung ist $= I - II$, wobei mit I der Streifen $PP'DA$ und mit II das schmale Dreieck ODA bezeichnet, und das kleine Dreieckchen mit den Katheten AD und DE vernachlässigt wird. Man kann also schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\,dp = I - II \quad (1)$$

In gleicher Weise hat man auch:

$$\frac{\partial F}{\partial q}\,dq = III \quad (2)$$

wenn mit III das schmale Dreieck OAB bezeichnet wird.

Um die drei Flächenteile *I, II, III* näher zu untersuchen, beginnen wir mit *I*, welches ist:

$$I = \int n\, dp\, dq = dp \int n\, dq \qquad (3)$$

Dabei ist dp als Basis PP' des Streifens I konstant.

Das Dreieck *II* lässt sich zu *III* in Beziehung setzen durch das Verhältnis $EA : AB$, nämlich:

$$II : III = EA : AB$$

Dabei ist $AB = dq$ und $EA = n\, dp\, cotg\, \beta$; daraus folgt mit Rücksicht auf (2):

$$II = \frac{\partial F}{\delta q}\, n\, dp\, cotg\, \beta \qquad (4)$$

Man hat also nun aus (1), (3) und (4):

$$\frac{\partial F}{\partial p} dp = dp \int n\, dq - n\, dp\, cotg\, \beta \frac{\partial F}{d q}$$

Der Faktor dp fällt fort, und dann hat man:

$$\sin \beta \frac{\partial F}{\partial p} + \cos \beta\, n \frac{\partial F}{\partial q} = \sin \beta \int n\, dq$$

oder, weil $\sin \beta$ und $\cos \beta$ von den früheren Entwicklungen nur in den Produkten $s \sin \beta$ und $s \cos \beta$ vorhanden sind, schreiben wir:

$$s \sin \beta \frac{\partial F}{\partial p} + n\, s \cos \beta \frac{\partial F}{\partial q} = s \sin \beta \int n\, dq \qquad (5)$$

Diese zur Bestimmung von F dienende Gleichung soll in Übereinstimmung gebracht werden mit der folgenden Gleichung, deren Coëfficienten A, B, C, D zunächst unbestimmt eingeführt werden:

$$F = \frac{1}{2} pq + Ap^2 + Bq^2 + Cp^2 q + Dp q^2 \qquad (6)$$

Nach Anleitung von (5) wird hieraus gebildet:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{2} q + 2Ap + 2Cpq + Dq^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{1}{2} p + 2Bq + Cp^2 + 2Dpq$$

Hiezu nehmen wir in erster Näherung von (18) und (19) S. 471 und (16) S. 468:

$$s \sin \beta = p \qquad s \cos \beta = q \qquad n = 1 + f_0 q^2$$

Wenn man hiemit die Gleichung (5) bildet, und mit (6) vergleicht, so findet man $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, d. h. die Reihe für F hat keine Glieder von der Form p^2, q^2, $p^2 q$, $p q^2$.

Nachdem dieses erkannt ist, wird als neue Form angenommen:

$$F = \frac{1}{2} p q + A p^3 q + B p^2 q^2 + C p q^3 \qquad (7)$$

Hieraus wird $\frac{\partial F}{\partial p}$ und $\frac{\partial F}{\partial q}$ gebildet, hiezu in zweiter Näherung von (18), (19) § 97. S. 471 nebst (16) § 96. S. 468:

$$s \sin \beta = p - \frac{1}{3} f_0 p q^2 \qquad s \cos \beta = q + \frac{2}{3} f_0 p^2 q$$

$$n = 1 + f_0 q^2$$

Dieses wird in (5) eingesetzt, der entstehende Ausdruck mit (7) verglichen, wodurch sich ergeben wird:

$$4A = -\frac{1}{3} f_0 \qquad 4B = 0 \qquad 4C = -\frac{1}{3} f_0$$

Und setzt man auch noch nach (13) § 97. S. 471, $2f_0 = -k$, so giebt (7):

$$F = \frac{1}{2} pq + \frac{pq}{24} k (p^2 + q^2) \tag{8}$$

In der nächsten Stufe haben wir 4 weitere unbestimmte Glieder zugesetzt von der Form $Ap^4 q + Bp^3 q^2 + B' p^2 q^3 + A' p q^4$, wozu auch $s \sin \beta$, $s \cos \beta$ und n entsprechend höher zu nehmen waren. Die Ausführung und Coëfficienten-Vergleichung nach dem bisherigen Verfahren gab:

$$F = \frac{1}{2} pq + \frac{pq}{120}\left(-10 f_0 p^2 - 10 f_0 q^2 - 6 f_1 p^3 - 9 g_0 p^2 q - 7 f_1 p q^2 - 12 g_0 q^3\right)$$

Wenn man hier wieder die Krümmungsmasse nach (13) § 97. S. 471 einführt, so kann man den vorstehenden Ausdruck für F auf folgende Form bringen:

$$F = \frac{pq}{2} + \frac{pq}{240}\left\{k_\alpha (4p^2 + 3q^2) + k_{90}(3p^2 + 3q^2) + k_\beta (3p^2 + 4q^2)\right\} \tag{9}$$

Setzt man die verschiedenen k_α, k_β, $k\gamma$ hier einander gleich, schlechthin $= k$, so erhält man wieder die Gleichung (8).

Nun kommt es darauf an, von der Fläche F eines *rechtwinkligen* geodätischen Dreiecks überzugehen auf die Fläche eines allgemeinen Dreiecks mit beliebigen Winkeln. Der Weg hiezu ist bereits durch die Entwicklung von § 98. mit Fig. 1. S. 473 vorgezeichnet; wir werden wieder das allgemeine Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, und haben dann, die Flächen der beiden rechtwinkligen Dreiecke nach dem bisherigen mit F_1 und F_2 bezeichnend, und für die Gesamtfläche das Zeichen F annehmend:

$$F = F_1 + F_2 \tag{10}$$

Wenn wir die Formel (9) für die Fläche F eines rechtwinkligen Dreiecks, auf die beiden Teile von Fig. 1. anwenden, so haben wir:

$$F_1 = \frac{pq}{2} + \frac{pq}{240}(k_a(4p^2 + 3q^2) + k_{90}(3p^2 + 3q^2) + k_c(3p^2 + 4q^2))$$

$$F_2 = \frac{pq'}{2} + \frac{pq'}{240}(k_a(4p^2 + 3q'^2) + k_{90}(3p^2 + 3q'^2) + k_b(3p^2 + 4q'^2))$$

Hiezu hat man nach (24)—(27) § 97. S. 472:

$$p = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3}\,\frac{3k_a + 3k_{90} + 2k_c}{8}\right), \quad p = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3}\,\frac{3k_a + 3k_{90} + 2k_b}{8}\right)$$

$$q = b \sin \alpha \left(1 - \frac{p^2}{6}\,\frac{2k_a + k_{90} + k_c}{4}\right), \quad q' = c \sin \alpha' \left(1 - \frac{p^2}{6}\,\frac{2k_a + k_{90} + k_b}{4}\right)$$

$$p = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3}\,\frac{3k_a + 3k_{90} + 2k_b}{8}\right), \quad p = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3}\,\frac{3k_a + 3k_{90} + 2k_c}{8}\right)$$

Dadurch ist der Weg gezeigt, auf welchem man die krumme Dreiecksfläche F zunächst in p, q, q' nebst den verschiedenen k ausdrücken kann. Dann hat man verschiedene geometrische Beziehungen in dem Dreieck selbst, z. B. $p^2 + q^2 = b^2$, $p^2 + q'^2 = c^2$ als erste Näherungen u. s. w. Wenn man nach diesen Andeutungen die Rechnung durchführt, so wird man erhalten:

$$F = \frac{bc \sin A}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{120} k_a (3b^2 + 3c^2 - 12bc \cos A) \right.$$
$$+ \frac{1}{120} k_b (3b^2 + 4c^2 - 9bc \cos A) \qquad (11)$$
$$\left. + \frac{1}{120} k_c (4b^2 + 3c^2 - 9bc \cos A) \right\}$$

Diese Gleichung (11), welche man auch noch in zwei anderen Formen mit $ac \sin B$ und mit $ab \sin C$, anschreiben kann, ist nicht symmetrisch, weil eines der drei Elemente A, B, C bzw. a, b, c bevorzugt ist. Wir wollen deshalb $bc \sin A$ durch $\triangle$ ersetzen, und haben hiezu von (14) § 98. S. 476:

$$A = A^* + \frac{\triangle}{3} \frac{2k_a + k_b + k_c}{4}$$

und im ebenen Dreieck: $2bc \cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$

Da man in den Gliedern zweiter Ordnung von (11) stets A mit A^* vertauschen darf, kann man mittelst der soeben geschriebenen zwei Gleichungen die (11) auf folgende Form bringen:

$$F = \triangle \left\{ 1 + \frac{1}{120} k_a (a^2 + 2b^2 + 2c^2) \right.$$
$$+ \frac{1}{120} k_b (2a^2 + b^2 + 2c^2) \qquad (12)$$
$$\left. + \frac{1}{120} k_c (2a^2 + 2b^2 + c^2) \right\}$$

Setzt man hier $k_a = k_b = k_c = k$, so erhält man:

$$F = \triangle \left(1 + \frac{1}{24} k (a^2 + b^2 + c^2) \right) \qquad (13)$$

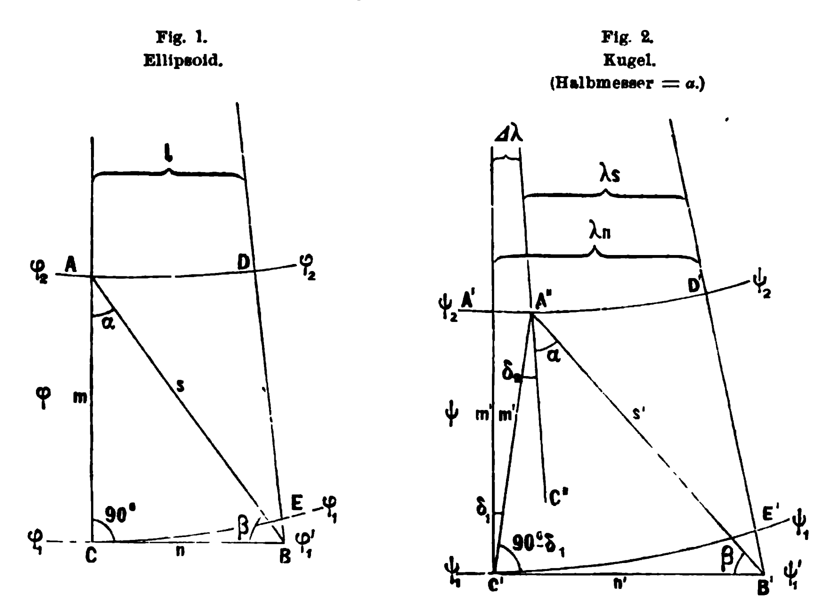
Dieses entspricht dem früheren (36) S. 255, und damit kann man auch (31) — (42) von S. 254—255 leicht auf unseren Fall übertragen, was in der Formel-Zusammenstellung des § 101. geschehen soll.

§ 100. Zweite Begründung der Grundformeln für geodätische Dreiecke.*)

Alle zu wirklichen Dreiecks-Berechnungen geeigneten Formeln, die wir im bisherigen gefunden haben, beruhen auf Reihen-Entwicklungen, die meist bis zu Gliedern von der Ordnung $\frac{r^2 s^2}{r^2}$ und $\frac{s^4}{r^4}$ fortgesetzt wurden, d. h. bis zu Ordnungen, welche in anderen Fällen, z. B. bei der geodätischen Hauptaufgabe Kapitel VIII, leicht erreicht und auch überschritten wurden. Es ist daher ein naheliegender Gedanke, irgend eine

*) Diese *zweite* Begründung ist für die nachher in § 101. zu behandelnden praktischen Anwendungen nicht nötig, sondern mehr zur theoretischen Weiterentwicklung, und als eine Anwendung des Prinzips der konformen Linien-Abbildung (nach § 94. S. 462) hier aufgenommen. Ausserdem kann aber dieser § 100. unmittelbar an § 93 und § 94. *ohne* § 95. — 99. angeschlossen werden. (Wir haben die Entwicklungen dieses § 100. teilweise in anderer Form, früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1889“, S. 295—304, behandelt.)

jener früheren Entwicklungen von Kapitel VIII. dadurch auch auf geodätische Dreiecke anzuwenden, dass zwei Dreiecksseiten als zwei Strahlen s in dem Sinne von Fig. 1. S. 386 erscheinen, und der von den zwei Seiten eingeschlossene Dreieckswinkel als Differenz zweier Azimute α nach Fig. 1. S. 386 behandelt wird.



Wir betrachten in Fig. 1. ein geodätisches rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen eine Kathete AC in einem Meridian liegt; die andere Kathete CB ist in C rechtwinklig zu CA, und die dritte Seite BA ist dadurch bestimmt. Alle drei Seiten sind geodätische Linien, und haben die Längen $AC = m$, $CB = n$, $BA = s$.

Die geographischen Breiten der drei Punkte A, C, B sind in Fig. 1. eingeschrieben, nämlich φ_2 für A, dann φ_1 für C und φ'_1 für B; ferner sei l der geographische Längenunterschied zwischen A und B oder zwischen C und B.

Nun werden die drei Seiten AC, CB und BA, jede für sich, nach dem Gesetze von § 81. von dem Ellipsoid auf eine Kugel vom Halbmesser a = grosse Ellipsoid-Halbaxe, übertragen, wie durch Fig. 2. angedeutet ist. Die Breiten φ gehen über in die reduzierten Breiten ψ, d. h. es bestehen (nach § 80.) zwischen φ und ψ die Gleichungen:

$$tang\,\psi = \sqrt{1 - e^2}\,tang\,\varphi \tag{1}$$

oder nach (24) S. 404:

$$\varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{4} + \ldots\right) sin(\varphi + \psi) \tag{2}$$

d. h. bei Vernachlässigung von e^2 dürfen φ und ψ gegenseitig vertauscht werden.

Die geodätischen Linien m, n, s geben bei der Übertragung auf die Kugel grösste Kreisbögen m' n' s', welchen beim Halbmesser a die Centriwinkel $\frac{m'}{a}, \frac{n'}{a}, \frac{s'}{a}$ entsprechen.

Die Azimute der Seiten m, n, s bleiben bei der Übertragung unverändert.

In dieser Weise werde AC nach $A'C'$ übertragen, wo $A'C'$ ein Kugelmeridian ist; dann werde CB nach $C'B'$ übertragen, wobei der Winkel $A'C'B' = ACB = 90°$ bleibt, endlich kommt die Übertragung BA nach $B'A''$, wobei das Azimut in B oder dessen Complement β in Fig. 2. und Fig. 1. gleich bleibt.

Nun hat man aber die Eigentümlichkeit, dass der Endpunkt A'' der Linie $B'A''$ *nicht* mit dem Anfangspunkt A' der Linie $A'C'$ zusammen fällt, weil die Linien BC und BA zwar gleiche geographische Länge l auf dem Ellipsoid, aber nicht gleiche Werte λ_n und λ_s auf der Kugel haben.

Da das geodätische Dreieck ACB sich in einem *nicht* geschlossenen Viereck $A'C'B'A''$ abgebildet hat, wird man zuerst darauf ausgehen müssen, das Klaffen zwischen den zwei Punkten A'' und A' zu bestimmen. Wenn $A'C'$ der Meridian von A', dann $A''C''$ der Meridian von A'' ist, ferner $\Delta\lambda$ der geographische Längenunterschied zwischen diesen beiden Meridianen, so wird es auch möglich sein, für die schiefe Verbindung $C'A''$ (welche sich als hinreichend genau $= C'A'$ ergeben wird) die beiden Azimute δ_1 und δ_2 zu berechnen; und dann hat man ein geschlossenes sphärisches Dreieck $A''C'B'$, dessen Winkel bezw. sind:

$$A'' = \alpha + \delta_2 \quad , \quad C'' = 90° - \delta_1 \quad , \quad B' = \beta \tag{3}$$

Auf dieses Dreieck kann man die Formeln der sphärischen Trigonometrie anwenden; und da andererseits die Verwandtschaften mit dem ursprünglichen Dreieck ACB bekannt sind, so werden wir auf diesem Wege zu Formeln gelangen, welche sich auf das rechtwinklige geodätische Dreieck ACB auf dem *Ellipsoid* beziehen.

Nachdem so der Gang unserer Betrachtungen im allgemeinen vorgezeichnet ist, gehen wir zur Ausführung im einzelnen über.

Wir entnehmen von dem früheren § 83. die Gleichung für λ, (20) S. 417, mit Weglassung der Glieder von der Ordnung η^4:

$$\lambda = Vl\left\{1 - \frac{\eta^2}{24}(b^2(1+3t^2) + 2l^2 \sin^2\varphi)\right\} \tag{4}$$

Die hier zunächst allgemein mit φ bezeichnete Breite hat nun in unserem Falle zwei verschiedene Anwendungen, die mit φ_s und φ_n unterschieden werden sollen, indem φ_s die Mittelbreite der Hypotenuse $AB = s$, und φ_n die Mittelbreite der Kathete $BC = n$ sein soll, d. h. wir bilden aus (4):

$$\lambda_s = V_s l\left\{1 - \frac{\eta_s^2}{24}(b_s^2(1+3t_s^2) + 2l^2 \sin^2\varphi_s)\right\} \tag{5}$$

$$\lambda_n = V_n l\left\{1 + \frac{\eta_n^2}{24}(b_n^2(1+3t_n^2) + 2l^2 \sin^2\varphi_n)\right\} \tag{6}$$

Mit Benützung der in Fig. 1. eingeschriebenen Breiten φ_2, φ_1 und φ'_1 haben wir hiefür:

$$\varphi_s = \frac{\varphi'_1 + \varphi_2}{2} \quad , \quad \varphi_n = \frac{\varphi'_1 + \varphi_1}{2} \tag{7}$$

Dabei bestehen nach (25) S. 389 für die beiden Katheten m und n in erster Näherung die Breitenunterschieds-Gleichungen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{a} \quad , \quad \varphi_1 - \varphi'_1 = \frac{n^2}{2a^2}\tan\varphi_1 \tag{8}$$

Zugleich bezeichnen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \tag{9}$$

(Diese *Mittelbreite* φ ist nicht zu verwechseln mit dem *allgemeinen* Zeichen φ in (1), welches nun zweifach in φ_s und φ_n spezialisiert wird.) Aus (7), (8) und (9) erhält man:

$$\varphi_s = \varphi_1 + \frac{m}{2a} - \frac{n^2}{4a^2} \, tang \, \varphi_1 \quad , \quad \varphi_n = \varphi_1 - \frac{n^2}{4a^2} \, tang \, \varphi_1 \tag{10}$$

Um den so bestimmten Wert φ_s in (5) einzusetzen, brauchen wir zuerst $\cos \varphi_s$, das in $\eta_s^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi_s$ und in $V_s^2 = 1 + \eta_s^2$ vorkommt. Wir bilden also nach (10):

$$\cos \varphi_s = \cos \left(\varphi_1 + \left(\frac{m}{2a} - \frac{n^2}{4a^2} t_1\right)\right)$$

$$\cos \varphi_s = \cos \varphi_1 \left(1 - \left(\frac{m}{2a} - \frac{n^2}{4a^2} t_1\right) t_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2a} - \frac{n^2}{4a^2} t_1\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{m}{2a} - \ldots\right)^3 t_1\right)$$

$$\cos \varphi_s = \cos \varphi_1 \left(1 - \frac{m}{2a} t_1 + \frac{n^2}{4a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{8a^2} + \frac{m n^2}{8a^3} t_1 + \frac{m^3}{48 a^3} t_1\right)$$

$$\cos^2 \varphi_s = \cos^2 \varphi_1 \left(1 - \frac{m}{a} t_1 + \frac{n^2}{2a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4a^2} t_1^2 + \frac{m^3}{6a^3} t_1 + \frac{m n^2}{4a^3} t_1 - \frac{m n^2}{4a^3} t_1^3\right) \tag{11}$$

Hieraus entnehmen wir zunächst in erster Näherung:

$$\eta_s^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_s \text{ und } \eta_1^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_1$$

$$\eta_s^2 = \eta_1^2 \left(1 - \frac{m}{a} t_1 + \ldots\right) \tag{11a}$$

Ausserdem aber genauer, für den ersten Faktor von (5):

$$V_s = \sqrt{1 + \eta_s^2} = 1 + \frac{\eta_1^2}{2}\left(1 - \frac{m}{a} t_1 + \frac{n^2}{2a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4a^2} t_1^2 + \frac{m^3}{6a^3} t_1 \right.$$
$$\left. + \frac{m n^2}{4a^3} t_1 - \frac{m n^2}{4a^3} t_1^3\right) \tag{12}$$

Ferner ist für (5) zu nehmen:

$$b_s = \frac{m}{a} + \frac{n^2}{2a^2} t_1 \quad , \quad b_s^2 = \frac{m^2}{a^2} + \frac{m n^2}{a^3} t_1 \tag{13}$$

$$b_s^2 t_s^2 = \frac{m^2}{a^2} t_1^2 + \frac{m^3}{a^3} t_1 (1 + t_1^2) + \frac{m n^2}{a^3} t_1^3 \tag{14}$$

Nach diesem braucht man noch l, zunächst für das zweite Glied l^2 in (5) hinreichend:

$$l = \frac{n}{a} \frac{1}{\cos \varphi_1} + \frac{n^3}{a^3} \cdots \qquad l^2 = \frac{n^2}{a^2} \frac{1}{\cos^2 \varphi_1} + \frac{n^4}{a^4} \cdots$$

hiezu: $$\varphi_s = \varphi_1 + \frac{m}{2a} \quad , \quad \sin \varphi_s = \sin \varphi_1 + \frac{m}{2a} \cos \varphi_1$$

also: $$l^2 \sin^2 \varphi_s \, \frac{n^2}{a^2} t_1^2 + \frac{m n^2}{a^3} t_1 \tag{15}$$

Nun kann man die Ausdrücke (11a) — (15) in (5) einsetzen, und bekommt damit, nachdem sich verschiedenes zusammengezogen hat:

$$\lambda_s = l\left\{1 + \frac{\eta_1^2}{2}\left(12 - \frac{m}{a} t_1 + \frac{n^2}{3a^2} t_1^2 - \frac{m^2}{3a^2} - \frac{n^2 m}{3a^3} t_1^3\right)\right\} \tag{16}$$

Erheblich einfacher wird die Entwicklung des anderen Wertes λ, nämlich λ_n nach (6), welcher zu dem Bogen n mit der Mittelbreite φ_n nach (10) gehört. Da φ_s

in φ_s übergeht, wenn man $m = 0$ setzt, so wird auch λ_s aus λ_e hervorgehen durch die Annahme $m = 0$; d. h. wir erhalten aus (16):

$$\lambda_s = l\left\{1 + \frac{\eta_1^2}{2}\left(12 + \frac{n^2}{3a^2}t_1^2\right)\right\} \tag{17}$$

Nun bildet man die Differenz aus (16) und (17):

$$\lambda_s - \lambda_e = l\frac{\eta_1^2}{2}\left\{\frac{m}{a}t_1 + \frac{m^2}{3a^2} + \frac{n^2 m}{3a^3}t_1^2\right\} \tag{18}$$

Hier ist l bis zur dritten Ordnung einzuführen, wozu wir die Entwicklung (3) S. 289 benützen können:

$$l = \frac{n}{a}\,\frac{1}{\cos\varphi_1} - \frac{n^3}{3a^3}\,\frac{\tan^2\varphi_1}{\cos\varphi_1} \tag{19}$$

Dieses mit (18) zusammen genommen giebt:

$$(\lambda_s - \lambda_e)\cos\varphi_1 = \Delta\lambda\cos\varphi_1 = \frac{\eta_1^2}{2}\left(\frac{mn}{a^2}t_1 + \frac{m^2 n}{3a^3}\right) \tag{20}$$

Dieses ist auf vierte Ordnung einschliesslich genau, weil die Glieder mit mn^3 von selbst fortgefallen sind.

Wir brauchen nun die zwei wichtigen kleinen Azimutalwinkel δ_1 und δ_2 von Fig. 2., welche durch sphärische Entwicklung zu finden sind. Eine Cotangenten-Gleichung ((9) S. 195) auf das Polar-Dreieck mit der kurzen Seite $C'A''$ angewendet giebt:

$$\tan\psi_2\cos\psi_1 = \sin\psi_1\cos\Delta\lambda + \sin\Delta\lambda\cot\delta_1 \tag{20a}$$

Da $\Delta\lambda$ nach (20) von der Ordnung η^2 ist, haben wir in der Entwicklung von (20a) nur die erste Potenz von $\Delta\lambda$ zu berücksichtigen, weil $\Delta\lambda^2$ bereits η^4 geben würde, was wir immer vernachlässigen. Wir bilden daher aus (20a):

$$\tan\psi_2\cos\psi_1 = \sin\psi_1 + \Delta\lambda\cot\delta_1$$

$$\tan\delta_1 = \frac{\Delta\lambda\cos\psi_2}{\sin(\psi_2 - \psi_1)}\quad,\quad \text{wobei } \psi_2 - \psi_1 = \frac{m'}{a}$$

Dieses giebt bis zur dritten Potenz entwickelt:

$$\delta_1 = \frac{\Delta\lambda\, a}{m'}\left(1 + \frac{m'^2}{6a^2}\right)\cos\psi_2$$

Hier dürfen aber auch m' mit m und ψ_2 mit φ_2 vertauscht werden, und wenn wir zugleich die andere Formel für δ_2, welche auf ähnlichem Wege gefunden wird, hinzusetzen, so haben wir:

$$\delta_1 = \Delta\lambda\frac{a}{m}\left(1 + \frac{m^2}{6a^2}\right)\cos\varphi_2 \quad,\quad \delta_2 = \Delta\lambda\frac{a}{m}\left(1 + \frac{m^2}{6a^2}\right)\cos\varphi_1 \tag{21}$$

Wenn man hier $\varphi_2 \quad \varphi_1 + \frac{m}{a}$ setzt, also $\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1\left(1 - \frac{m}{a}t_1 - \frac{m^2}{2a^2}\right)$, so bekommt man:

$$\delta_1 = \Delta\lambda\frac{a}{m}\cos\varphi_1\left(1 - \frac{m}{a}t_1 - \frac{m^2}{3a^2}\right)$$

Hier und in δ_2 von (21) setzen wir $\Delta\lambda$ aus (20) ein, und erhalten:

$$\delta_1 = \eta_1^2\frac{n}{2a}\left(t_1 + \frac{m}{3a} - \frac{m}{a}t_1^2 - \frac{2}{3}\frac{m^2}{a^2}t_1\right) \tag{22}$$

$$\delta_2 = \eta_1^2\frac{n}{2a}\left(t_1 + \frac{m}{3a} + \frac{m^2}{6a^2}t_1\right) \tag{23}$$

$$\delta_2 - \delta_1 = \eta_1^2\frac{n}{2a}\left(\frac{m}{a}t_1^2 + \frac{5}{6}\frac{m^2}{a^2}t_1\right) \tag{24}$$

Nachdem δ_2 entwickelt ist, kann man an Fig. 2. auch sofort einsehen, dass die beiden Linien $C'A'$ und $C'A''$ als hinreichend gleich zu nehmen sind, denn es wäre in erster Näherung $C'A' = C'A'' \cos\delta_2$; da aber δ_2 nach (23) bereits von der Ordnung η^2 ist, würde $\cos\delta_2$ nur eine Änderung von der Ordnung η^4 geben, welche wir hier vernachlässigen; es ist daher $C'A' = C'A'' = m'$ zu nehmen, wie auch in Fig. 2. mit zweimaligem m' eingeschrieben und für alles weitere gültig ist.

Nachdem wir so über die sämtlichen *Winkel* des Dreiecks $A''C'B'$ ins klare gekommen sind, wollen wir auch noch die *Seiten* m', n', s' betrachten. Wir brauchen hiezu die frühere Gleichung (19) S. 417, mit $\sigma = \frac{s'}{a}$ und $S = \frac{s}{N} = \frac{s V_s \sqrt{1-e^2}}{a}$ und Vernachlässigung von η^4, also:

$$s' = s V_s \left\{1 - \frac{\eta_s^2}{24}\left(b_s^2(1-t^2) + 2l^2 \sin^2\varphi_s\right)\right\} \tag{25}$$

Wenn man hier wieder dieselben Ausdrücke (11a)—(15) einsetzt, welche schon bei (5) gedient haben, so erhält man:

$$s' = s\left\{1 + \frac{\eta_1^2}{2}\left(1 - \frac{m}{a}t_1 + \frac{n^2}{3a^2}t_1^2 - \frac{m^2}{3a^2} + \frac{m^2}{3a^2}t_1^2 + \frac{m^3}{3a^3}t_1\right)\right\} \tag{26}$$

Lässt man hier alle Glieder mit m fort, so bekommt man:

$$n' = n\left\{1 + \frac{\eta_1^2}{2}\left(1 + \frac{n^2}{3a^2}t_1^2\right)\right\} \tag{27}$$

Der Quotient dieser beiden letzten Gleichungen giebt:

$$\frac{s'}{n'} = \frac{s}{n}\left\{1 + \frac{\eta_1^2}{2}\left(-\frac{m}{a}t_1 + \frac{m^2}{3a^2}t_1^2 - \frac{m^2}{3a^2} + \frac{m^3}{3a^3}t_1\right)\right\} \tag{28}$$

Andererseits bekommt man durch Fortlassen der Glieder mit n aus (26):

$$m' = m\left\{1 + \frac{\eta_1^2}{2}\left(1 - \frac{m}{a}t_1 - \frac{m^2}{3a^2} + \frac{m^2}{3a^2}t_1^2 + \frac{m^3}{3a^3}t_1\right)\right\} \tag{29}$$

Aus (26) und (29) hat man auch:

$$\frac{s'}{m'} = \frac{s}{m}\left\{1 + \frac{\eta_1^2}{6}\frac{n^2}{a^2}t_1^2\right\} \tag{30}$$

Einführung der Krümmungsmasse.

Der allgemeine Ausdruck für das Krümmungsmass ist nach (6) § 95. S. 464 und (22a) S. 211:

$$k = \frac{1}{r^2} = \frac{(1 - e^2\sin^2\varphi)^2}{a^2(1-e^2)} = \frac{1}{a^2}(1 + e'^2\cos^2\varphi)(1 - e^2\sin^2\varphi)$$

Wenn wir jedoch, wie schon im bisherigen geschehen ist, die Glieder von der Ordnung e^4 oder e'^4 vernachlässigen (was auch gleichbedeutend ist mit der Näherung $e^2 = e'^2$), so können wir statt des vorstehenden auch schreiben:

$$k = \frac{1}{a^2}(1 - e'^2 + 2e'^2\cos^2\varphi) \text{ oder } k = \frac{1}{a^2}(1 - e'^2 + 2\eta^2)$$

Da hierin η^2 allgemein $= e'^2\cos^2\varphi$ ist, und im besonderen $\eta_1^2 = e'^2\cos^2\varphi_1$, sowie $\eta_2^2 = e'^2\cos^2\varphi_2$, so hat man $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{m}{a}$, also $\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 - \frac{m}{a}\sin\varphi_1$ und

$\cos^2\varphi_2 = \cos^2\varphi_1\left(1-\frac{2m}{a}\tang\varphi_1\right)$, also $\eta_2^2 = \eta_1^2\left(1-\frac{2m}{a}t_1\right)$; und in den drei Ecken unseres rechtwinkligen Dreiecks Fig. 1. bestehen folgende Krümmungsmasse:

$$k_\alpha = \frac{1}{a^2}\left(1-e'^2+2\eta_1^2\left(1-\frac{2m}{a}t_1\right)\right)$$
$$k_{90} = \frac{1}{a^2}(1-e'^2+2\eta_1^2)$$
$$k_\beta = \frac{1}{a^2}(1-e'^2+2\eta_1^2)$$

$$\text{Mittel } \frac{k_\alpha+k_{90}+k_\beta}{3} = \frac{1}{a^2}\left(1-e'^2+2\eta_1^2-\frac{4}{3}\eta_1^2\frac{m}{a}t_1\right) \tag{31}$$

Es ist aber $e'^2 = e'^2\cos^2\varphi_1 + e'^2\sin^2\varphi_1 = \eta_1^2+\eta_1^2 t_1^2$ und damit kann man (31) auch so schreiben:

$$k_s = \frac{k_\alpha+k_{90}+k_\beta}{3} = \frac{1}{a^2}\left(1+\eta_1^2-\eta_1^2 t^2-\frac{4}{3}\eta_1^2\frac{m}{a}t_1\right) \tag{32}$$

Dieses ist das *einfache* Mittel der drei Krümmungsmasse; zum Gebrauche für das folgende bilden wir auch noch zwei andere Mittelwerte:

$$k_{sin} = \frac{k_\alpha+k_{90}+2k_\beta}{4} = \frac{1}{a^2}\left(1+\eta_1^2-\eta_1^2 t_1^2-\eta_1^2\frac{m}{a}t_1\right) \tag{33}$$

$$k_{cos} = \frac{2k_\alpha+3k_{90}+3k_\beta}{8} = \frac{1}{a^2}\left(1+\eta_1^2-\eta_1^2 t_1^2-\eta_1^2\frac{m}{a}t_1\right) \tag{34}$$

Diese beiden Ausdrücke (33) und (34) sind einander *gleich*, d. h. für die in Fig. 1. dargestellten Verhältnisse ist $k_{sin} = k_{cos}$, weil in diesem besonderen Falle $k_{90} = k_\beta$ ist.

Wenn wir nachher in einer Entwicklung die Funktion $1+\eta_1^2-\eta_1^2 t_1^2-\eta_1^2\frac{m}{a}t_1$ finden, so können wir dieselbe nach (33) oder (34) entweder $= a^2 k_{sin}$ oder $= a^2 k_{cos}$ setzen; wir müssen aber vorsichtig sein, wenn wir *weitere* Schlüsse hierauf bauen wollen. (Weiteres hierüber werden wir bei (43) bemerken.)

Nach all diesen Vorbereitungen können wir die drei Hauptgleichungen für das sphärische Dreieck $A''\,C'\,B'$ anschreiben.

Wir beginnen mit dem sphärischen Excess dieses Dreiecks, welcher ε' heissen soll, während ε der geodätische Excess des ellipsoidischen Dreiecks Fig. 1. sei, dann hat man:

$$\alpha+\beta+90°-180° = \varepsilon$$
$$(\alpha+\delta_2)+\beta+(90°-\delta_1)-180° = \varepsilon'$$

also:

$$\varepsilon = \varepsilon'-(\delta_2-\delta_1)$$

Nun ist für das sphärische Dreieck:

$$\varepsilon' = \frac{m'\,n'}{2a^2}\sin(90°-\delta_1) = \frac{m'\,n'}{2a^2}\cos\delta_1$$

Da aber δ_1 nach (22) von der Ordnung η^2 ist, braucht man nur:

$$\varepsilon' = \frac{m'\,n'}{2a^2} \text{ also } \varepsilon = \frac{m'\,n'}{2a^2}-(\delta_2-\delta_1) \tag{35}$$

Hiezu benützt man, mit hier ausreichender Genauigkeit, nach (29) und (27):

$$m' = m\left(1 + \frac{\eta_1^2}{2}\left(1 - \frac{m}{a}t_1\right)\right) \quad , \quad n' = n\left(1 + \frac{\eta_1^2}{2}\right)$$

also:

$$\frac{m'n'}{2a^2} = \frac{mn}{2a^2}\left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 \frac{m}{2a} t_1\right)$$

hiezu nach (24):

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{mn}{2a^2}\left(\eta_1^2 t_1^2 + \frac{5}{6}\eta_1^2 \frac{m}{a} t_1\right)$$

Also:

$$\varepsilon = \frac{mn}{2a^2}\left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \frac{4}{3}\eta_1^2 \frac{m}{a} t_1\right) \tag{36}$$

Nach (32) kann man hiefür schreiben:

$$\varepsilon = \frac{mn}{2a^2} \frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} \tag{37}$$

Um zum Sinus-Satz zu gelangen, schreiben wir für das sphärische Dreieck Fig. 2.:

$$\frac{\sin(90° - \delta_1)}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{s'}{a}}{\sin\frac{m'}{a}} = \frac{\frac{s'}{a} - \frac{s'^3}{6a^3}}{\frac{m'}{a} - \frac{m'^3}{6a^3}}$$

Dadurch wird der Schlussfehler $A''A'$ des Dreiecks Fig. 2. in der Richtung rechtwinklig zum Meridian zum Ausdruck gebracht.

Hier kann wieder $\cos\delta_1 = 1$ gesetzt werden, also:

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{s'}{m'}\left(1 - \frac{s'^2 - m'^2}{6a^2}\right) \tag{38}$$

Um zu $s'^2 - m'^2$ zu gelangen, schreibt man nach Fig. 2.:

$$\cos\frac{s'}{a} = \cos\frac{m'}{a}\cos\frac{n'}{a} + \sin\frac{m'}{a}\sin\frac{n'}{a}\sin\delta_1$$

entwickelt:

$$s'^2 - m'^2 = n'^2 - 2m'n'\delta_1 \tag{39}$$

Dazu nehmen wir von (27):

$$n'^2 = n^2\left(1 + \eta_1^2 + \eta_1^2 \frac{n^2}{3a^2} t_1^2\right)$$

von (22):

$$2m'n'\delta_1 = \eta_1^2 m \frac{n^2}{a} t_1$$

also:

$$s'^2 - m'^2 = n^2\left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1 + \frac{n^2}{a^2} \cdots\right) \tag{40}$$

Wenn man hiezu (30) nimmt, und damit (38) zusammensetzt, so bekommt man:

$$s\sin\beta = m + \frac{mn^2}{6}\left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \eta_1^2 \frac{m}{a} t_1\right)$$

Dafür kann man nach (33) schreiben:

$$s\sin\beta = m + \frac{mn^2}{6} \frac{k_\alpha + 2k_\beta + k_{90}}{4} \tag{41}$$

Um endlich auch noch eine Gleichung für $s\cos\beta$ zu erhalten, schreiben wir zunächst folgende auf das sphärische Dreieck $A''B'C'$ Fig 2. bezogene Gleichung (nach der Gruppe (11) S. 195), wodurch der Schlussfehler $A'A''$ in der *Breite* zum Ausdruck gebracht wird:

$$\sin\frac{s'}{a}\cos\beta = \cos\frac{m'}{a}\sin\frac{n'}{a} - \sin\frac{m'}{a}\cos\frac{n'}{a}\cos(90^\circ - \delta_1)$$

also:

$$\cos\beta = \frac{\sin\frac{n'}{a}}{\sin\frac{s'}{a}}\cos\frac{m'}{a} - \frac{\sin\frac{m'}{a}}{\sin\frac{s'}{a}}\cos\frac{n'}{a}\sin\delta_1$$

Entwickelt:

$$\cos\beta = \frac{n'}{s'}\left(1 - \frac{n'^2 - s'^2}{6a^2}\right)\left(1 - \frac{m'^2}{2a^2}\right) - \frac{m'}{s'}\left(1 + \frac{s'^2 - m'^2}{6a^2}\right)\left(1 - \frac{n'^2}{2a^2}\right)\delta_1 \quad (42)$$

Hiezu hat man von (39):

$$s'^2 - n'^2 = m'^2 - 2m'n'\delta_1,$$

also nach (29) und (22):

$$\frac{s'^2 - n'^2}{a^2} = \frac{m^2}{a^2} + \eta_1^2\left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{m^3}{a^3}t_1 - \frac{mn^2}{a^3}t_1\right)$$

nochmals aus (29): $1 - \frac{m'^2}{2a^2} = 1 - \frac{m^2}{2a^2} - \frac{\eta_1^2}{2}\frac{m^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{2}\frac{m^3}{a^3}t_1$

Im zweiten Teile von (42) ist δ_1 nach (22) einzusetzen, und da hiebei der Faktor η_1^2 ist, genügt es, im übrigen zu setzen:

$$\frac{m'}{s'}\left(1 + \frac{s'^2 - m'^2}{6a^2}\right)\left(1 - \frac{n'^2}{2a^2}\right) = \frac{m}{s}\left(1 - \frac{n^2}{3a^2}\right)$$

Wenn man alles dieses in (42) einsetzt, und gleichartiges ordnet, so erhält man:

$$s\cos\beta = n - \frac{m^2 n}{3}\left(1 + \eta_1^2 - \eta_1^2 t_1^2 - \eta_1^2\frac{m}{a}t_1\right)$$

und wegen (34) schreiben wir hiefür:

$$s\cos\beta = n - \frac{m^2 n}{3}\,\frac{2k_\alpha + 3k_\beta + 3k_{90}}{8} \quad (43)$$

Nun haben wir in den drei Gleichungen (37), (41), (43) *dieselben* Formeln wie früher in den ersten Gliedern von (31), (20), (21) § 97. S. 471—473, wenn $m = p$ und $n = q$ genommen wird. Es besteht aber noch der grosse Unterschied, dass unsere neue Entwicklung (37), (41), (43) nur für den besonderen Fall der Fig. 1. S. 481 gilt, nämlich für ein rechtwinkliges geodätisches Dreieck, dessen eine Kathete m im Meridian und dessen andere Seite n rechtwinklig zum Meridian liegt.

Um die Formeln zu verallgemeinern, kann man zuerst zeigen, dass die Gleichungen (41) und (43) auch entsprechend für den *anderen* Winkel α gelten, indem man $\beta = 90^\circ - (\alpha - \epsilon)$ setzt, und dazu s nach (37) benützt. Hat man dieses erkannt, so kann man weiter schliessen, dass die beiden Formeln (33) und (34), obgleich in dem besonderen Falle $k_{sin} = k_{cos}$ war, nun ihre für α und β gemeinsame Berechtigung haben; und weiter kann man auf demselben Wege wie bei § 93. mit Fig. 4. S. 459 die Verallgemeinerung der gefundenen Formeln fortsetzen.

Wir wollen dieses hier nicht weiter verfolgen, da nach den Entwicklungen von § 97. und § 98. kein praktisches Bedürfnis hiezu vorliegt.

Unsere vorstehende Entwicklung wollen wir aber in zweifachem Sinne als nicht überflüssig bezeichnen: Erstens giebt sie uns eine schöne Anwendung des Prinzips der konformen Linien-Abbildung in dem Sinne der Anmerkung zu § 94. S. 462, und zweitens haben wir in diesem § 100. eine sofort an § 93. und § 94. anschliessbare Theorie, welche den Einfluss derjenigen Glieder zu schätzen gestattet, welche in § 93. vernachlässigt wurden.

§ 101. Praktische Anwendung der allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und 2. S. 473.)

Wir wollen zuerst die verschiedenen von § 98. und § 99. zur praktischen Anwendung geeigneten Formeln zusammenstellen, und dazu auch noch einige zusammenfassende Bezeichnungen einführen. Wenn die Krümmungsmasse in den drei Ecken eines Dreiecks mit k_a, k_b, k_c bezeichnet sind, so nehmen wir hiezu einen Mittelwert:

$$\frac{k_a + k_b + k_c}{3} = k_0 \tag{1}$$

Dieser Wert k_0 entspricht dem Schwerpunkt des Dreiecks und dem arithmetischen Mittel der geographischen Breiten der drei Eckpunkte des Dreiecks.

Wenn die drei Seiten eines geodätischen Dreiecks die Längen a, b, c haben, so berechnen wir das mittlere Seitenquadrat:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = m^2 \tag{2}$$

Die Winkel des geodätischen Dreiecks sind A, B, C, und die Winkel eines ebenen Dreiecks, welches mit dem geodätischen Dreieck gleiche Seitenlängen a, b, c hat, sind A^*, B^*, C^*. Die Winkelsumme des ebenen Dreiecks, d. h. $A^* + B^* + C^*$ ist $= 180°$, und die Summe der Winkel des geodätischen Dreiecks, d. h. $A + B + C$ ist $= 180° + \varepsilon$, wo ε der geodätische Excess des Dreiecks heisst.

Die Fläche des geodätischen Dreiecks, auf der krummen Oberfläche gemessen, sei F, und die Fläche des ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c sei $= \triangle$.

Mit diesen Bezeichnungen haben wir von (16) und (17) § 98. S. 477 mit Zusetzung der nötigen ϱ:

$$A - A^* = \frac{\triangle}{3}\varrho\,\frac{2k_a + k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\varrho\,k^2\,\frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{15} \tag{3}$$

oder mit Einführung von k_0 und von m^2 in dreifacher Form:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{3}\varrho\,k_0 + \frac{\triangle}{12}\varrho\,(k_a - k_0) + \frac{\triangle}{120}\varrho\,k^2\,(7m^2 - 2a^2) \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{3}\varrho\,k_0 + \frac{\triangle}{12}\varrho\,(k_b - k_0) + \frac{\triangle}{120}\varrho\,k^2\,(7m^2 - 2b^2) \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{3}\varrho\,k_0 + \frac{\triangle}{12}\varrho\,(k_c - k_0) + \frac{\triangle}{120}\varrho\,k^2\,(7m^2 - 2c^2) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \triangle\,\varrho\,k_0 + 0 \qquad + \frac{\triangle}{8}\varrho\,k^2\,m^2 \tag{5}$$

Der theoretischen Vollständigkeit wegen fügen wir auch die Formel für die krumme Oberfläche F hier bei, nach (13) § 99. S. 480:

$$F = \triangle + \frac{\triangle}{8}\,k\,m^2 \tag{6}$$

und als Folge von (5) und (6):

$$\varepsilon = F\varrho\,k_0 + k^3 \ldots \tag{7}$$

Endlich bildet man aus (4) und (5) durch Elimination von $\triangle$ die Differenz:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} \frac{2k_a + k_b + k_c}{4k_0} + \varepsilon \frac{k}{180}(-2a^2 + b^2 + c^2) \tag{8}$$

oder mit Einführung der Mittelwerte k_0 und m^2 nach (1) und (2) in dreifacher Form:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{k_a - k_0}{k_0}\right) + \frac{\varepsilon k}{60}(m^2 - a^2) \\ B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{k_b - k_0}{k_0}\right) + \frac{\varepsilon k}{60}(m^2 - b^2) \\ C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12}\left(\frac{k_c - k_0}{k_0}\right) + \frac{\varepsilon k}{60}(m^2 - c^2) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Summe $\varepsilon = \varepsilon$.

Wo in den höheren Gliedern dieser Formeln k schlechthin steht, sind die einzelnen k_a, k_b, k_c nicht mehr unterschieden, und man kann dann nach Belieben etwa $k = k_0$ nehmen.

Die Zahlenwerte von k kann man aus der Hilfstafel Seite [2] — [23] unseres Anhangs entnehmen, denn es ist:

$$k = \frac{1}{r^2} \quad , \quad \log k = \log \frac{1}{r^2} \tag{10}$$

Auch darf man sich wohl erlauben, wenn es sich um den Mittelwert k_0 nach (1) handelt, statt des Mittels aus den k selbst, das Mittel aus den verschiedenen $\log k$ als $\log k_0$ gelten zu lassen, oder man kann auch $\log k_0$ zu dem arithmetischen Mittel der Breiten φ der drei Ecken des Dreiecks nehmen, insofern auf nicht zu weite Erstreckung die Differenzen zwischen den Breiten φ, zwischen den Werten k und den Werten $\log k$ alle nahezu einander proportional angenommen werden dürfen.

Wenn die Proportionalität zwischen $\Delta\varphi$ und Δk nicht mehr stattfindet, so ist auch die der ganzen Theorie zu Grunde liegende Annahme, dass k eine *lineare* Funktion der Flächen-Coordinaten sei, nicht mehr erfüllt (vgl. (13) und (14) § 96. S. 468 und (13) § 97. S. 471).

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir zuerst wieder das klassische Dreieck Inselsberg-Hohehagen-Brocken, welches uns schon mehrfach, auf S. 234 und S. 256 als Rechen-Beispiel gedient hat.

Wir nehmen nach S. 234 zuerst wieder die genäherten geographischen Breiten der drei Eckpunkte des Dreiecks, und entnehmen darnach von Seite [14] des Anhangs die Krümmungsmasse:

Punkt	Breite	$\log k = \log \frac{1}{r^2}$	
Inselsberg	50° 51′ 9″	$\log k_a = 6.390\,1277{\cdot}8$	(10)
Hohehagen	51° 28′ 31″	$\log k_b = 6.390\,0659{\cdot}4$	
Brocken	51° 48′ 2″	$\log k_c = 6.390\,0337{\cdot}4$	
Mittel	51° 22′ 34″	$\log k_0 = 6.390\,0758{\cdot}2$	

Wir haben dabei ausnahmsweise scharf gerechnet, d. h. von Seite [14] zuerst $\log r$ interpoliert, und daraus $\log r^2$ und $\log k$ gebildet. Wir wollen damit die Winkel auf 0,000 001″ genau berechnen, was nur formellen Sinn für ein Vergleichs-Beispiel hat.

Indem wir die früheren Zahlenwerte von S. 239 und 255—256 wieder benützen, haben wir:

$$a = 69{,}194^{km} \qquad b = 105{,}973^{km} \qquad c = 84{,}941^{km}$$

$$a^2 = 4787{,}8^{qkm} \qquad b^2 = 11230{,}2^{qkm} \qquad c^2 = 7215{,}0^{qkm} \qquad m^2 = 7744{,}3^{qkm}$$

$$\log \triangle = 9.467\,2167\cdot 6 \qquad \triangle = 2\,932\,356\,450^{qm}$$

hiemit nach (5):

$$\varepsilon = 14{,}849\,701'' + 0{,}000\,353'' = 14{,}850\,054 \tag{11}$$

dann nach (6):

$$F = 2\,932\,356\,450^{qm} + 69\,693^{qm} = 2\,932\,426\,143^{qm}$$

und damit ε nach (7):

$$\varepsilon = 14{,}850\,054'' \quad \text{(stimmt mit (11))}$$

Die Gruppe (4) und (5) giebt:

$$\left.\begin{array}{rcl} A - A^* = & 4{,}949\,900'' - 0{,}000\,148'' + 0{,}000\,136'' = & 4{,}949\,888'' \\ B - B^* = & 4{,}949\,900'' + 0{,}000\,028'' + 0{,}000\,096'' = & 4{,}950\,024'' \\ C - C^* = & 4{,}949\,900'' + 0{,}000\,120'' + 0{,}000\,121'' = & 4{,}950\,141'' \\ \hline \varepsilon = & 14{,}849\,700'' + 0 \qquad\quad + 0{,}000\,353'' = & 14{,}850\,053'' \end{array}\right\} \tag{12}$$

Ferner giebt die Gruppe (9):

$$\left.\begin{array}{rcl} A - A^* = & 4{,}950\,018'' + 0{,}000\,148'' + 0{,}000\,018'' = & 4{,}950\,184'' \\ B - B^* = & 4{,}950\,018'' - 0{,}000\,028'' - 0{,}000\,021'' = & 4{,}949\,969'' \\ C - C^* = & 4{,}950\,018'' - 0{,}000\,120'' + 0{,}000\,003'' = & 4{,}949\,901'' \\ \hline \varepsilon = & 14{,}850\,054'' + 0 \qquad\quad + 0 \qquad\quad = & 14{,}850\,054'' \end{array}\right\} \tag{13}$$

Wenn man diese Winkel (12) und (13) mit den früheren sphärischen Angaben auf S. 256 oben vergleicht, so findet man nur Differenzen von etwa 0,0001'', woraus zu ersehen ist, dass in diesem Falle eines sehr grossen Dreiecks die Berechnung nach den sphäroidischen Formeln keine merkbare Abweichung von der sphärischen Rechnung bringt.

Die Zahlenwerte, welche wir hier in (12) und (13) berechnet haben, stimmen nicht überein mit den Werten, welche *Gauss* selbst in Art. 28. der „Disquisitiones generales etc." gegeben hat, die *Gauss*schen Angaben sind nämlich:

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{Inselsberg} & A - A^* = & 4{,}95181'' \\ \text{Hohehagen} & B - B^* = & 4{,}95113'' \\ \text{Brocken} & C - C^* = & 4{,}95104'' \\ \hline & \varepsilon = & 14{,}85348'' \end{array}\right\} \tag{14}$$

Diese Werte (14) haben unter sich sehr nahe dieselben *Differenzen* wie unsere Werte (12) und (13), die Werte (14) selbst sind aber erheblich kleiner als unsere (12) und (13).

Es rührt das jedenfalls davon her, dass *Gauss* im Jahre 1827 andere Erddimensionen seiner Rechnung zu Grunde legte, als die erst von 1841 herrührenden *Bessel*schen Erddimensionen, welche unseren Berechnungen zu Grunde liegen. Man kann aus (14) rückwärts berechnen, dass der dabei von *Gauss* angenommene mittlere Erdhalbmesser sein muss:

$$\log r = 6.804\,9120 \tag{14 a}$$

Um diese Annahme zu erklären, machten wir einen Versuch mit denjenigen zwei Erddimensions-Bestimmungen, welche *Gauss* in der „Bestimmung des Breiten-Unterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona, Göttingen 1828", S. 72 und S. 82 erwähnt hat, nämlich die *Walbeck*schen und *Schmidt*schen Erddimensionen, die wir auch in unserer Einleitung S. 8 zitiert haben. Dieselben geben:

$$\textit{Walbeck:} \quad \log c = 6.806\,0460 \qquad \log e'^2 = 7.822\,087$$

$$\textit{Schmidt:} \quad \log c = 6.806\,0824 \qquad \log e'^2 = 7.828\,433$$

und damit den mittleren Krümmungshalbmesser für die Breite $\varphi = 51°\ 32'\ 34''$:

$$\textit{Walbeck:} \quad \log r = 6.804\,9241 \tag{14 b}$$

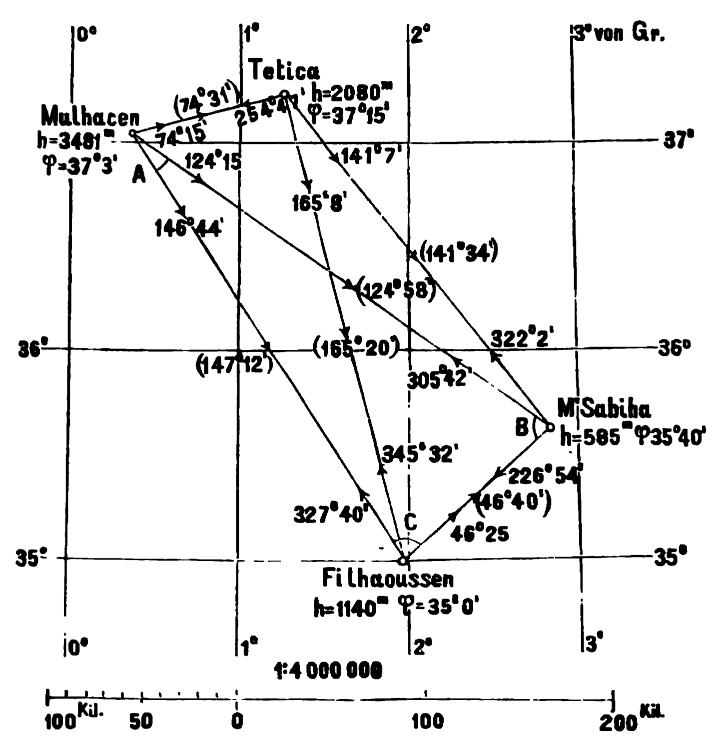
$$\textit{Schmidt:} \quad \log r = 6.804\,9440 \tag{14 c}$$

Diese beiden stimmen nicht genügend mit (14 a), es ist also zweifelhaft, welche Erddimensionen *Gauss* bei dem Zahlen-Beispiel von Art. 28. der „Disquisitiones generales" zu Grunde gelegt hat. Indessen besteht auch kein wissenschaftliches Interesse, dieses herauszubringen.

Die im Vorstehenden berechneten Winkel-Reduktionen sind unabhängig von den Reduktionen zwischen den geodätischen Linien und den vertikalen Schnitten, welche durch die früheren Formeln (30) und (31) S. 380 bestimmt sind. Jene Reduktionen müssen *vorher* schon angebracht sein, ehe die geodätische Theorie von § 97. — § 99. zur Anwendung kommt.

Wir wollen dieses an einem zweiten grösseren Beispiele zeigen, welches in Fig. 1. dargestellt ist.

Fig. 1. (vgl. Fig. 4. S. 25).
Trigonometrische Verbindung zwischen Spanien und Algier.



Hiezu nehmen wir eines der grossen Dreiecke, welche im Jahre 1879 von *Ibanez* und *Perrier* zur trigonometrischen Verbindung zwischen Spanien und Algier angelegt worden sind, wie wir schon früher auf S. 24—25 im allgemeinen berichtet haben.

Diese grossen Dreiecke eignen sich sehr gut als Zahlen-Beispiele zur Anwendung der geodätischen Formeln mit sphäroidischen Gliedern, und in diesem Sinne ist auch schon eine Berechnung nach *Helmerts* Formeln mitgeteilt worden von *Fenner* in der „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 303—308. Im übrigen haben wir die Quellenschriften: „Enlace geodésico y astronómica de Europa y Africa. Madrid 1880" und in dem „Generalbericht d. europ. Gradm. für 1880", S. 44—57: „Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne", und in endgültiger Berechnung in dem Werke: „Memorias del instituto geografico y estadistico. Tomo VII. Madrid 1888", S. 97—111.

Nach diesen Schriften und einigen Nebenberechnungen haben wir die zur Berechnung nötigen Hauptwerte der Breiten und der Azimute in Fig. 1. zusammengestellt, welche nun in Verbindung mit Fig. 1. S. 25 alles wesentliche giebt.

Wir wollen hier nur *eines* der vier Verbindungs-Dreiecke durchrechnen, nämlich das grösste: Mulhacen, M'Sabiha, Filhaoussen.

Die gemessenen Winkel sind folgende (Memorias etc. S. 100):

Mulhacen	$A =$	22° 28′ 45,269″
M'Sabiha	$B =$	78° 48′ 45,563″
Filhaoussen	$C =$	78° 43′ 39,198″
Summe	$=$	180° 0′ 70,030″

(15)

Wir wollen jedoch für unsere Zwecke diese 3 Winkel lieber in Gestalt von 6 *Richtungen* darstellen, und zwar so, dass die Richtungen nahezu gleich den Azimuten der betreffenden Seiten werden:

Mulhacen	M'Sabiha	Filhaoussen
$(AB) =$ 124° 15′ 0,000″	$(BC) =$ 226° 53′ 0,000″	$(CA) =$ 327° 40′ 0,000″
$(AC) =$ 146° 43′ 45,269″	$(BA) =$ 305° 41′ 45,563″	$(CB) =$ 46° 28′ 39,198″
$A =$ 22° 28′ 45,269″	$B =$ 78° 48′ 45,563″	$C =$ 78° 43′ 39,198″

(16)

Die Differenzen A, B, C sind wieder dieselben wie bei (15). Dass (AB) und (BA) u. s. w. nicht nahezu um 180° verschieden sind, obgleich die Richtungen selbst auf etwa 1′ genau Azimute sind, rührt von den Meridian-Konvergenzen her; die Mittelwerte zweier solcher Gegenrichtungen sind als *Mittel*-Azimute genähert in Fig. 1. eingeschrieben, z. B. (147° 12′) als Mittel aus 146° 44′ und 327° 40′ $\pm$ 180°.

Nun müssen die gemessenen Richtungen (16) zunächst in zweifacher Weise wegen der Abplattung der Erde reduziert werden.

Erstens erfolgt die Reduktion wegen der *Höhe* der Zielpunkte über dem Meere; es ist nach der Formel für γ in § 70. S. 363 die Reduktion für einen Zielpunkt der in der Höhe h über dem Meere, im Azimut α angezielt wird, in Sekunden:

$$\gamma = \eta^2 \frac{h}{N} \varrho \sin \alpha \cos \alpha \tag{17}$$

Zweitens ist Reduktion erforderlich von den vertikalen Schnitten, in welchen die Richtungen (16) gemessen sind, auf die geodätischen Linien; hiefür haben wir nach (30) und (31) S. 380 nebst Fig. 2. S. 378, die Reduktion in genügender Näherung:

$$\nu = -\frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon = -\frac{1}{6} \eta^2 \frac{s^2}{N^2} \varrho \sin \alpha \cos \alpha \tag{18}$$

Der in (17) und (18) vorkommende Faktor η^2 hat wie gewöhnlich die Bedeutung $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$. Da die Breiten φ der drei Eckpunkte in Fig. 1. angegeben sind, hat man damit auch die *Mittel*breiten für die drei Seiten, und hiezu lassen sich die drei Werte $\log \eta^2$ berechnen, sowie die nötigen $\log N$ aus der Tafel Seite [10] entnehmen:

M'Sabiha	35° 40′	Mulhacen	37° 3′	Mulhacen	37° 3′
Filhaoussen	35° 0′	Filhaoussen	35° 0′	M'Sabiha	35° 40′
Mittelbreite $\varphi =$	35° 20′		36° 2′		36° 22′
$\log \eta^2$	7.65049		7.64286		7.63917
$\log N$	6.80513		6.80514		6.80515

(19)

Da im übrigen zu der Rechnung nach den Formeln (17) und (18) nichts weiter zu bemerken ist, indem die nötigen Elemente teils in (19) gegeben, teils in Fig. 1. eingeschrieben sind, so teilen wir sofort die Ergebnisse dieser Rechnungen mit:

	Mulhacen		M'Sabiha		Filhaoussen		
Richtung	(AB)	(AC)	(BC)	(BA)	(CA)	(CB)	
γ	$-0{,}039''$,	$-0{,}074''$	$+0{,}082''$,	$-0{,}230''$	$-0{,}225''$,	$+0{,}042''$	
ν	$+0{,}126''$,	$+0{,}123''$	$-0{,}021''$,	$+0{,}126''$	$+0{,}123''$,	$-0{,}021''$	
$\gamma+\nu$	$+0{,}087''$,	$+0{,}049''$	$+0{,}061''$,	$-0{,}104''$	$-0{,}102''$,	$+0{,}021''$	(20)
	$-0{,}038''$		$-0{,}165''$		$+0{,}123''$		

Indem wir diese Reduktionen (20) den gemessenen Richtungen (16) hinzufügen, erhalten wir folgende neue Tabelle der Richtungen, die wir zur Unterscheidung von (AB) u. s. w. nun mit $[AB]$ u. s. w. bezeichnen wollen:

Mulhacen	M'Sabiha	Filhaoussen	
$[AB] = 124°\ 15'\ 0{,}087''$	$[BC] = 226°\ 53'\ 0{,}061''$	$[CA] = 327°\ 39'\ 59{,}898''$	
$[AC] = 146°\ 43'\ 45{,}318''$	$[BA] = 305°\ 41'\ 45{,}459''$	$[CB] = 46°\ 23'\ 39{,}219''$	
$A' = 22°\ 28'\ 45{,}231''$	$B' = 78°\ 48'\ 45{,}398''$	$C' = 78°\ 43'\ 39{,}321''$	(21)

Um nun das Dreieck, welchem diese Winkel angehören, auf ein *ebenes* Dreieck mit gleich langen Seiten zu reduzieren, oder um die früher mit A^*, B^*, C^* bezeichneten Winkel zu finden, hat man wieder die hiefür gültigen Formeln anzuwenden, welche wir am Anfang dieses § 101. unter (1)—(9) S. 489—490 zusammengestellt haben.

Die hiezu nötigen Krümmungsmasse k, bzw. die entsprechenden $\log k\varrho$ sind:

A, Mulhacen	$\varphi = 37°\ 3'$	$\log k\varrho = \log \frac{\varrho}{r^2} = 1.705\,9395$
B, M'Sabiha	.. $35°\ 40'$	.. .. $1.706\,0782$
C, Filhaoussen	.. $35°\ 1'$	.. .. $1.706\,1356$

Was die Rechnung im übrigen betrifft, so haben wir die Seite $AC = b = 269\,926^m$ zu Grunde gelegt, die Winkel A, B, C zunächst vorläufig auf $180°$ ausgeglichen und damit erste Näherungen von A^*, B^*, C^* erhalten, woraus weiter folgte: $BC = a = 105\,178{,}9^m$ und $AB = c = 269\,845{,}7^m$. Damit konnte weiter gerechnet werden $\log \wedge = 10.143\,6726$ und $s = 70{,}7607''$ und endlich:

$$A' - A^* = 23{,}5866'' \qquad B' - B^* = 23{,}5866'' \qquad C - C^* = 23{,}5875'' \qquad (22)$$

Zieht man diese (22) von den A', B', C' in (21) ab, so erhält man:

$$A^* = 22°\ 28'\ 21{,}644''$$
$$B^* = 78°\ 48'\ 21{,}811''$$
$$C^* = 78°\ 43'\ 15{,}733''$$
$$\text{Summe} = 179°\ 59'\ 59{,}188''$$
$$w = -0{,}812'' \qquad (23)$$

Dieser nun noch bleibende Widerspruch $w = -0{,}812''$ ist den Beobachtungs-Fehlern zuzuschreiben. Die geodätische Winkel-Reduktion an sich ist damit vollendet.

Wenn man die praktische Frage aufwirft, ob die kleinen Reduktionen, mit denen wir uns hier beschäftigt haben, bei Triangulierungen in Rechnung zu bringen

sind, so wird man beim heutigen Stande der Beobachtungskunst diese Frage für die gewöhnlichen kleinen Dreiecke und geringen Höhen wohl vereinen, dagegen bei solch grossen Verhältnissen wie diejenigen der Triangulierung zwischen Spanien und Algier sind kleine Grössen wie die unter (20) erhaltenen neben einem nur etwa 8 mal grösseren Messungs-Fehler w nach gewöhnlicher Anschauung nicht zu vernachlässigen.

Dieses betrifft diejenigen Reduktionen, deren Theorie in den früheren § 70. und § 75. behandelt worden ist. Die kleinen Grössen, welche durch die Theorie dieses Kapitels X. § 97. — § 99. gewonnen wurden, sind noch erheblich kleiner, z. B. in dem behandelten spanisch-algierischen Dreieck mit Excess von 70″ betragen die Fehler in den drei Winkeln A^*, B^*, C^*, wenn man nach dem *ganz einfachen Legendre*schen Satze von § 41. rechnet, allerdings bzw. — 0,0035″, — 0,0035″, — 0,0044″, zusammen — 0,0114″, allein schon der erweiterte *sphärische Legendre*sche Satz von § 44. S. 255 vermag diese Fehler fast ganz zu tilgen, und der praktische Gewinn unseres ganzen Kapitel X. beschränkt sich also sogar bei der grossen spanisch-algierischen Triangulierung auf Glieder von höchstens 0,001″ Betrag.

Wenn hiernach die Theorie der *Gauss*schen „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ sich hier nur als schöne Theorie zeigt, welche man in der Praxis kaum unmittelbar braucht, so ist die Theorie damit doch auch praktisch nicht überflüssig, denn ohne diese Theorie wüsste man eben *nicht*, dass die zweifellos vorhandenen Einflüsse der Abplattung der Erde in diesem Falle so wenig ausmachen, und die höheren *sphärischen* Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ in § 44. S. 254—256 würden ohne die Kenntnis der sphäroidischen Glieder wertlos sein.

Nachdem also hiemit gezeigt ist, wie man ein einzelnes grosses Dreieck sphäroidisch berechnen kann, ist auch die entsprechende Berechnung eines Zusammenhangs von grossen Dreiecken, also eines Dreiecksnetzes klar gemacht. Damit ist auch die Berechnung langer geodätischer Linien als Diagonalen von Dreiecksketten erklärt, und wir haben zu Fig. 3. S. 384 und dem Citat *Hansen* S. 385 nur zu bemerken, dass die langgestreckten Dreiecke mit den Seiten s_1, s_2, s in Fig. 3. S. 384 nun nach den Formeln (4), (5) oder (9) S. 489—490 berechnet werden können, wobei allerdings die höheren Glieder mehr Einfluss erlangen können als bei der Berechnung *einzelner* gemessener Dreiecke.

Wirkung der Refraktion. Infolge der Abplattung der Erde und der Niveauschichten der Atmosphäre findet eine Ablenkung eines Lichtstrahles durch Refraktion nicht bloss in vertikalem Sinne, sondern auch in horizontalem Sinne statt. Je zwei aufeinander folgende Elemente eines Lichtstrahls liegen in einer Ebene, welche die Lotlinie der Trennungsfläche zwischen zwei verschieden dichten und verschieden brechenden Schichten der Atmosphäre enthält. Da die Trennungsfläche zweier solcher Schichten rechtwinklig zur Lotrichtung sein muss, finden wir für den Lauf einer Lichtkurve durch die Atmosphäre ein ähnliches Gesetz wie für die geodätische Linie (vgl. Fig. 2. S. 368), dass nämlich die Schmiegungs-Ebene der Lichtkurve überall Normalebene der lichtbrechenden Fläche sei oder die Lotlinie dieser Fläche enthalten muss.

Auf Grund dieses Gesetzes sind Untersuchungen über die azimutale Ablenkung des Lichtstrahles angestellt werden von *Andrae, Sonderhof* und *Helmert* (s. *Helmert*, höhere Geodäsie II. S. 565), in ähnlicher Weise, wie für den Lauf der geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid zwischen den beiden Normalschnitten (vgl. Fig. 2. S. 378). Da die Lichtkurve in ihrer Hauptkrümmung viel *flacher* ist als die geodätische Linie auf der Erde, so wird auch der Querabstand zwischen den Normalschnitten (q in Fig. 7. S. 359 oder $2v$ in Fig. 2. S. 378) in demselben Verhältnisse kleiner, und ebenso auch die kleinen Winkel ν und ν' (Fig. 2. S. 378) beider Lichtkurven kleiner als für die geodätische Linie auf der Erde. Das Krümmungsverhältnis zwischen der Lichtlinie und einer Erdlinie ist der sogenannte Refraktions-Coëfficient, im Mittel etwa $k = 0{,}13$ (vgl. Band II. S. 429), und hiernach verhält sich die azimutale Ablenkung des Lichtstrahls zu der entsprechenden geodätischen Reduktion $\alpha_1 - \alpha = \nu$ (nach (33) S. 380) wie 0,13 zu 1. Da nun diese geodätische Reduktion $\alpha_1 - \alpha = \nu$ selbst sehr gering ist (vgl. die Zahlenwerte (20) S. 494), so ist nach den zitierten Untersuchungen von *Andrae, Sonderhof* und *Helmert*, die Lichtablenkung $k\nu$ zu vernachlässigen.

Hiebei wollen wir auch als Nachtrag zu § 70. S. 363—364 noch bemerken, dass die erste uns bekannte veröffentlichte Entwicklung der sphäroidischen Reduktion für die Höhe des Zielpunktes in *Bohnenberger*s Abhandlung „De computandis dimensionibus etc.", § 9. (vgl. die Anmerkung S. 347) zu finden ist, so wie von uns in § 70. dargestellt wurde.

Rechtwinklige geodätische Coordinaten mit geodätischen Linien.

Nachdem wir an zwei Zahlen-Beispielen gezeigt haben, wie die allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke zur Berechnung einzelner *Dreiecke* und damit zur Berechnung von *Dreiecks*-Netze gebraucht werden kann, wollen wir auch noch die Anwendung dieser Theorie zur Berechnung weit ausgedehnter rechtwinkliger geodätischer *Coordinaten* zeigen.

Es handelt sich um die Verallgemeinerung und Erweiterung des Prinzips der rechtwinkligen *Soldner*schen Coordinaten von § 46. Wir haben jene nur *sphärisch* entwickelten Formeln schlechthin mit einem *mittleren* Krümmungshalbmesser auf das Ellipsoid angewendet, nur mit der auf S. 233 angedeuteten Begründung, dass die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ ihrer Kleinheit wegen sphärisch berechnet werden dürfen.

Das Bedürfnis einer gründlicheren Theorie der rechtwinkligen Coordinaten ist bei der Preussischen Landesaufnahme durch die Polygonschluss-Bedingungen hervorgerufen worden, wie wir bereits nach einer Mitteilung von Major *Haupt*, auf S. 135 berichtet haben. Auf Grund der Dreiecks-Formeln der *Gauss*schen „Disquisitiones generales" ist die Theorie der rechtwinkligen Coordinaten mit geodätischen Linien von General *Schreiber* entwickelt werden, die wir, nach erhaltenen Angaben des Urhebers, zur Darstellung gebracht haben in dem Werke „Deutsches Vermessungswesen von *Jordan-Steppes*, 1882, I." S. 109—113.

Hierauf verweisend, wollen wir über die Gebrauchsformeln (a. a. O. (50) S. 112) berichten, dass dieselben in erster Näherung in die bekannten *Soldner*schen Formeln übergehen, so dass sie auch dazu benützt werden können, die Fehler zu bestimmen, welche in den *Soldner*schen Formeln bei gewissen Erstreckungen übrig bleiben. Das Ergebnis ist sehr tröstlich, indem die einfachen *Soldner*schen Formeln auf mehrere hundert Quadratmeilen angewendet werden dürfen, ohne Fehler von dem Range 0,01" in den Azimuten zu erzeugen.

Wenn also auch hier wieder der Gewinn der feinen Theorien ein teilweise nur mittelbarer und negativ wirkender ist, indem sich herausstellt, dass man zu vielen Zwecken die feinere Theorie nicht braucht, so ist hiezu, wie als Schlusssatz zu unserem ganzen gegenwärtigen Kapitel X. zu sagen: Wenn man die feinere Theorie nicht hätte, so würde man die Grenzen der Anwendbarkeit gröberer Theorien auch *nicht* wissen, und nur die über die nächsten praktischen Zwecke hinausgehenden Theorien, deren Grundlage bis heute noch die *Gauss*schen „Disquisitiones generales circa superficies curvas" sind, haben ein sicheres Urteil über die Brauchbarkeit und das nötige Vertrauen zur Anwendung der gröberen sphärischen geodätischen Formeln geschaffen.

Kapitel XI.

Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

§ 102. Bestimmung der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen.

Das älteste Mittel zur Bestimmung der Erddimensionen sind die sogenannten Breiten-Gradmessungen, deren Geschichte wir in der Einleitung S. 1—9 mitgeteilt haben.

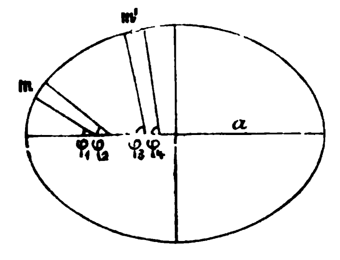
Unter einer Breiten-Gradmessung versteht man die Messung eines Meridianbogens der Erde, und der Polhöhen oder geographischen Breiten seiner Endpunkte.

Wenn man die Messungs-Ergebnisse *zweier* solcher Gradmessungen unter verschiedenen Breiten kennt, so kann man die Dimensionen der dadurch bestimmten Meridian-Ellipse berechnen.

Ehe wir uns damit beschäftigen, ist eine Bemerkung über die Messung der Meridianbögen zu machen. Geradezu auf einem Meridian der Erde eine Linie unmittelbar zu messen, das war das Bestreben der ersten Gradmesser (vgl. z. B. S. 3, arabische Gradmessung und S. 6, amerikanische Gradmessung), und wenn der gemessene Bogen einen kleinen Winkel α mit der Meridianrichtung bildete, so konnte man leicht eine Reduktion auf den Meridian ausführen, welche im wesentlichen in der Multiplikation des gemessenen Bogens mit $\cos \alpha$ besteht. Auch Triangulierungsketten, welche nach ihrer Haupterstreckung nahe der Meridianrichtung liegen, lassen sich auf den Meridian reduzieren, wie wir ausführlicher im nächsten § 103. zeigen werden.

Nach Andeutung von Fig. 1. nehmen wir nun an, man habe zwei Gradmessungen in demselben Meridian, oder, was hier dasselbe ist, zwei Gradmessungen, deren Elemente in einer Meridian-Ellipse dargestellt sind. Die erste Gradmessung habe den Meridianbogen m mit den Breiten φ_1 und φ_2 seiner Endpunkte, und die zweite Gradmessung entsprechend den Meridianbogen m' mit den Breiten φ_3 und φ_4. Zur Abkürzung wollen wir hiezu schreiben:

Fig. 1.
Zwei Breiten-Gradmessungen.



$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \qquad \varphi_4 - \varphi_3 = \Delta\varphi' \tag{1}$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \qquad \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2} = \varphi' \tag{2}$$

Nun wissen wir von § 35. S. 218 und S. 228, dass man die Länge m eines mässig grossen Meridianbogens als Kreisbogen berechnen kann, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungshalbmesser M für die Mittelbreite φ, und dessen Centriwinkel die Breiten-Differenz $\Delta\varphi$ ist; d. h. man hat für die beiden Gradmessungen:

$$m = \frac{\Delta\varphi}{\varrho} M \qquad m' = \frac{\Delta\varphi'}{\varrho} M' \tag{3}$$

Dabei ist nach (21) und (19) S. 210:

$$M = \frac{c}{V^3} \qquad M' = \frac{c}{V'^3} \tag{4}$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi \qquad V'^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi' \tag{5}$$

Wenn man diese (5) und (4) in (3) einsetzt, und dann die beiden Gleichungen (3) dividiert, so erhält man:

$$\left(\frac{m}{m'}\frac{\Delta\varphi'}{\Delta\varphi}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1+e'^2\cos^2\varphi'}{1+e'^2\cos^2\varphi} \qquad (6)$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\left(\frac{m}{m'}\frac{\Delta\varphi'}{\Delta\varphi}\right)^{\frac{2}{3}} = q^2 \qquad (6a)$$

Die Gleichung (6) ist in Bezug auf e'^2 linear, und kann daher geradezu nach e'^2 aufgelöst werden. Wenn man dabei die Abkürzung (6a) benützt, so erhält man:

$$e'^2 = \frac{1-q^2}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} \qquad (7)$$

Hat man hieraus e'^2 berechnet, so erhält man mit Probe aus (3), (4) und (5):

$$c = \frac{m}{\Delta\varphi}\varrho V^3 \quad \text{oder} \quad c = \frac{m'}{\Delta\varphi'}\varrho V'^3 \qquad (8)$$

Die beiden Ellipsen-Halbaxen a und b erhält man aus c und e'^2 nach (7) und (10) S. 206:

$$a = \frac{c}{\sqrt{1+e'^2}} \qquad b = \frac{c}{1+e'^2} \qquad (9)$$

woraus man nochmals zur Probe bilden kann:

$$\frac{a^2-b^2}{b^2} = e'^2$$

Damit hat man auch e^2 und die Abplattung α:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2} \quad , \quad \alpha = 1-\sqrt{1-e^2} \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} \qquad (10)$$

Auch die Länge des Meridian-Quadranten Q kann nach (19) S. 219 berechnet werden:

$$Q = a\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right) \qquad (11)$$

Zur Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir die bekannten klassischen Gradmessungen von Peru und Lappland benützen.

Nach *Bessels* Angabe im 14. Band, 1837, der „Astr. Nachr." S. 334 und S. 337 sind die Ergebnisse der Gradmessungen in Peru und Lappland (Schweden) die folgenden:

Gradmessung in Peru:

$$\left.\begin{array}{ll} m = 176\,875{,}5 \text{ Toisen} = 344\,736{,}772 \text{ Meter} & \\ \varphi_1 = -3^\circ\ 4'\ 32{,}068'' & \varphi_2 = +0^\circ\ 2'\ 31{,}387'' \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Gradmessung in Lappland:

$$\left.\begin{array}{ll} m' = 92\,777{,}981 \text{ Toisen} = 180\,827{,}654 \text{ Meter} & \\ \varphi_3 = 65^\circ\ 31'\ 30{,}265 & \varphi_4 = 67^\circ\ 8'\ 49{,}830'' \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Man bildet hieraus die Differenzen und die Mittel:

$$\begin{array}{ll} \Delta\varphi = 3^\circ\ 7'\ 3{,}455'' & \Delta\varphi' = 1^\circ\ 37'\ 19{,}565'' \\ \quad = 11\,223{,}455'' & \quad = 5839{,}565'' \\ \varphi = -1^\circ\ 31'\ 30{,}3405'' & \varphi' = 66^\circ\ 20'\ 10{,}0475'' \end{array}$$

Nun rechnet man nach den angegebenen Formeln:

$$log \frac{m}{\Delta \varphi} = 1.487\,3610{\cdot}4 \qquad log \frac{m'}{\Delta \varphi'} = 1.490\,8843{\cdot}5$$

$$log\, q^2 = 9.997\,6511{\cdot}3$$

$$e'^2 = \frac{1 - 0{,}994\,606{\cdot}119}{0{,}993\,901\,593 - 0{,}161\,096\,660} = 0{,}006\,476\,764$$

$$log\, V^2 = 0.002\,8017{\cdot}7 \qquad log\, V'^2 = 0.000\,4529{\cdot}0$$

$$log\, c = 6.805\,9888{\cdot}4$$

$$log\, a = 6.804\,5869{\cdot}6 \qquad log\, b = 6.803\,1850{\cdot}8$$

$$\alpha = 1 : 310{,}29534 \qquad Q = 10\,000\,157 \text{ Meter} \tag{14}$$

Wenn man statt e'^2 zuerst e^2 haben will, so kann man dieses aus (7) ableiten, denn es ist nach (6) S. 206:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \tag{15}$$

Dieses auf (7) angewendet giebt:

$$e^2 = \frac{1 - q^2}{sin^2\, \varphi' - q^2\, sin^2\, \varphi} \tag{16}$$

Auf dieselbe Formel wird man auch unmittelbar dadurch geführt, dass man statt (4) und (5), nach (16) S. 209 und (19) S. 210 schreibt:

$$M = \frac{a\,(1 - e^2)}{W^3} \qquad M' = \frac{a\,(1 - e^2)}{W'^3} \tag{17}$$

$$W^2 = 1 - e^2\, sin^2\, \varphi \qquad W'^2 = 1 - e^2\, sin^2\, \varphi' \tag{18}$$

Wenn man dieses ebenso behandelt, wie früher (3) — (6), so wird man auf (16) geführt, worauf aus (17) auch a mit Probe folgt.

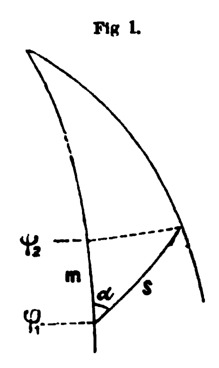
Die beiden Rechnungsformen (7) und (16) sind hier gleichberechtigt; wir ziehen aber im allgemeinen die Form mit e'^2 und c vor, weil dabei die Formel für den Meridian-Krümmungshalbmesser M nur e'^2 in V, nicht aber noch besonders enthält, wie bei e^2 in (17) der Fall ist.

Berechnungen von solcher Art spielten eine wichtige Rolle in der Zeit der Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts (vgl. Einleitung S. 7); heute ist dieses nicht mehr der Fall, indem die Frage nach den Erddimensionen jetzt in anderer Form auftritt.

§ 103. Reduktion eines Gradmessungs-Bogens auf den Meridian.

Wir haben die am Eingange des vorigen § 102. berührte Aufgabe nun nachzuholen, nämlich Berechnung des Meridianbogens m, welcher einem *schief* gegen den Meridian gelegten Gradmessungs-Bogen s zwischen den Breiten der Endpunkte entspricht. Oder im Anschluss an Fig. 1. haben wir die Aufgabe, den Meridianbogen m zu berechnen, welcher zwischen denselben Breiten φ_1 und φ_2 liegt, wie ein schief gelegter Bogen $AB = s$, dessen Richtung wenigstens durch *ein* Azimut α bestimmt ist.

Der Bogen s kann unmittelbar gemessen sein, im allgemeinen ist aber anzunehmen, dass dieser Bogen s als lange Diagonale einer Triangulierungskette nach Art von AB in Fig. 2. S. 383 oder Fig. 3. S. 384 berechnet sei, und dass auf diesem



Wege auch das Azimut α, dessen astronomische Messung nicht geradezu auf die Sicht der Linie s gemacht werden konnte, durch Rechnung auf s bezogen wurde.

Je nachdem diese Berechnung weniger oder mehr fein (vgl. S. 385) ausgeführt ist, kann man das Ergebnis s mit einem Azimut α (oder mit zwei Azimuten α_1, α_2, nach Fig. 3. S. 503) als *geodätische Linie* mit geodätischen Azimuten betrachten, und als solche weiter behandeln.

Wir betrachten nun zuerst nach Fig. 1. den einfachen Fall, dass nur *ein* Azimut α gemessen sei; wir wollen dann aber als Erleichterung andererseits annehmen, dass dieses α ziemlich *klein* sei, d. h. dass der Gradmessungs Bogen s nahezu die Meridianrichtung habe, was ja bei reinen Breitengrad-Messungen von vornherein angestrebt wird.

Zwischen $\varphi_2 - \varphi_1$, s und α besteht eine Beziehung, welche in erster Näherung durch die zwei ersten Glieder von (25*) S. 390 ausgedrückt wird, nämlich:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = V^2 \left(m - \frac{n^2}{2} t\right) \tag{1}$$

Dabei ist:

$$V^2 = \frac{N}{M} \quad , \quad m = \frac{s}{N} \cos \alpha \quad , \quad n = \frac{s}{N} \sin \alpha \quad , \quad t = tang\, \varphi_1$$

also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{s}{M} \cos \alpha - \frac{s^2}{2\,MN} \sin^2 \alpha \; tang\, \varphi_1$$

Dieselbe Gleichung auf den Meridianbogen m angewendet, giebt mit $\alpha = 0$:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}$$

Dieses mit der vorhergehenden Gleichung verbunden giebt:

$$m = s \cos \alpha - \frac{s^2}{2\,N} \sin^2 \alpha \; tang\, \varphi_1 + \ldots \tag{2}$$

Für den Quer-Krümmungshalbmesser N, der hier im Nenner des zweiten Gliedes vorkommt, kann man einen abgerundeten Näherungswert nehmen. Wenn das Azimut α ziemlich klein ist, so wird das zweite Glied mit $\sin^2 \alpha$ sehr klein, und es ist dann ziemlich gleichgültig, wie der hiebei nötige Näherungswert N angenommen wird.

Man könnte die Formel (2) leicht auch noch auf höhere Glieder entwickeln, indem man bei (1) weitere Glieder von (25*) S. 390 berücksichtigte; wir wollen das aber hier nicht ausführen, sondern ein einfaches Zahlen-Beispiel vornehmen, bei welchem die Reduktionsformel (2) völlig ausreicht.

Als solches Beispiel soll die durch Einfachheit sich auszeichnende pennsylvanische Gradmessung dienen, welche im vorigen Jahrhundert, 1764—1768, von *Mason* und *Dixon* nicht durch Triangulierung, sondern durch unmittelbare Lattenmessung ausgeführt wurde, wie wir schon in der Einleitung S. 6. angegeben haben.

Die Haupt-Zahlenangaben über diese merkwürdige Messung wurden vor kurzem von Prof. *J. Howard* in Washington in der „Zeitschr. f. Verm., 1888“, S. 33—39 mitgeteilt, woraus wir folgendes entnehmen:

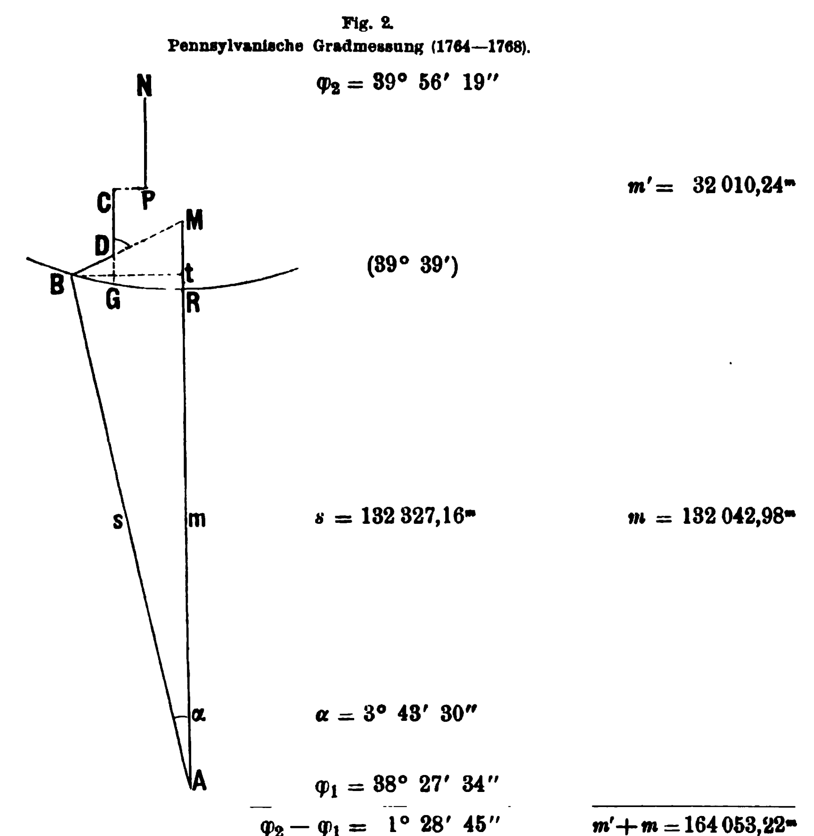


Fig. 2.
Pennsylvanische Gradmessung (1764—1768).

Die Hauptmessung erfolgte in der Geraden AB, welche von dem südlichsten Punkte A mit der astronomisch gemessenen Breite $\varphi_1 = 38° 27' 34''$ unter dem Azimut $\alpha = 3° 43' 30''$ sich bis zu einem Punkte B erstreckt, dessen Breite nicht astronomisch gemessen ist (39° 39′ durch nachträgliche Interpolation). Dann wurde noch ein gebrochener Zug $BDCPN$ hinzugemessen bis zu dem nördlichsten Punkte N, dessen astronomisch gemessene Breite $\varphi_2 = 39° 56' 19''$ ist.

Als gemessene Längen sind angegeben: erstens die schiefe Hauptlänge $s = 434\,011{,}64$ Fuss und die Summe der zwei unmittelbaren Meridianbögen $GC + PN = 104\,988{,}4$ Fuss. (In Fig. 2. soll BGR den Parallelkreis von B, und CP ein kleines Stück des Parallels von C vorstellen.)

Dazu wird angegeben, dass der hier benützte englische Fuss $= \frac{107}{144}$ Pariser Fuss sei, woraus man berechnet 1 Fuss $= 0{,}304\,893\,06$ Meter.*)

*) Der heutige englische Fuss ist $= 0{,}304\,797\,27^m$, also erheblich anders als jene Annahme der pennsylvanischen Gradmessung. Die in unserer Einleitung S. 6 angegebene Reduktion 434 011,64 Fuss = 132 286 Meter beruht auf dem *neuen* Verhältnis 1 Fuss = $0{,}304\,79727^m$.

Mit dieser Verhältniszahl rechnen wir die beiden mitgeteilten Entfernungen in Meter um:

$$m' = 104\,988{,}4 \text{ Fuss} = 32\,010{,}24^{m} \tag{3}$$

$$s = 434\,011{,}64 \text{ Fuss} = 132\,327{,}16^{m} \tag{4}$$

(Diese Masse sind auch bei Fig. 2. beigeschrieben.)

Nun kommt die Hauptaufgabe, welche uns hier beschäftigt, nämlich die schiefe Länge s auf die Meridianlänge zu reduzieren, wozu die Formel (2) dient. Dabei ist einzusetzen $s = 132\,327{,}16^{m}$, $\alpha = 3^\circ\ 43'\ 30''$, $\varphi_1 = 38^\circ\ 27'\ 34''$ und nach Seite [10] genähert $\log N = 6.80521$. Die Ausrechnung giebt:

$$m = 132\,047{,}60^{m} - 4{,}62^{m} = 132\,042{,}98^{m} \tag{5}$$

Die beiden Teile dieser Rechnung sind in Fig. 2. geometrisch veranschaulicht, es ist nämlich:

$$A\,t = s \cos \alpha = 132\,047{,}60^{m} \quad \text{und} \quad t\,R = 4{,}62^{m}$$

also:

$$m = A\,R = A\,t - t\,R$$

Nun hat man den gesamten Gradmessungs-Meridianbogen zwischen den Parallelen von A und N nach (3) und (5):

$$m' + m = 164\,053{,}22^{m} \tag{6}$$

Hiezu die beiden astronomisch gemessenen Breiten:

$$\begin{matrix} \varphi_2 = 39^\circ\ 56'\ 19'' \\ \varphi_1 = 38^\circ\ 27'\ 34'' \end{matrix} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 1^\circ\ 28'\ 45'' = 5325'' \tag{7}$$

$$\text{Mittel} \quad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi = 39^\circ\ 11'\ 56{,}5'' \tag{8}$$

Aus (6) und (8) erhält man den Meridiangrad für die Mittelbreite φ:

$$G = \frac{3600''}{5325''}\,164\,053{,}22^{m} = 110\,909{,}22^{m} \tag{9}$$

Wenn man mit *Bessel*schen Erddimensionen den Meridiangrad für die Mittelbreite $\varphi = 39^\circ\ 11'\ 56{,}5''$ ausrechnet (nach der Hilfstafel Seite [11], $\log [1] = 8.510\,9509 \cdot 4$), so findet man $G = 111\,007{,}3^{m}$, d. h. um 98^{m} oder etwa ein Tausentel mehr als das Ergebnis (9) der pennsylvanischen Gradmessung.

(Diese pennsylvanische Gradmessung wurde von *Laplace*, *Airy* und *Schubert* zur Berechnung der Erddimensionen mit benützt, aber nicht von *Bessel* und *Clarke*.)

Nachdem wir an diesem geschichtlich-interessanten Beispiel die Reduktion eines Gradmessungs-Bogens mit *einem* Azimut gründlich behandelt haben, gehen wir zu dem theoretisch interessanteren und wichtigeren Falle über, dass *zwei* Azimute gemessen sind, nämlich α_1 und α_2 in Fig. 3.

Hiezu haben wir von (21) S. 396 die Gleichung:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{s}{N} \cos \alpha \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24} (2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) + \frac{b^2}{8\,V^4}\,\eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2\,t^2)\right) \tag{10}$$

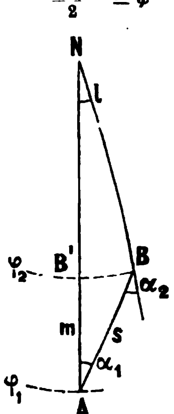
Dieselbe Formel gilt auch für den Meridianbogen m, wenn das mittlere Azimut $\alpha = 0$ und auch der Längenunterschied $l = 0$ gesetzt wird, also:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{m}{N} \left(1 + \quad \cdot\cdot \quad + \frac{b^2}{8\,V^4}\,\eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2\,t^2)\right) \tag{11}$$

(Gelegentlich bemerken wir hier, dass diese Formel (11) auch schon in der

Fig. 3.

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\alpha \qquad \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\varphi$$



früheren Formel (32) S. 222 enthalten ist, wie sich zeigt, wenn man dort den Gesamtnenner $8\,V^4$ herstellt und $\cos 2\varphi$ sowie $\sin 2\varphi$ in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrückt).

Nun giebt die Division von (10) und (11):

$$m = s\cos\alpha\left(1+\frac{l^2\cos^2\varphi}{24}\,(2+3\,t^2+2\,\eta^2)\right) \tag{12}$$

Diese Formel kann man unmittelbar anwenden, wenn man für den geographischen Längenunterschied l einen Näherungswert einsetzt und φ als *Mittel*breite annimmt (auch in $\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$).

Man kann jedoch auch in erster Näherung nach (16) S. 396 setzen:

$$l\cos\varphi = \frac{s}{N}\sin\alpha \tag{13}$$

Damit giebt (12):

$$m = s\cos\alpha\left(1+\frac{s^2\sin^2\alpha}{24\,N^2}\,(2+3\,t^2+2\,\eta^2)\right) \tag{14}$$

Für N^2 und η^2 genügen hier irgend welche leicht zu beschaffende Näherungswerte.

Die soeben entwickelte Formel (14) wird wohl in den meisten Fällen ausreichen, und man könnte sie auch wohl auf dem betretenen Wege noch um einen Grad weiter treiben; wir wollen dieses aber nicht thun, sondern lieber noch eine andere Form der Entwicklung behandeln, wobei *reduzierte* Breiten benützt werden und ein Faktor $\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$ unentwickelt gelassen wird. In dieser Weise hat *Bessel* die fragliche Aufgabe mehrfach behandelt.

Fig. 4. *Ellipsoid.*

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\alpha \qquad \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\varphi$$

Fig. 5. *Kugel.*

$$\psi_2-\psi_1=\mu \qquad \alpha_2-\alpha_1=\gamma$$

Wenn wir zu Fig. 4., welche unsere Aufgabe auf dem Ellipsoid veranschaulicht, auch die Übertragung auf die Kugel mit reduzierten Breiten nach § 81. vornehmen, so bekommen wir zu Fig. 4. noch die entsprechende Fig. 5., welche dieselben Azimute wie Fig. 4. und im übrigen sphärische Masse enthält, die wir nach § 83. behandeln wollen. Wir haben von dort (19) S. 417 die Beziehung zwischen s und σ:

$$\sigma = \frac{s}{N\sqrt{1-e^2}}\left\{1-\frac{\eta^2}{24}\left(\frac{b^2}{V^4}(1-t^2+\eta^2+6\,\eta^2\,t^2)+2\,l^2\sin^2\varphi\right)\right\} \tag{15}$$

Dieselbe Gleichung giebt auch eine Beziehung zwischen $\psi_2-\psi_1$ und m, nämlich mit $l=0$, wenn zugleich $\psi_2-\psi_1=\mu$ gesetzt wird:

$$\psi_2-\psi_1=\mu=\frac{m}{N\sqrt{1-e^2}}\left\{1-\frac{\eta^2}{24}\left(\frac{b^2}{V^4}(1-t^2+\eta^2+6\,\eta^2\,t^2)+0\right)\right\} \tag{16}$$

Die Division dieser beiden Gleichungen giebt:

$$\frac{m}{s} = \frac{\mu}{\sigma}\left(1 - \frac{\eta^2}{12} l^2 \sin^2 \varphi\right) \tag{17}$$

Wenn man hier wieder l nach (13) einsetzt, so bekommt man:

$$\frac{m}{s} = \frac{\mu}{\sigma}\left(1 - \frac{\eta^2 s^2}{12 N^2} \sin^2 \alpha \tang^2 \varphi\right) \tag{18}$$

Hier wollen wir statt φ die reduzierte Breite ψ einführen, also nach (13) S. 403, $\tang \psi = \tang \varphi \sqrt{1 - e^2}$ setzen, und wenn wir zugleich in erster Näherung nach (15) $\sigma^2 = \frac{s^2}{N^2 (1 - e^2)}$ in (18) einführen, so nimmt (18) diese Gestalt an:

$$\frac{m}{s} = \frac{\mu}{\sigma}\left(1 - \frac{\eta^2 \sigma^2}{12} \sin^2 \alpha \tang^2 \psi\right) \tag{19}$$

Zur weiteren Verwertung der zunächst gefundenen Formel (19) braucht man eine sphärische Entwicklung für das Verhältnis $\psi_2 - \psi_1 : \sigma$, wozu wir die früheren sphärischen Entwicklungen von § 57. und § 58. teilweise benützen könnten, die wir aber hier von neuem machen, in der dem neuen Zweck am besten angepassten Form.

Von (6) und (8) S. 305 haben wir die Gleichung:

$$\tang \frac{\beta}{2} = \tang \frac{\sigma}{2} \cos \alpha \sec \frac{\gamma}{2}$$

Dabei bedeutet β die Breiten-Differenz, welche nun mit $\psi_2 - \psi_1 = \mu$ nach Fig. 2. bezeichnet ist, und $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$ die Meridian-Konvergenz; zugleich setzen wir:

$$\cos \alpha \sec \frac{\gamma}{2} = k \tag{20}$$

Wir haben also:

$$\tang \frac{\mu}{2} = k \tang \frac{\sigma}{2}$$

Wenn man hier beiderseits die Tangenten-Reihe nach (19) S. 199 einsetzt, so bekommt man:

$$\frac{\mu}{2} + \frac{1}{3}\frac{\mu^3}{8} + \frac{2}{15}\frac{\mu^5}{32} = k\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sigma^3}{8} + \frac{2}{15}\frac{\sigma^5}{32}\right)$$

$$\mu + \frac{\mu^3}{12} + \frac{\mu^5}{120} = k\left(\sigma + \frac{\sigma^3}{12} + \frac{\sigma^5}{120}\right) \tag{21}$$

$$\mu = k\sigma + \sigma^3 \ldots \qquad \mu^3 = k^3 \sigma^3 \quad \text{erste Näherung}$$

$$\mu = k\sigma + k\frac{\sigma^3}{12}(1 - k^2) + \sigma^5 \ldots \quad \text{zweite Näherung.}$$

Diese zweite Näherung für μ setzt man wieder in das zweite Glied von (21), d. h.:

$$\mu^3 = k^3 \sigma^3 + \frac{1}{4} k^3 \sigma^5 (1 - k^2) + \ldots$$

$$\mu + \frac{1}{12}\left(k^3 \sigma^3 + \frac{1}{4} k^3 \sigma^5 (1 - k^2)\right) + \frac{k^5 \sigma^5}{120} = k\sigma + \frac{k\sigma^3}{12} + \frac{k\sigma^5}{120}$$

Diese Gleichung lässt sich unmittelbar nach μ auflösen und giebt:

$$\mu = k\sigma\left\{1 + \frac{\sigma^2}{12}(1 - k^2) + \frac{\sigma^4}{240}(1 - k^2)(2 - 3k^2)\right\} \tag{22}$$

Nun geben (19) und (22) zusammen:

$$\frac{m}{s} = k\left\{1 - \frac{\eta^2}{12}\sigma^2 \sin^2\alpha \tang^2\psi + \frac{\sigma^2}{12}(1-k^2) + \frac{\sigma^4}{240}(1-k^2)(2-3k^2)\right\} \quad (23)$$

Die Bedeutung von k^2 soll nach (20) eingeführt werden:

$$k = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}} \quad (24)$$

Dabei ist in erster Näherung nach (25) S. 308:

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin\alpha \tang\psi$$

$$\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} = 1 - \frac{\sigma^2}{8}\sin^2\alpha \tang^2\psi \quad (25)$$

Also nun (24):

$$k = \cos\alpha\left(1 + \frac{\sigma^2}{8}\sin^2\alpha \tang^2\psi\right)$$

$$k^2 = \cos^2\alpha\left(1 + \frac{\sigma^2}{4}\sin^2\alpha \tang^2\psi\right)$$

$$1 - k^2 = \sin^2\alpha - \frac{\sigma^2}{4}\sin^2\alpha\cos^2\alpha \tang^2\psi$$

Dieses in (23) eingeführt giebt, zugleich mit Einsetzung von genähert $k^2 = \cos^2\alpha$ im letzten Gliede:

$$m = ks\left\{1 + \frac{\sigma^2}{12}\sin^2\alpha(1 - \eta^2 \tang^2\psi) - \frac{\sigma^4 \sin^2\alpha}{240}(5\cos^2\alpha \tang^2\psi - 2 + 3\cos^2\alpha)\right\} (26)$$

Hier kann man noch σ nach (15) genähert einführen, nämlich:

$$\sigma^2 = \frac{s^2}{N^2(1-e^2)} = \frac{s^2(1-e^2\sin^2\psi)}{a^2(1-e^2)} = \frac{s^2}{a^2}(1 + e'^2\cos^2\varphi)$$

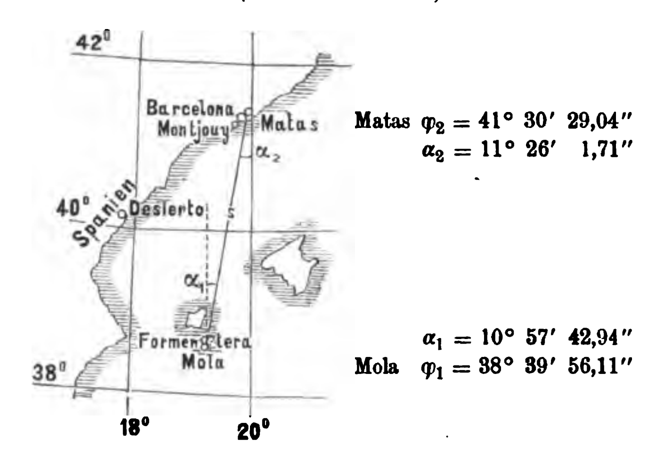
In der Formel (26) sind die Glieder von der Ordnung $e'^4\sigma^2$ noch beibehalten, indem z. B. $\tang^2\psi$ von $\tang^2\varphi$ unterschieden ist; wenn wir die Genauigkeit von der Ordnung $e'^4\sigma^2$ nun im Interesse der Vereinfachung aufgeben wollen, so wird $\eta^2 \tang^2\psi = e'^2\sin^2\varphi$, und damit wird die ganze Formel ausführlichst geschrieben:

$$m = s\frac{\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}}{\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}\left\{1 + \frac{s^2\sin^2\alpha}{12a^2}(1 + e'^2\cos 2\varphi) - \frac{s^4\sin^2\alpha}{240a^4}(-2 + 3\cos^2\alpha + 5\cos^2 a \tang^2\varphi)\right\} \quad (27)$$

Dieses ist im wesentlichen die Formel, welche von *Bessel* im 14. Bande der „Astr. Nachrichten 1837", S. 310, in der „Gradmessung in Ostpreussen" 1838, S. 446 und in General *Baeyers* „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche" 1862, S. 48 angegeben wurde. Die vorhergehende Formel (18), welche von *Bessel* und von *Baeyer* ohne Herleitung eingeführt wurde, kann man am kürzesten durch unseren § 83. begründen, wie in (15) geschehen ist. *Bessels* Formel unterscheidet sich von unserer (27) nur formell dadurch, dass die Entwicklung (25), welche das Glied mit s^2 vereinfacht und dafür einen Beitrag zu dem Gliede mit s^4 giebt, nicht angewendet ist. (Die obige Formel (27) ist auch im wesentlichen identisch mit der Formel in *Helmert*, Höhen-Geodäsie I, (16) S. 306.)

Das Hauptglied der Formel (27) ist unabhängig von den Erddimensionen, und für die folgenden Glieder, in welchen a und e'^2 vorkommen, genügen irgend welche Näherungswerte hiefür.

Fig. 6.
Süd-Ende der französisch-spanischen Gradmessung von 1792.
(Massstab 1 : 10 000 000.)



Zu einem Zahlen-Beispiel für die Anwendung der Formel (27) nehmen wir entsprechend vorstehender Fig. 6. eine Mitteilung von *Bessel* „Astr. Nachr., 19. Band, 1841", S. 112—114, über seine Neuberechnung des südlichen Teiles der alten französisch-spanischen Gradmessung von Dünkirchen bis zu den balearischen Inseln. Der nördliche Punkt *Matas* liegt an der spanischen Küste bei Barcelona, und der südliche Punkt *Mola* ist der südlichste Gradmessungspunkt auf der Insel Formentera.

Aus der Triangulierung hat *Bessel* die geodätische Linie zwischen Matas und Mola, $s = 165\,108{,}586$ Toisen oder $= 321\,802{,}629^m$ berechnet, sowie auch die Azimute α_1 und α_2 reduziert, welche nebst den Breiten φ_1 und φ_2 bei Fig. 6. eingeschrieben sind. Man hat hieraus:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 11° \; 11' \; 52{,}325'' \qquad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0° \; 14' \; 9{,}385''$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 40° \; 5' \; 12{,}575''$$

Wenn man damit die Ausrechnung nach der Formel (27) macht, so findet man:

$$m = 315\,678{,}950^m + 2{,}529^m - 0{,}001^m$$
$$m = 315\,681{,}478^m.$$

Das letzte Glied der Formel (27) bringt also hier nur 1 Millimeter; dieses Glied wird wohl immer zu vernachlässigen sein.

§ 104. Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen.

Indem wir unserer Einleitung S. 7—10 folgen, kommen wir zu der Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids aus *mehr* als zwei Breiten-Gradmessungen, oder zu der Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Man geht dabei von der Anschauung aus, dass die astronomische Messung der

Polhöhen φ verhältnismässig viel ungenauer ist, als die geodätische Messung der Meridianbögen m, denn ein Fehler von 1″ an der Polhöhe oder Breite φ erzeugt bereits eine Änderung von etwa 31 Meter an dem Meridianbogen m, während der mittlere Fehler der geodätischen Meridianbogen-Messung (vgl. S. 191) ein viel geringerer ist.

Allerdings überzeugte man sich bald, dass auch die Messungsfehler der Polhöhen φ *nicht* genügten zur Erklärung der Widersprüche in den verschiedenen Gradmessungen; allein man behielt doch die *Form* der Ausgleichungs-Rechnung, wonach die Quadratsumme aller Polhöhen-Änderungen zu einem Minimum gemacht wurde, noch lange bei, obgleich man wusste, dass die Polhöhen-Widersprüche zum grossen Teil gar nicht in Messungsfehlern, sondern in Lotabweichungen (vgl. Einleitung S. 11) ihren Grund haben. Die Methode der kleinsten Quadrate hat bei solcher Anwendung nur die Bedeutung einer empirischen Vermittlung widerstrebender Elemente, und die dabei übrig bleibenden Fehler v geben erste Fingerzeige, an welchen Stellen Lotablenkungen zu suchen sind.

Wir wollen nun ein vollständiges Zahlen-Beispiel einer solchen Ausgleichung von Breiten-Gradmessungen vornehmen, und dazu die von *Bessel* 1837—1841 gesammelten und gesichteten Gradmessungs-Ergebnisse*) benützen, aus welchen *Bessel* 1841 seine berühmten, heute noch benützten Erddimensionen (vgl. S. 207) abgeleitet hat.

Wir wollen aber nicht geradezu die *Bessel*sche Rechnung selbst hier vorführen, sondern wir wollen eine der *Bessel*schen Gesamt-Ausgleichung analoge Berechnung nur für die älteren Breiten-Gradmessungen in *Europa* vornehmen, und auch von diesen noch etwa ein Viertel der Punkte ausfallen lassen, um eine möglichst gleichförmige Verteilung der Polhöhen zu erzielen. Auf diese Weise behalten wir von den 38 Punkten der *Bessel*schen Ausgleichung (vgl. S. 9) nur noch 20 bei, welche in der nachfolgenden Zusammenstellung angegeben sind.

Da unsere darauf folgende Ausgleichung somit auf einer willkürlichen Auswahl von Beobachtungen beruht, hat dieselbe kaum eine andere Bedeutung als die eines *formellen Rechen-Beispiels*, allein auch als solches hat sie ihren Wert, weil, wie auch bei vielen anderen Ausgleichungs-Aufgaben, ein übersichtliches Zahlen-Beispiel leichter und rascher zum Verständnis der Sache führt, als allgemeine Formeln.

I. Breiten-Gradmessungen in Europa.)*

	Station		Polhöhe φ	$\Delta\varphi$	Meridianbogen m
Französische	Formentera	φ_1	= 38° 39′ 56,1″	. .	. .
Gradmessung	Barcelona	φ_2	= 41 22 47,9	2° 42′ 51,8″	301 354
	Carcassonne	φ_3	= 43 12 54,3	4 32 58,2	505 137
	Pantheon	φ_4	= 48 50 49,4	10 10 53,3	1 131 050
	Dünkirchen	φ_5	= 51 2 8,8	12 22 12,7	1 374 572

*) Die Angaben für die französische Gradmessung sind entnommen von „Astr. Nachr. 19. Band, 1842", S. 115, die Werte der übrigen Gradmessungen dagegen sind von „Astr. Nachr. 14. Band, 1837", S. 336—337, oder Abhandlungen von *Bessel*, herausgegeben von *Engelmann*, Leipzig 1876, III. Band, S. 61 und S. 43. Die Station Formentera ist dieselbe, welche in Fig. 6. § 103. S. 506 mit Mola bezeichnet ist, und der dort angegebene Punkt Matas liegt in der Nähe der Gradmessungsstation Barcelona, woselbst auch noch ein Gradmessungspunkt Montjouy sich befindet, den wir in unsere Rechnung nicht aufgenommen haben.

	Station	Polhöhe φ	$\Delta\varphi$	Meridianbogen m
Englische	Dunnose	$\varphi_6 = 50° \; 37' \; 7{,}6''$	. .	. .
Gradmessung	Greenwich	$\varphi_7 = 51 \; 28 \; 39{,}0$	$0° \; 51' \; 31{,}4''$	95 620
	Arburyhill	$\varphi_8 = 52 \; 13 \; 28{,}0$	$1 \; 36 \; 20{,}4$	178 720
	Clifton	$\varphi_9 = 53 \; 27 \; 31{,}1$	$2 \; 50 \; 23{,}5$	315 892
Hannoversche	Göttingen	$\varphi_{10} = 51° \; 13' \; 47{,}8''$	. .	. .
Gradmessung	Altona	$\varphi_{11} = 53 \; 32 \; 45{,}3$	$2° \; 0' \; 57{,}5''$	224 458
Preussische	Trunz	$\varphi_{12} = 54° \; 13' \; 11{,}5''$	. .	. .
Gradmessung	Königsberg	$\varphi_{13} = 54 \; 42 \; 50{,}5''$	$0° \; 29' \; 39{,}0''$	54 985
	Memel	$\varphi_{14} = 55 \; 43 \; 40{,}4$	$1 \; 30 \; 28{,}9$	167 962
Russische	Belin	$\varphi_{15} = 52° \; 2' \; 40{,}9''$	. .	. .
Gradmessung	Jakobstadt	$\varphi_{16} = 56 \; 30 \; 4{,}6$	$4° \; 27' \; 23{,}7''$	496 114
	Dorpat	$\varphi_{17} = 58 \; 22 \; 47{,}3$	$6 \; 20 \; 6{,}4''$	705 209
	Hochland	$\varphi_{18} = 60 \; 5 \; 9{,}8$	$8 \; 2 \; 28{,}9$	895 315
Schwedische	Malörn	$\varphi_{19} = 65° \; 31' \; 30{,}3''$	. . .	. .
Gradmessung	Pahtawara	$\varphi_{20} = 67 \; 8 \; 49{,}8$	$1° \; 37' \; 19{,}5''$	180 828

Um die Fehler-Gleichungen für eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen zu erhalten, legen wir die *Bessel*schen Erd-Dimensionen a und e^2 nach S. 207 zu Grunde, und bestimmen solche Verbesserungen von a und von e^2, welche die Quadratsumme aller an den Polhöhen φ anzubringenden Verbesserungen zu einem Minimum machen.

Dazu müssen wir zuerst Beziehungen zwischen den Polhöhen-Differenzen $\Delta\varphi$ und den zugehörigen Meridianbögen m ermitteln; und um hiebei einfache Rechnung zu haben, verfahren wir nach dem Satze von § 35. S. 217 oder S. 222, welcher sagt, dass man einen Meridian-Bogen m als Kreisbogen berechnen darf, mit dem Meridian-Krümmungshalbmesser M der *Mittel*breite und mit dem Centriwinkel $\Delta\varphi$. Allerdings werden durch dieses Verfahren bei den grossen Bögen der Gradmessungen Fehler begangen, welche in einzelnen Fällen mehrere Meter betragen; allein da wir die Breiten φ auf 0,1″, entsprechend 3 Meter, abgerundet haben, so ist die angegebene Näherung zulässig.

Es ist auch sehr leicht, die Meridianbögen *genauer* zu rechnen, nach (32) S. 222, wir wollen jedoch die Rechnung so *übersichtlich* als möglich halten, und für eine Genauigkeit von 0,1″ jenes einfache Verfahren beibehalten, und deshalb auch in den Coëfficienten der Fehler-Gleichungen nur erste Näherungen anwenden.

Auch ist noch zu bemerken, dass man für diese Ausgleichung als unabhängige Erddimensions-Unbekannte am besten unsere auch sonst mit Vorteil benützten c und e'^2*) nach (10) und (6) S. 206 nehmen würde; wir wollen aber, weil die älteren Gradmessungs-Berechnungen gewöhnlich mit den Unbekannten a und e^2 geführt sind, zur Vergleichung mit jenen, ebenfalls a und e^2 als Unbekannte annehmen.

Die zwei ersten gemessenen Polhöhen φ_1 und φ_2 sind mit dem dazwischen liegenden Meridianbogen m verbunden durch die Beziehung:

*) Vgl. hiezu die Formeln [1]—[12] am Schlusse S. 515—516.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}\varrho \tag{1}$$

wobei nach (16) und (10) S. 209:

$$\frac{1}{M} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} \quad , \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad . \tag{2}$$

Da die hier vorkommenden Erddimensionen a und e^2 für unsere Ausgleichung die Unbekannten sind, zerlegen wir dieselben in Näherungswerte a_0 und e_0^2 mit zugehörigen Verbesserungen δa und δe^2, d. h. wir setzen:

$$a = a_0 + \delta a \qquad e^2 = e_0^2 + \delta e^2 \tag{3}$$

Wir bezeichnen auch mit M_0 denjenigen Wert von M, welcher durch die Näherungs-Annahmen $a = a_0$ und $e^2 = e_0^2$ entsteht; und demnach entwickeln wir nach dem *Taylor*schen Satz:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0} + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{M}\right)\delta a + \frac{\partial}{\partial e^2}\left(\frac{1}{M}\right)\delta e^2 \tag{4}$$

Die beiden hier gebrauchten partiellen Ableitungen der Funktion $\frac{1}{M}$ entwickeln wir nur in erster Näherung, nämlich nach (2), mit Vernachlässigung aller Glieder mit e^2:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{M}\right) = -\frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial e^2}\left(\frac{1}{M}\right) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) \tag{5}$$

Nun kann man zur Bildung der Fehler-Gleichungen schreiten. Die Gleichung (1), welche wegen der Beobachtungs-Fehler im allgemeinen nicht erfüllt sein wird, wird dadurch zum Stimmen gebracht, dass den beobachteten φ_1 und φ_2 ihre Verbesserungen v_1 und v_2 zugesetzt werden, also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\varrho\left(\frac{1}{M}\right) \tag{6}$$

Wenn man hier (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\varrho\left\{\frac{1}{M_0} - \frac{\delta a}{a^2} + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right)\frac{\delta e^2}{a}\right\} \tag{7}$$

Hier darf man in den Gliedern mit δa und mit δe^2 statt der Unbekannten a, deren Näherungswert a_0 setzen; ja wir wollen sogar, da ohnehin schon alle Glieder mit e^2 in den Coëfficienten von δa und δe^2 vernachlässigt sind, hier $a = M$, also nach (1) das Produkt $\frac{m\varrho}{a} = \frac{m\varrho}{M} = \varphi_2 - \varphi_1$ setzen, und damit wird (7):

$$v_2 - v_1 = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0}\delta a + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right)(\varphi_2 - \varphi_1)\delta e^2 + \frac{m\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{8}$$

Dieses ist eine Gleichung, welche die Differenz $v_2 - v_1$ zweier Beobachtungs-Fehler als lineare Funktion der Unbekannten δa und δe^2 darstellt, d. h. eine Gleichung, welche in gleicher Weise auch auf die übrigen Beobachtungen angewendet, zur Ausgleichung benützt werden kann; ehe wir jedoch die Ausgleichung beginnen, wollen wir noch einige kleine Änderungen vornehmen. Um bequeme Zahlen zur Rechnung zu bekommen, wollen wir nicht δa und δe^2 selbst bestimmen, sondern von δa das Tausendel und von δe^2 das Tausendfache; d. h. wir wollen zwei neue Unbekannte x und y einführen durch die Gleichungen:

$$x = \frac{\delta a}{1000} \qquad y = 1000\,\delta e^2 \tag{9}$$

Dieses in (8) eingesetzt, wird geben:

$$v_2 - v_1 = a'x + b'y + l' \qquad (10)$$

wobei a', b' und l' folgende Bedeutungen haben:

$$a' = -1000\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0} \qquad b' = +\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1000}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right) \qquad (11)$$

$$l' = \frac{m\,\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (12)$$

Als Näherungswerte a_0 und e_0^2 nehmen wir die bekannten *Bessel*schen, nach S. 207, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 = 6\,377\,397{,}155^m & \log a_0 = 6.804\,6434{\cdot}6 \\ e_0^2 = 0{,}006\,674\,372 & \log e_0^2 = 7.824\,4104{\cdot}2 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Wir werden dadurch die Annehmlichkeit haben, dass unsere Absolutglieder l' in (12) geradezu gleich den *Bessel*schen endgültigen $v_2 - v_1$ u. s. w. werden; doch wollen hier davon zunächst keinen Gebrauch machen, sondern die Anwendung der Formeln (10), (11), (12) an den zwei ersten Werten der Tabelle I. von S. 507 zeigen:

$$\left.\begin{array}{llr} \text{Formentera} & \varphi_1 = & 38^\circ\ 39'\ 56{,}1'' \\ \text{Barcelona} & \varphi_2 = & 41^\circ\ 22'\ 47{,}9'' \\ \hline & \varphi_2 - \varphi_1 = & 2^\circ\ 42'\ 51{,}8'' \\ & = & 9771{,}8'' \\ \text{Mittel} & \varphi = & 40^\circ\ \ 1'\ 22{,}0'' \end{array} \quad m = 301\,354^m \right\} \qquad (14)$$

Damit kann man nach den Formeln (11) sofort berechnen:

$$a' = -1{,}532 \qquad b' = +3{,}709 \qquad (15)$$

Auch die Berechnung von l nach (12) hat keine Schwierigkeit, indem dabei M_0 derjenige Wert ist, welcher den Werten a_0 und e_0^2 von (13) entspricht, d. h.:

$$M_0 = \frac{a_0\,(1 - e_0^2)}{(1 - e_0^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\ , \quad \log M_0 = 6.803\,5358 \qquad (16)$$

Indessen können wir wohl auch den günstigen Umstand ausnützen, dass die a_0 und e_0^2 von (13) die bekannten *Bessel*schen sind, welche auch unseren Hilfstafeln S. [2] — [23] des Anhangs zu Grunde liegen; und wir können daher, statt nach (16) $\log M_0$ auszurechnen, dasselbe auch von Seite [12] des Anhangs entnehmen, oder lieber noch sofort von Seite [13]:

$$\begin{array}{r|l} \log[1] = \log\dfrac{\varrho}{M_0} & 8.510\,8893 \\ \text{hiezu von (14) } \log m = \log 301\,354 & 5.479\,0770 \\ \log\dfrac{m\,\varrho}{M_0} & 3.989\,9663 \end{array}$$

$$\frac{m\,\varrho}{M_0} = 9\,771{,}6''$$

$$\text{hiezu von (14)} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 9\,771{,}8''$$

$$\text{also} \qquad l' = -0{,}2'' \qquad (17)$$

Nimmt man dieses mit (15) zusammen, so hat man die erste Gleichung von der Form (10):

$$v_2 - v_1 = -1{,}53\,x + 3{,}71\,y - 0{,}2'' \qquad (18)$$

Nachdem wir so die Aufstellung *einer* Gleichung mit Ausrechnung der Coëfficienten und des Absolutgliedes in aller Ausführlichkeit gezeigt haben, werden wir das Ergebnis der Berechnung für alle übrigen anschreiben:

II. Fehlerdifferenz-Gleichungen.

Formentera-Barcelona	$v_2 - v_1 = -1{,}53\,x + 3{,}71\,y - 0{,}2''$
„ -Carcassonne	$v_3 - v_1 = -2{,}57\,x + 5{,}83\,y - 1{,}4$
„ -Pantheon	$v_4 - v_1 = -5{,}75\,x + 10{,}36\,y - 2{,}1$
„ -Dünkirchen	$v_5 - v_1 = -6{,}98\,x + 11{,}31\,y + 1{,}2$
Dunnose-Greenwich	$v_7 - v_6 = -0{,}48\,x + 0{,}29\,y + 3{,}2''$
„ -Arburyhill	$v_8 - v_6 = -0{,}91\,x + 0{,}48\,y + 3{,}2$
„ -Clifton	$v_9 - v_6 = -1{,}60\,x + 0{,}69\,y - 1{,}9$
Göttingen-Altona	$v_{11} - v_{10} = -1{,}14\,x + 0{,}40\,y + 5{,}0''$
Trunz-Königsberg	$v_{13} - v_{12} = -0{,}28\,x + 0{,}01\,y - 0{,}5''$
„ -Memel	$v_{14} - v_{12} = -0{,}85\,x - 0{,}03\,y + 3{,}3$
Belin-Jakobstadt	$v_{16} - v_{15} = -2{,}52\,x + 0{,}18\,y + 3{,}6''$
„ -Dorpat	$v_{17} - v_{15} = -3{,}58\,x - 0{,}27\,y + 0{,}7$
„ -Hochland	$v_{18} - v_{15} = -4{,}54\,x - 0{,}94\,y + 2{,}3$
Malörn-Pahtawara	$v_{20} - v_{19} = -0{,}92\,x - 1{,}51\,y - 1{,}1''$

Dieses sind keine Fehler-Gleichungen in dem gewöhnlichen Sinne, weil in jeder Gleichung *zwei* Verbesserungen v auftreten. Die Trennung der v geschieht dadurch, dass man für jede Gradmessung eine Polhöhen-Verbesserung v selbst als Unbekannte einführt. Der Fall ist ganz entsprechend der Ausgleichung geodätischer Richtungsmessungen, wo man auch für jeden Satz von Messungen eine Nullpunkts-Korrektion als Unbekannte einführen muss (vgl. Band I. § 78.).

Welchen von den verschiedenen Werten v einer Gradmessung man hiebei auswählen will, ist ursprünglich willkürlich; wir haben aber durch die Differenzenbildung $v_2 - v_1$, $v_3 - v_1$ u. s. w. bereits jeweils das *erste* v jeder Gradmessung zur unabhängigen Unbekannten bestimmt, und wir bilden daher nun aus unseren 14 vorstehenden Fehlerdifferenz-Gleichungen, folgendes System von 20 Fehler-Gleichungen:

III. Fehler-Gleichungen.

$v_1 =$	v_1	..	..	..	..	..
$v_2 =$	v_1	..	..	$-1{,}53\,x$	$+3{,}71\,y$	$-0{,}2''$
$v_3 =$	v_1	..	..	$-2{,}57\,x$	$+5{,}83\,y$	$-1{,}4''$
$v_4 =$	v_1	..	..	$-5{,}75\,x$	$+10{,}36\,y$	$-2{,}1''$
$v_5 =$	v_1	..	..	$-6{,}98\,x$	$+11{,}31\,y$	$+1{,}2''$
$v_6 =$	..	v_6	..	..	..	..
$v_7 =$	..	v_6	..	$-0{,}48\,x$	$+0{,}29\,y$	$+3{,}2''$
$v_8 =$	..	v_6	..	$-0{,}91\,x$	$+0{,}48\,y$	$+3{,}2''$
$v_9 =$	..	v_6	..	$-1{,}60\,x$	$+0{,}69\,y$	$-1{,}9''$

	v_1	v_6	v_{10}	v_{12}	v_{15}	v_{19}	x	y	
$v_{10} =$	..	..	v_{10}	..	..	..	..	..	..
$v_{11} =$	..	..	v_{10}	..	..	..	$-1{,}14\,x$	$+\ 0{,}40\,y$	$+5{,}0''$
$v_{12} =$	..	..	..	v_{12}	..	..	..	..	..
$v_{13} =$	..	..	..	v_{12}	..	..	$-0{,}28\,x$	$+\ 0{,}01\,y$	$-0{,}5''$
$v_{14} =$	..	..	..	v_{12}	..	..	$-0{,}85\,x$	$-\ 0{,}03\,y$	$+3{,}3''$
$v_{15} =$	..	..	..	..	v_{15}	..	..	..	..
$v_{16} =$	..	..	..	..	v_{15}	..	$-2{,}52\,x$	$+\ 0{,}18\,y$	$+3{,}6''$
$v_{17} =$	..	..	..	..	v_{15}	..	$-3{,}58\,x$	$-\ 0{,}27\,y$	$+0{,}7''$
$v_{18} =$	..	..	..	..	v_{15}	..	$-4{,}54\,x$	$-\ 0{,}94\,y$	$+2{,}3''$
$v_{19} =$	..	..	..	..	..	v_{19}	..	..	..
$v_{20} =$	..	..	..	..	..	v_{19}	$-0{,}92\,x$	$-\ 1{,}51\,y$	$-1{,}1''$

Aus diesen Fehler-Gleichungen bildet man in bekannter Weise die Normal-Gleichungen welche ausführlich geschrieben (d. h. nicht mit der Abkürzung (3) S. 62, Band I.) folgende sind:

IV. Normal-Gleichungen.

$+5\,v_1$	..	..	..	..	..	$-\ 16{,}83\,x$	$+\ 31{,}21\,y$	$-\ 2{,}50$	$=0$
..	$+4\,v_6$	..	..	..	..	$-\ 2{,}99\,x$	$+\ 1{,}46\,y$	$+\ 4{,}50$	$=0$
..	..	$+2\,v_{10}$	..	..	..	$-\ 1{,}14\,x$	$+\ 0{,}40\,y$	$+\ 5{,}00$	$=0$
..	..	..	$+3\,v_{12}$	..	..	$-\ 1{,}13\,x$	$-\ 0{,}02\,y$	$+\ 2{,}80$	$=0$
..	..	..	..	$+4\,v_{15}$	..	$-\ 10{,}64\,x$	$-\ 1{,}03\,y$	$+\ 6{,}60$	$=0$
..	..	..	..	..	$+2\,v_{19}$	$-\ 0{,}92\,x$	$-\ 1{,}51\,y$	$-\ 1{,}10$	$=0$
$-16{,}83\,v_1$	$-2{,}99\,v_6$	$-1{,}14\,v_{10}$	$-1{,}13\,v_{12}$	$-10{,}64\,v_{15}$	$-0{,}92\,v_{19}$	$+137{,}07\,x$	$-155{,}11\,y$	$-23{,}18$	$=0$
$+31{,}21\,v_1$	$+1{,}46\,v_6$	$+0{,}40\,v_{10}$	$-0{,}02\,v_{12}$	$-1{,}03\,v_{15}$	$-1{,}51\,v_{19}$	$-155{,}11\,x$	$+287{,}21\,y$	$-14{,}08$	$=0$
								$+88{,}03$	$=[ll]$

Bei der Auflösung dieser 8 Gleichungen kann man den Umstand benützen, dass die ersten 6 Unbekannten in den ersten Gliedern nur vereinzelt vorkommen; d. h. man kann mit Hilfe der 6 ersten Gleichungen die v in x und y ausdrücken, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = +3{,}366\,x - 6{,}242\,y + 0{,}500 \\ v_6 = +0{,}748\,x - 0{,}365\,y - 1{,}125 \\ v_{10} = +0{,}570\,x - 0{,}200\,y - 2{,}500 \\ v_{12} = +0{,}377\,x + 0{,}007\,y - 0{,}933 \\ v_{15} = +2{,}660\,x + 0{,}258\,y - 1{,}650 \\ v_{19} = +0{,}460\,x + 0{,}755\,y + 0{,}550 \end{array}\right\} \qquad (19)$$

Setzt man diese 6 Ausdrücke in die zwei letzten der 8 Normal-Gleichungen IV., so bekommt man zwei reduzierte Normal-Gleichungen, welche nur noch x und y enthalten, nämlich:

$$\left.\begin{array}{r} +48{,}38\,x - 52{,}13\,y - 7{,}24 = 0 \\ -52{,}13\,x + 90{,}40\,y - 0{,}23 = 0 \\ +55{,}14 = [ll\,.\,6] \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Wir haben hier bei (20) ein Schlussglied $[ll\,.\,6] = 55{,}14$ beigefügt, welches (nach Band I. (8) S. 67) so entsteht:

$$88{,}03 - \frac{2{,}5^2}{5} - \frac{4{,}5^2}{4} - \frac{5{,}0^2}{2} - \frac{2{,}8^2}{3} - \frac{6{,}6^2}{4} - \frac{1{,}1^2}{2} = 55{,}14 \qquad (21)$$

Dasselbe, was wir hier durch (19) und (20) mit (21) angegeben haben, erhält man auch dadurch, dass man die Normal-Gleichungen IV. nebst dem angehängten $[ll]$ schrittweise reduziert (nach den Regeln (4), (5) u. s. w. S. 63, Band I.). Dabei macht sich das Ausfallen vieler Coëfficienten in dem ersten Teile der Normal-Gleichungen IV. von selbst angenehm bemerklich, und thatsächlich thut man dabei genau dasselbe, was in (19), (20) mit (21) beschrieben worden ist.

Jedenfalls haben wir nun das reduzierte System (20) vollends nach x und y aufzulösen, wodurch wir finden:

$$x = +0{,}4023 \qquad y = +0{,}2347 \tag{22}$$

$$[ll \,.\, 8] = 52{,}1 = [vv] \tag{23}$$

aus x und y von (22) bilden wir die eigentlichen Unbekannten δa und δe^2 nach (9):

$$\delta a = 1000\,x = +402{,}3^{m} \qquad \delta e^2 = 0{,}001\,y = +0{,}0002\,347$$

Hiezu hat man die Näherungswerte nach (13):

$$a_0 = 6\,377\,397{,}2 \qquad e_0^2 = 0{,}006\,6744$$

$$a_0 + \delta a = a = 6\,377\,800^{m} \qquad e_0^2 + \delta e^2 = e^2 = 0{,}006\,9091 \tag{24}$$

Damit ist die Aufgabe im wesentlichen gelöst; wir wollen aber auch noch die einzelnen v ausrechnen, um die Fehlerverteilung kennen zu lernen, und um eine durchgreifende Rechenprobe in der Summe $[vv]$ zu erhalten.

Zuerst bestimmt man diejenigen v, welche als unabhängige Unbekannte eingeführt wurden, indem man die x und y von (22) in (19) einsetzt. Man findet dadurch:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = +0{,}389 & v_{12} = -0{,}783 \\ v_6 = -0{,}910 & v_{15} = -0{,}519 \\ v_{10} = -2{,}311 & v_{19} = +0{,}912 \end{array}\right\} \tag{25}$$

Endlich setzt man diese Werte (25) in die Fehler-Gleichungen III. S. 511—512, und bekommt dadurch die sämtlichen v, wie wir in der nachfolgenden Schluss-Tabelle angeben:

V. Fehler-Verteilung und Quadratsumme $[vv]$.

				v^2
Französische	Formentera	v_1	$= +0{,}39''$	0,15
Gradmessung	Barcelona	v_2	$= +0{,}44''$	0,19
	Carcassonne	v_3	$= -0{,}66''$	0,44
	Pantheon	v_4	$= -1{,}59''$	2,53
	Dünkirchen	v_5	$= +1{,}43''$	2,04
		Summe	$+0{,}01''$	
Englische	Dunnose	v_6	$= -0{,}91''$	0,83
Gradmessung	Greenwich	v_7	$= +2{,}17''$	4,71
	Arburyhill	v_8	$= +2{,}04''$	4,16
	Clifton	v_9	$= -3{,}29''$	10,82
		Summe	$+0{,}01''$	
Hannoversche	Göttingen	v_{10}	$= -2{,}31''$	5,34
Gradmessung	Altona	v_{11}	$= +2{,}32''$	5,38
		Summe	$+0{,}01''$	

Preussische Gradmessung	Trunz	$v_{12} = -0{,}78''$	0,61
	Königsberg	$v_{13} = -1{,}39''$	1,93
	Memel	$v_{14} = +2{,}17''$	4,71
		Summe 0,00	
Russische Gradmessung	Belin	$v_{15} = -0{,}52''$	0,27
	Jakobstadt	$v_{16} = +2{,}11''$	4,45
	Dorpat	$v_{17} = -1{,}32''$	1,74
	Hochland	$v_{18} = -0{,}26''$	0,07
		Summe + 0,01	
Schwedische Gradmessung	Malörn	$v_{19} = +0{,}91''$	0,83
	Pahtawara	$v_{20} = -0{,}91''$	0,83
		Summe 0,00	$52{,}03 = [v\,v]$ (25a)

Die übrig bleibenden Fehler v geben in der einzelnen Gradmessung je die Summe Null (ebenso wie bei einem trigonometrischen Netze die Summen der Richtungs-Korrektionen stationsweise gleich Null sind). Die Summe $[v\,v] = 52{,}03$ als Ergebnis der Tabelle V. stimmt hinreichend mit $[v\,v] = 52{,}1$ nach (23) als Ergebnis der Elimination, und damit ist die Ausgleichung vom Ansatz der Fehlerdifferenz-Gleichungen II. S. 511 an versichert. Ob in dem Ansatze jener Gleichungen II. selbst kein Versehen vorgekommen ist, das erfährt man dadurch, dass man mit den gefundenen Erddimensionen $a = 6\,377\,800^m$ und $e^2 = 0{,}006\,9091$ von (24), auch noch die $\varphi_2 - \varphi_1$ nach (1) und (2) berechnet, und sie mit den beobachteten $\Delta\varphi$ der Tabelle I. S. 507—508 vergleicht, worauf $v_2 - v_1 = \varphi_2 - \varphi_1 - \Delta\varphi$ u. s. w. werden muss. Wir haben dieses für je *einen* grossen Bogen jeder der 6 Gradmessungen ausgerechnet, und innerhalb der dafür nötigen Rechenschärfe von 0,1″ richtig gefunden.

Nachdem somit $[v\,v] = 52{,}0$ in runder Zahl von (23) und von (25a) bestätigt ist, bestimmen wir daraus den mittleren Fehler einer Polhöhe:

$$m = \sqrt{\frac{52}{12}} = \pm 2{,}1'' \qquad (25b)$$

Dabei ist der Nenner $12 = 20 - 8$, weil 20 Beobachtungen und 8 unabhängige Unbekannte (v_1, v_6, v_{10}, v_{12}, v_{15}, v_{19}, x, y) vorhanden sind.

Aus dem Excentricitätsquadrat e^2 von (24) findet man auch die Abplattung α nach (8) S. 206:

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 : 288{,}975 \qquad (26)$$

und endlich aus a und α findet man den Meridian-Quadrant Q nach (19) S. 219 mit dem Hilfstäfelchen unten auf S. 219:

$$log\,\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) = 0.195\,3681 \quad , \quad Q = 10\,000\,900^m \qquad (27)$$

Unser Gesamt-Ergebnis ist also nun für die älteren Europäischen Gradmessungen, abgerundet:

$$\left.\begin{array}{ll} a = 6\,377\,800 & e^2 = 0{,}006\,909 \\ \alpha = 1 : 289{,}0 & Q = 10\,000\,900^m \\ \multicolumn{2}{c}{m = \pm 2{,}1''} \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Man könnte auch noch die mittleren Fehler von a und e^2 oder von α und Q berechnen, wie wir an einem entsprechenden Beispiele unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, S. 325—326 gezeigt haben.

Obgleich wir unserer ganzen vorstehenden Berechnung von Anfang an keine andere Bedeutung als die eines formellen Rechenbeispiels zur Erläuterung der Gradmessungs-Theorien aus der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts (vgl. S. 8 — 9) zugeschrieben haben, so wollen wir nun doch die Ergebnisse (28) mit den neuesten Annahmen für ein „Referenz"-Ellipsoid vergleichen, die wir auf S. 15 zusammengestellt haben. Hiernach hat unser Europa-Ellipsoid (28) dieselbe Abplattung 1 : 289 wie *Listings* „typisches" Ellipsoid und einen Quadranten Q, der etwa zwischen *Listing* und *Clarke* die Mitte hält.

Ausgleichung mit den Unbekannten c und e'^2, und mit schärferen Formeln.

Die vorstehende Ausgleichung wurde mit den Unbekannten a und e^2 geführt, im Anschluss an die in den früheren geodätischen Formeln am meisten gebrauchten Grössen (vgl. die Anmerkung auf S. 508).

Es ist aber auch hier wie in vielen anderen Fällen besser, die Grössen c und e'^2 nach (10) und (6) S. 206 zu Grunde zu legen, weshalb wir die vorstehende Aufgabe auch mit c und e'^2 als Unbekannten behandeln, und zugleich die bei (5) und (8) vernachlässigten höheren Glieder nun berücksichtigen wollen.

Man hat zunächst wie oben bei (1) S. 509:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M} \varrho \qquad [1]$$

Dabei ist: $\frac{1}{M} = \frac{V^3}{c}$ wobei $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$ [2]

Die Erddimensionen seien:

$$c = c_0 + \delta c \qquad e'^2 = e'^2_0 + \delta e'^2 \qquad [3]$$

Dazu wird nach dem *Taylor*schen Satze entwickelt:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0} + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{M}\right)\delta c + \frac{\partial}{\partial e'^2}\left(\frac{1}{M}\right)\delta e'^2 \qquad [4]$$

Hiezu hat man die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{M}\right) = -\frac{1}{c^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial e'^2}\left(\frac{1}{M}\right) = \frac{3}{2}\frac{V}{c}\cos^2\varphi \qquad [5]$$

Zur Aufstellung der Fehler-Gleichungen hat man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\varrho\left(\frac{1}{M}\right) \qquad [6]$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\varrho\left\{\frac{1}{M_0} - \frac{\delta c}{c^2} + \frac{3}{2}\frac{V}{c}\cos^2\varphi\,\delta e'^2\right\} \qquad [7]$$

$$v_2 - v_1 = -\frac{m\varrho}{c}\frac{\delta c}{c} + \frac{3}{2}\frac{m\varrho}{c}V\cos^2\varphi\,\delta e'^2 + \frac{m\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \qquad [8]$$

Statt $\frac{m\varrho}{c}$ kann man auch schreiben $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^3}$ und als Unbekannte der Ausgleichung sollen eingeführt werden:

$$x = \frac{\delta c}{1000} \qquad y = 1000\,\delta e'^2 \qquad [9]$$

Dann hat man:

$$v_2 - v_1 = a'x + b'y + l' \qquad [10]$$

wobei a', b' und l' folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} a' &= -1000\frac{m\,\varrho}{c^2} \quad \text{oder} \quad = -\frac{1000}{V^3}\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{c} \\ b' &= +\frac{3}{2000}\,\frac{m\,\varrho}{c}\,V\cos^2\varphi \quad \text{oder} \quad = +\frac{3}{2000}\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{V^2}\cos^2\varphi \end{aligned}\right\} \qquad [11]$$

$$l' = \frac{m\,\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \qquad [12]$$

Wenn man statt δc selbst das Verhältnis $\frac{\delta c}{c}$ als Unbekannte einführt $\left(\text{bzw. } \frac{\delta c}{1000\,c} \text{ nach [9]}\right)$, was unter Umständen nützlich ist, so wird in a' nach [11] ein Faktor c im Nenner fortfallen.

Mit diesen Gleichungen [1] — [12] hat man die Aufgabe wieder ebensoweit geführt, wie mit den früheren (1) — (12) S. 509—510.

Die neuen Formeln [9] — [12] sind nicht nur in Bezug auf die Unbekannten c und e'^2 von den früheren verschieden, sondern sie sind auch in Bezug auf die Coëfficienten genauer als die früheren, weil wir die Glieder mit e'^2 in [11] beibehalten haben, während bei den früheren (11) Glieder von der Ordnung e^2 vernachlässigt sind. Diese mehr oder weniger weit getriebene Schärfe der Rechnung ist zwar nicht eine notwendige Folge der Wahl der Unbekannten c, e'^2 oder a, e^2, allein bei der Rechnung mit c, e'^2 ist die Beibehaltung der höheren Glieder bequemer, weil in [2] nur e'^2 in dem Zähler V^3 vorkommt, dagegen in (2) auch noch der Nenner $1 - e^2$ von e^2 abhängig ist.

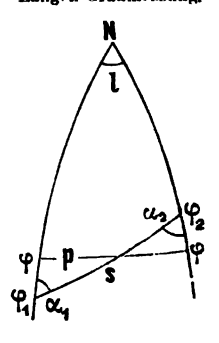
Soweit in den Coëfficienten a' und b' bei [11] die Unbekannten c und e'^2 vorkommen (e'^2 auch in V), werden beliebige Näherungswerte genommen, oder vorhandene Tafeln (z. B. für V^2) benützt, während für das Absolutglied l' nach [12] genau diejenigen Näherungswerte c_0 und e'^2_0 zu nehmen sind, welche vermöge [3] und [9] streng eingeführt werden.

Auch sind bei scharfer Berechnung der Absolutglieder die Korrektionen zu berücksichtigen, welche in § 35. durch die Formel (32) S. 222 oder die Tabelle S. 223 dargestellt sind. Diese leicht anzubringende Verbesserung ist in [12] nur der Kürze und Übersichtlichkeit wegen weggelassen.

§ 105. Längen-Gradmessung.

Wenn man eine Triangulierungskette in der Haupterstreckung von West nach Ost anlegt, und die beiden Endpunkte durch eine astronomische Längen-Bestimmung verbindet, so erhält man eine Längen-Gradmessung.

Fig. 1.
Längen-Gradmessung.



Während in früherer Zeit, namentlich im vorigen Jahrhundert, wegen der grossen Unsicherheit der astronomischen Längen-Bestimmungen, diese Form der Gradmessung wenig Bedeutung hatte, ist jetzt, seit die elektro-telegraphischen Zeitübertragungen nahezu die Genauigkeit der Breitenmessungen erreicht haben, das Verhältnis ein anderes geworden, und die Längen-Gradmessungen sind jetzt den Breiten-Gradmessungen nahezu gleichberechtigt.

Um die Theorie der Längen-Gradmessung in ihren Grundzügen zu behandeln, brauchen wir nur die Gleichung (16) S. 396 vorzuführen:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha \left\{1 + \frac{S^2}{24} (\sin^2 \alpha \, t^2 - \cos^2 \alpha \, (1 + \eta^2 - 9 \, \eta^2 t^2) \right\} \tag{1}$$

Dabei ist:

$$S = \frac{s}{c} V = \frac{s}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{2}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \tag{3}$$

Ausser dem astronomischen Längenunterschied l und dem geodätischen Bogen s sind auch noch die Breiten φ_1, φ_2 und die Azimute α_1, α_2 durch Messung zu bestimmen (vgl Fig. 1.). Wenn die Messung unter niederen Breiten (in der Nähe des Äquators) stattfindet, braucht φ nicht sehr genau zu sein, und wenn der Bogen s wesentlich west-östliche Erstreckung hat (α nahezu $= 90°$), braucht α nicht sehr genau zu sein.

Die Ausrechnung nach der Formel (1) hat die Bedeutung einer Reduktion der geodätischen Linie s auf den Parallelkreis der Mittelbreite φ, und diese Reduktion spielt hier dieselbe Rolle wie die Reduktion einer Breiten-Gradmessung auf den Meridian, die wir in § 103. ausführlich für sich behandelt haben.

Wir denken nun die Reduktion nach (1) ausgeführt, d. h. wir setzen:

$$s \sin \alpha \left\{1 + \left(\frac{s}{c} V\right)^2 (\sin^2 \alpha \, t^2 - \cos^2 \alpha \, (1 + \eta^2 - 9 \, \eta^2 t^2) \right\} = p \tag{4}$$

Dann ist nach (1):

$$l \cos \varphi = \frac{p}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{5}$$

Hier erscheint der Parallelbogen p in gleicher Weise als gemessene Grösse wie der Meridianbogen m bei den Breiten-Gradmessungen.

Nun sollen *zwei* solcher Messungen vorliegen, nämlich ausser (5) auch noch entsprechend:

$$l' \cos \varphi' = \frac{p'}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) kann man die beiden Unbekannten e'^2 und c bestimmen; wir schreiben hiebei zur Abkürzung:

$$\frac{p \, l' \cos \varphi}{p' \, l \cos \varphi'} = q \tag{7}$$

Dann wird:

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi'} \tag{8}$$

Dann mit Probe aus (5) und (6):

$$c = \frac{p}{l \cos \varphi} \sqrt{1 + e'^2 \cos \varphi} = \frac{p'}{l' \cos \varphi'} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{9}$$

Diese Gleichungen (7), (8), (9) sind ganz entsprechend den früheren für zwei Breiten-Gradmessungen gefundenen Gleichungen § 102. S. 497—498.

Ausser der Zeitübertragung durch elektrische Telegraphie ist in neuester Zeit auch wieder die optische Signalgebung zur astronomischen Längenbestimmung benützt

werden. Das Nähere hierüber giebt „Bestimmung des Längenunterschieds zwischen den Stationen Wangeroog und Schilling durch optische Signale mittelst des Heliotropenlichtes. Von *A. Fischer*". „Astr. Nachr.", 124. Band (1890), Nr. 2962.

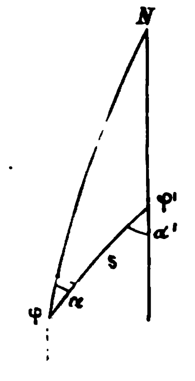
§ 106. Azimut-Übertragung.

Nachdem wir gesehen haben, dass die Excentrizität der Meridian-Ellipse durch zwei *Breiten*-Gradmessungen bestimmt werden kann, und dass dieselbe Aufgabe auch durch zwei *Längen*-Gradmessungen gelöst wird, ist drittens noch zu zeigen, dass auch zwei *Azimut*-Messungen mit den zugehörigen Breiten und mit einer Triangulierungs-Verbindung, zur Bestimmung der Excentrizität der Meridian-Ellipse führen.

Azimut-Messungen sind auch schon bei den Breiten-Gradmessungen und bei den Längen-Gradmessungen mit benützt worden, aber mehr nur als *Hilfs*-Messungen, zur Reduktion der gemessenen Bögen auf den Meridian oder rechtwinklig zum Meridian; dagegen bei der dritten Aufgabe, die wir nun vorhaben, sind die Azimute gerade die Hauptwerte der Messung.

Wenn man nach Andeutung von Fig. 1. die beiden Breiten φ, φ' und die beiden Azimute α, α' gemessen hat, so kann man zwischen diesen 4 Grössen einerseits, und der Excentricität der Meridian-Ellipse andererseits, eine Beziehung herstellen durch Vermittlung der reduzierten Breiten.

Fig. 1.
Azimut-Übertragung.



Bezeichnen wir die reduzierten Breiten mit ψ und ψ', so ist nach (11) S. 403:



$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \qquad \cos\psi' = \frac{\cos\varphi'}{V'\sqrt{1-e^2}} \tag{1}$$

oder:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e'^2}}{V} \qquad \cos\psi' = \frac{\cos\varphi'\sqrt{1+e'^2}}{V'} \tag{1a}$$

Die reduzierten Breiten ψ und ψ' geben mit den Azimuten α und α' nach (1) S. 405 mit Fig. 2. S. 406 die Gleichung:

$$\cos\psi\sin\alpha = \cos\psi'\sin\alpha' \tag{2}$$

Dieses in Verbindung mit (1a) giebt:

$$\left(\frac{\cos\varphi'\sin\alpha'}{\cos\varphi\sin\alpha}\right)^2 = \frac{V'^2}{V^2} = \frac{1+e'^2\cos^2\varphi'}{1+e'^2\cos^2\varphi}$$

Setzt man:

$$\frac{\cos\varphi'\sin\alpha'}{\cos\varphi\sin\alpha} = q \tag{3}$$

so wird:

$$e'^2 = \frac{1-q^2}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} \tag{4}$$

Damit hat man auch:

$$1+e'^2 = \frac{\sin^2\varphi' - q^2\sin^2\varphi}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} = \frac{1}{1-e^2} \tag{5}$$

Man hat also in (3)—(5) abermals ein Gleichungs-System von derselben Form wie bei zwei Breiten-Gradmessungen (6), (7), (8) § 102. S. 498 und bei zwei Längen-Gradmessungen (7), (8), (9) § 105. S. 517.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Trunz} & \varphi' = 54^\circ\ 13'\ 11{,}466'' & \alpha' = 67^\circ\ 26'\ 56{,}152'' \\ \text{Berlin} & \varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}680'' & \alpha = 62^\circ\ 31'\ 15{,}416'' \end{array}\right\} \qquad (6)$$

(Diese Zahlenwerte, welche für uns nur die Bedeutung eines formellen Rechen-Beispiels haben, sind nahezu dieselben wie in General *Baeyers* „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche" S. 104—106.)

Wenn man diese Zahlenwerte (6) in die Formeln (3), (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$\log q^2 = 9.999\,9152{\cdot}63$$

$$e'^2 = \frac{0{,}000\,195\,095}{0{,}370\,440\,0839 - 0{,}341\,846\,755}$$

$$\log e'^2 = 7.833\,981 \qquad (7)$$

$$\log(1 + e'^2) = \log\frac{1}{1 - e^2} = 9.997\,0468 \qquad (8)$$

Damit ist die Excentricität der Meridian-Ellipse bestimmt. Man sieht aus den Gleichungen (3) und (4) unmittelbar, dass das ganze Verfahren unbrauchbar wird, wenn die beiden Punkte, in welchen die Breiten φ, φ' und die gegenseitigen Azimute α, α' gemessen werden, entweder auf demselben Meridian oder auf gleicher Breite liegen, denn im Meridian ist $\alpha = \alpha' = 0$, also $q = \frac{0}{0}$; und wenn $\varphi' = \varphi$ ist, so muss wegen (1) und (2), auch $\alpha' = \alpha$ werden, also wieder $q = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt. Auch wenn φ und φ' beide klein sind, d. h. die Messung in der *Nähe* des Äquators stattfindet, versagt die Methode, weil dann α und α' sehr wenig verschieden sind, also q nahe $= 1$ und e'^2 nahezu $= \frac{0}{0}$.

Hiernach ist das Verfahren anwendbar in höheren Breiten mit Erstreckung *schief* zum Meridian.

Wenn ausser den astronomischen Messungs-Ergebnissen φ, φ', α, α' auch die Länge s der verbindenden geodätischen Linie bekannt ist, so kann man auch die Erdaxe bestimmen.

Wir können hiezu die Gleichung (17) S. 416 benützen, nämlich mit Einsetzung von S nach (10) S. 415:

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = \frac{s}{c}\,V\left\{1 - \frac{\eta^2}{24}\left(2\left(\frac{s}{c}V\sin\alpha\right)^2 t^2 + \left(\frac{s}{c}V\cos\alpha\right)^2(1 - t^2 + \eta^2 + 6\,\eta^2 t^2)\right)\right\}$$

Hier ist nach (10) S. 206, $c\sqrt{1-e^2} = a$, also giebt vorstehende Gleichung, mit Zusetzung des nötigen ϱ:

$$a = s\,V\frac{\varrho}{\sigma}\left\{1 - \frac{\eta^2}{24}\left(2\left(\frac{s}{c}V\sin\alpha\right)^2 t^2 + \left(\frac{s}{c}V\cos\alpha\right)^2(1 - t^2 + \eta^2 + 6\,\eta^2 t^2)\right)\right\} \qquad (9)$$

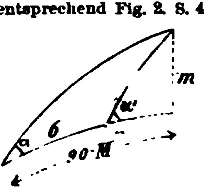
Es kommt also nur noch darauf an, σ zu berechnen, und das ist eine rein sphärische Aufgabe, welche mit Hilfe der Fig. 2. S. 520 bzw. der ausführlicheren Fig. 2. S. 408 gelöst wird.

Als Vorbereitung hiezu berechnet man die beiden reduzierten Breiten ψ und ψ', wobei der zuvor in (5) und (7) ermittelte Excentricitätswert e bzw. e' zu benützen ist.

$$\tan\psi = \sqrt{1-e^2}\,\tan\varphi \quad , \quad \tan\psi' = \sqrt{1-e^2}\,\tan\varphi' \qquad (10)$$

Nun hat man in dem sphärischen Dreieck von Fig. 2. *vier* Stücke gegeben, nämlich ψ, ψ', α, α'; die Berechnung von σ ist also nicht bloss bestimmt, sondern sogar überbestimmt, wodurch eine Rechenprobe entsteht, denn die reduzierten Breiten ψ und ψ' nach (10) beruhen auf derjenigen Excentricität e bzw. e', welche in (3)—(5) aus den 4 Grössen φ, φ', α, α' selbst abgeleitet worden ist. Würde also die Rechenprobe bei der Doppelbestimmung von σ nicht stimmen, so könnte der Grund entweder in der sphärischen Rechnung nach Fig. 2. oder aber auch in der vorhergehenden Berechnung der reduzierten Breiten nach (10) liegen.

Fig. 2.
(entsprechend Fig. 2. S. 408.)



Die zu der genannten sphärischen Berechnung von σ nach Fig. 2. nötigen Formeln können wir von S. 408 entnehmen; wir wollen dabei *zwei* Werte M einführen, den ersten zu ψ und α gehörig, den zweiten zu ψ' und α' gehörig, dann ist:

$$\sigma = M' - M \tag{11}$$

Für M und M' hat man nach (2) S. 408:

$$tang\, M = \frac{tang\, \psi}{cos\, \alpha} \qquad tang\, M' = \frac{tang\, \psi'}{cos\, \alpha'} \tag{12}$$

Aus (12) und (11) hat man bereits das gewünschte σ. Die dazu gehörige, oben erwähnte Rechenprobe kann man auf verschiedene Art erlangen, z. B. durch Vermittlung des Bogens m, welcher für M und M' derselbe ist. Nach (2) und (3) S. 408 ist:

$$sin\, m = cos\, \psi\, sin\, \alpha = cos\, \psi'\, sin\, \alpha'$$

dann:

$$sin\, M = \frac{cos\, m}{sin\, \psi} \quad , \quad sin\, M' = \frac{cos\, m}{sin\, \psi'} \tag{13}$$

Damit hat man die zweite Bestimmung von M und M', als Versicherung für (12). Wenn aber M und M' erheblich grösser als 45° sind, so sind die Bestimmungen (13) nicht günstig; dann rechnet man lieber:

$$cotg\, \lambda_1 = tang\, M\, sin\, m \quad , \quad cotg\, \lambda_2 = tang\, M'\, sin\, m$$
$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda$$
$$sin\, \sigma = \frac{sin\, \lambda\, cos\, \psi'}{sin\, \alpha} = \frac{sin\, \lambda\, cos\, \psi}{sin\, \alpha'} \tag{14}$$

Die Anwendung dieser Formeln auf unser Beispiel (6) giebt:

Trunz	$\psi' = 54°\ 7'\ 38{,}6482''$	$\alpha' = 67°\ 26'\ 56{,}152''$
Berlin	$\psi = 52°\ 24'\ 37{,}8514''$	$\alpha = 62°\ 31'\ 15{,}416''$

$$M = 70°\ 26'\ 40{,}0950'' \qquad M' = 74°\ 29'\ 58{,}3496''$$
$$M' - M = \sigma = 4°\ 3'\ 18{,}2546'' \tag{15}$$
$$m = 32°\ 45'\ 50{,}2488''$$
$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda = 6°\ 8'\ 45{,}6806''$$

hieraus:

$$\sigma = 4°\ 3'\ 18{,}2548'' \tag{16}$$

Die beiden Werte σ nach (15) und (16) stimmen unter sich hinreichend: wir haben mit dem Mittel $\sigma = 4°\ 3'\ 18{,}2547''$ weiter gerechnet, und damit aus (9) erhalten:

$$log\, r_i^2 = 7.385\,5669 \quad , \quad log\, V^2 = 0.001\,0539.6$$
$$a = 6\,380\,516{,}074^m - 9{,}543^m + 0{,}448^m$$
$$a = 6\,380\,506{,}979^m \qquad log\, a = 5.804\,8551{\cdot}88 \tag{17}$$

Die Korrektionsglieder von (9) haben also hier nur 9,5^m und 0,4^m ausgemacht, woraus zugleich zu ersehen ist, dass keine Wiederholung der Rechnung nötig ist wegen des in (9) *vorläufig* benützten $c = a\sqrt{1 + e'^2}$.

Die Berechnung der Axenlänge a kann man statt nach (9) auch in manchen anderen Formen machen, wie in General *Baeyer*s Messen auf der sphäroidischen Oberfläche § 13. und § 27. gezeigt ist.

(In unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, hatten wir in § 88. zwei verschiedene andere Berechnungsarten für dasselbe Beispiel Berlin-Trunz wie hier; die Zahlenwerte waren im wesentlichen auch dieselben wie die neuen; die nicht unerheblichen Abweichungen in den letzten Stellen sind nicht Rechenfehler, sondern rühren daher, dass in der vorigen Auflage nur mit 7stelligen Logarithmen gerechnet war, während die neue Rechnung mit 8—9 richtigen Stellen geführt ist.)

Der Grundgedanke, die Excentricität der Meridian-Ellipse aus *einer* Gradmessung schief zum Meridian zu bestimmen, ist zuerst von *J. Tobias Mayer* erfasst worden, wie aus einer von ihm hinterlassenen und in den „Astr. Nachr., 13. Band, 1836", S. 353, veröffentlichten Entwicklung hervorgeht.

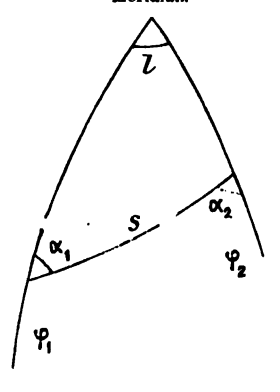
Die erste *Ausführung* dieses Gedankens haben wir in der „Gradmessung in Ostpreussen" von *Bessel*, welcher in der Vorrede S. V—VI seines Werkes über diese Gradmessung, jene Notiz von *Tobias Mayer* zitierend, die Anordnung der Messungen zu dem fraglichen Zwecke bespricht.

Es handelt sich hauptsächlich um Azimut-Übertragung mit möglichst wenig Zwischenpunkten, also mit möglichst langen Sichten, ganz ebenso wie die gewöhnlichen Polygonzüge des Feldmessers am besten mit *langen* Zielweiten angelegt werden. Daraus erklärt sich die Figur des *Bessel*schen Dreiecksnetzes, das wir in der Einleitung S. 14 mitgeteilt haben: Es gelang, zwischen den äussersten, etwa 200 Kilometer von einander entfernten Punkten Trunz und Memel, *zwei* von einander sichtbare Punkte, Galtgarben und Nidden, zu finden, von deren einem man Trunz, von dem anderen Memel sehen konnte. Man erhielt dadurch die Möglichkeit, die Richtungen der Meridiane von Trunz und Memel durch nur *zwei* Winkelmessungen mit einander zu vergleichen.

§ 107. Gradmessung schief zum Meridian.

Wenn man nach Fig. 1. eine geodätische Linie s (bzw. eine Dreieckskette) schief zum Meridian anlegt, am Anfangspunkt und am Endpunkt derselben die Azimute α_1, α_2 und die Breiten φ_1, φ_2 und endlich noch den Längenunterschied l astronomisch misst, so hat man alles das, was wir bisher als Breiten-Gradmessung, Längen-Gradmessung und Azimut-Übertragung getrennt behandelt haben, nun vereinigt; und da eine schiefe geodätische Linie mit Azimuten und Breiten an den Endpunkten nach § 106. hinreicht zur Bestimmung der Ellipsen-Dimensionen, so haben wir in der Vereinigung der 6 genannten Messungen bereits eine über das unmittelbare Bedürfnis hinaus gehende Bestimmung der Erddimensionen.

Fig. 1.
Gradmessung schief zum Meridian.



Man kann sich dieses auch so klar machen: Ein sphärisches Dreieck von der Form Fig. 1. ist seiner Form nach bestimmt durch 3 Stücke, z. B. durch φ_1, φ_2, l; um auch den Halbmesser zu bestimmen, auf welchem das sphärische Dreieck liegen soll, braucht man ein viertes Stück, s linear gemessen. Geht man über zu einem Ellipsoid, auf welchem das Dreieck Fig. 1. liegen soll, so tritt eine weitere Unbekannte auf in der Excentricität, so dass nun 5 Messungsstücke erforderlich werden. Wenn also in Fig. 1. im ganzen 6 Stücke gemessen sind, so ist

auch für das Ellipsoid noch *eine* Messung überschüssig, oder man hat es mit einer Ausgleichung zu thun.

Wie gewöhnlich wird diese Ausgleichung dadurch behandelt, dass man *Näherungswerte* der Erd-Dimensionen einführt, und durch Differentiieren Beziehungen herstellt zwischen Verbesserungen jener Näherungswerte einerseits und Änderungen der beobachteten Grössen andererseits.

Man überblickt auch sofort, dass man *mehrere* solcher Systeme, wie das in Fig. 1. dargestellte, zusammenfassen kann.

Unter allen Umständen braucht man also Beziehungen zwischen den gemessenen Grössen und den Ellipsoid-Dimensionen; diese Beziehungen entnehmen wir aus den sphäroidischen Mittelbreiten-Formeln von § 79., nämlich nach (21), (22), (23) S. 396:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= V^2 S \cos\alpha\,(1 + l^2 \ldots \;\; + b^2 \ldots) \\ l \cos\varphi &= S \sin\alpha\,(1 + l^2 \ldots \;\; + b^2 \ldots) \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= S \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi\,(1 + l^2 \ldots \;\; + b^2 \ldots) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dabei haben wir mit $l^2 \ldots$ und $b^2 \ldots$ die Korrektionsglieder zweiter Ordnung angedeutet, welche man immer ohne Schwierigkeit berechnen kann, welche auch durch die Ausgleichung nicht weiter berührt werden, insofern wir bereits gute Näherungswerte von η^2 bzw. e'^2 u. s. w. voraussetzen; und deswegen wollen wir diese Glieder im Folgenden ausser Betracht lassen (oder bereits in S inbegriffen denken). Setzt man für S seinen Wert aus (22) S. 389, so geben die vorstehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{s}{c} \cos\alpha\, V^3 \\ l &= \frac{s}{c} \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} V \quad , \quad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi} \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= \frac{s}{c} \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi\, V \quad , \quad \frac{dV}{de'^2} = \frac{1}{2} \frac{\cos^2\varphi}{V} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nun betrachten wir c und e'^2 als unabhängige Bestimmungsstücke des Erd-Ellipsoids, und bilden, dem System (1) entsprechend, folgende Differential-Formeln:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi_2 - d\varphi_1 &= -\frac{s}{c} \cos\alpha\, V^3 \frac{dc}{c} + \frac{3}{2} \frac{s}{c} V \cos\alpha \cos^2\varphi\, de'^2 \\ dl &= -\frac{s}{c} \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} V \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{s}{c} \frac{\sin\alpha}{V} \cos\varphi\, de'^2 \\ d\alpha_2 - d\alpha_1 &= -\frac{s}{c} \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi\, V \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \frac{s}{c} \frac{\sin\alpha \sin\varphi \cos\varphi}{V} de'^2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Hiebei ist die geodätische Linie s selbst als fehlerfrei angenommen, was unter Umständen eine brauchbare Annahme ist, insofern ein geodätischer Fehler ds hier von verhältnismässig geringerem Einfluss ist, als ein Fehler der astronomisch gemessenen Grössen, Breiten, Längen und Azimute. Z. B. bei der Ausgleichung von Breiten-Gradmessungen (§ 104.) wurde die Annahme fehlerfreier terestrischer Meridianbögen früher allgemein gemacht.

Wenn s nicht als fehlerfrei gelten soll, so hat man die Gleichungen (1) auch nach s zu differentiieren, was wir hier unterlassen, indem solche Differentiierung später bei den Lotablenkungen (§ 111.—112.) behandelt werden wird.

Indem wir auch nochmals darauf aufmerksam machen, dass die in (1) mit $l^2 \ldots$ und $b^2 \ldots$ angedeuteten Glieder bereits in den Gleichungen (3) in s inbegriffen sein

sollen, schreiben wir (3) in übersichtliche Form, indem die Coëfficienten kurz mit a, b u. s. w. bezeichnet und die Unbekannten $\frac{dc}{c}$ und de'^2 davon abgehoben werden:

$$\left.\begin{array}{ll} (d\varphi_2 - d\varphi_1) & = + a_1 \frac{dc}{c} + b_1\, de'^2 \\ dl & = + a_2 \frac{dc}{c} + b_2\, de'^2 \\ (d\alpha_2 - d\alpha_1) & = + a_3 \frac{dc}{c} + b_3\, de'^2 \end{array}\right\} \quad (4)$$

So lange nun nur *ein* solches System vorhanden ist, kann man die Differenzen $d\varphi_2 - d\varphi_1$ und $d\alpha_2 - d\alpha_1$ in dieser Form stehen lassen, diese (4) als drei Fehler-Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate weiter behandeln, wobei die *Gewichte* der $\varphi_2 - \varphi_1$, l und $\alpha_2 - \alpha_1$ durch die Art der Beobachtung bestimmt sein müssen; und dann bekommt man die zwei Unbekannten $\frac{dc}{c}$ und de'^2 aus den zwei zu (4) gehörigen Normal-Gleichungen.

Nun können aber *mehrere* Systeme von der Form (4) vorhanden sein, welche dann meist auch nicht von einander unabhängig sein werden. Wenn z. B. in dem astronomisch-geodätischen Netze Fig. 1. S. 198 alle Knotenpunkte astronomisch bestimmt und geodätisch verbunden sind, so giebt jede Verbindung ein Gleichungssystem von der Form (4), wobei jedoch $d\varphi_1$ eine Breiten-Verbesserung ist, welche auf *zwei* oder mehr Verbindungen Einfluss hat, wie auch $d\alpha_1$ als astronomischer Azimut-Messungsfehler nach allen von einem Punkt ausgehenden Richtungen wirkt, während wir von den Längen l annehmen wollen, dass sie unabhängig bestimmt seien. Man muss dann einzelne $d\varphi$ und $d\alpha$ selbst als Unbekannte einführen, ebenso wie mit den Anfangs-Verbesserungen der Breiten-Gradmessungen in § 104. geschehen ist.

Die Fehler-Gleichungen werden sich dann beispielshalber für zwei Systeme, die einen Punkt gemeinsam haben, so darstellen, wobei $\frac{dc}{c} = x$ und $de'^2 = y$ gesetzt ist:

$$\left.\begin{array}{llllll} d\varphi_1 & = d\varphi_1 & .. & .. & .. \\ d\varphi_2 & = d\varphi_1 & .. & + a_1 x & + b_1 y \\ dl_{1\cdot 2} & = .. & .. & + a_2 x & + b_2 y \\ d\alpha_1 & = .. & d\alpha_1 & .. & .. \\ d\alpha_2 & = .. & d\alpha_1 & + a_3 x & + b_3 y \\ d\varphi_3 & = d\varphi_1 & .. & + a_4 x & + b_4 y \\ dl_{1\cdot 3} & = .. & .. & + a_5 x & + b_5 y \\ d\alpha_3 & = .. & d\alpha_1 & + a_6 x & + b_6 y \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die Weiterbehandlung eines solchen Systems von Fehler-Gleichungen ist ebenso, wie wir bei dem besonderen Falle der Breiten-Gradmessungs-Ausgleichung in § 104. gezeigt haben.

Indessen kommt bei einer solchen Ausgleichung auch noch die Frage der Lotabweichung hinzu, zu welcher wir im nächsten Kapitel übergehen.

Kapitel XII.

Lotabweichungen.

§ 108. Allgemeines über Lotabweichung.

Anknüpfend an das, was wir schon in der Einleitung S. 11 über den Begriff der Lotabweichungen und des Geoids erwähnt haben, gehen wir nun zu näherer Betrachtung der Lotabweichungen über.

Wenn wir bei unseren Triangulierungen die unmittelbar gemessenen Grundlinien auf die Höhe des Meeres, bzw. auf Normal-Null, reduzieren (vgl. S. 75), so legen wir damit unseren Messungen und Berechnungen eine ideale Erdoberfläche zu Grunde, welche, in erster Näherung, mit der Oberfläche der Weltmeere zusammenfallend, und unter den Kontinenten stetig fortgesetzt, angenommen wird.

Wenn wir ferner bei unseren geodätischen und astronomischen Winkelmessungen die vertikale Axe der Instrumente durch die Wasserwage einstellen, und die so erhaltenen Messungen in üblicher Weise weiter rechnerisch behandeln, wie wir in der Theorie der geodätischen Dreiecke und der Coordinaten-Systeme (Kapitel VI.—X.) und namentlich in der Theorie der Erd-Dimensionsbestimmung (Kapitel XI.) gezeigt haben, so nehmen wir die durch die Wasserwage bestimmte Schwere-Richtung als geometrische Normale jener idealen Erdoberfläche an, und führen für diese Fläche ein Umdrehungs-Ellipsoid von gewissen Dimensionen in die Rechnung ein.

Nun haben aber schon die ersten zusammenfassenden Berechnungen der Gradmessungen ergeben, dass jene ideale Erdoberfläche nicht genau ein Ellipsoid ist, und man kann durch eine einfache physikalische Betrachtung zeigen, dass die ideale Erdoberfläche, welche wir den geodätischen Messungen und Berechnungen zu Grunde legen, kein Ellipsoid sein *kann*, weil die physische Erdoberfläche mit ihren Bergen und Thälern, Kontinenten und Meeren, selbst nicht ellipsoidisch ist.

Die Gesamtanziehung, welche ein Punkt (bzw. ein Massen-Element) an der Erdoberfläche erfährt, ist die Resultante der Anziehungen, welche alle einzelnen Massenteile des Erdkörpers auf den Punkt ausüben (in Verbindung mit der Einwirkung der Centrifugalkraft, welche wir im Folgenden nicht besonders zu berücksichtigen brauchen.)

Zwischen zwei Massenteilen m_1 und m_2, welche sich im Abstand r von einander befinden, besteht eine Anziehung, welche proportional $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ist.

Wenn eine einzelne Gebirgsmasse über die sonst regelmässige Erdoberfläche hervorragt, so lässt sich deren Einfluss auf die Lotrichtung eines benachbarten Punktes durch folgende Betrachtung finden. In Fig. 1. S. 525 ist die Erde kugelförmig angenommen, und über die kugelförmige Erdoberfläche soll eine Gebirgsmasse m hervorragen. Wenn es sich um Bestimmung der Lotrichtung in einem ausserhalb der kugelförmigen Erdoberfläche liegenden Punkte A handelt, so kann man die ganze Masse der Erde im Erdmittelpunkt konzentriert annehmen. (Der Beweis für die Zulässigkeit dieser Annahme lässt sich in elementarer Weise aus der Definition der Gravitation herleiten.)

Es sei nun M die Masse der Erde und m die Masse eines Gebirges, dann bekommt man für einen Punkt A, dessen horizontaler Abstand von dem Schwerpunkt

des Gebirges $= r$ ist, eine durch das Gebirge erzeugte Lotabweichung Θ, welche bestimmt ist durch die Gleichung:

$$tang\,\Theta = \frac{m}{r^2} : \frac{M}{R^2} = \frac{m R^2}{M r^2} \qquad (1)$$

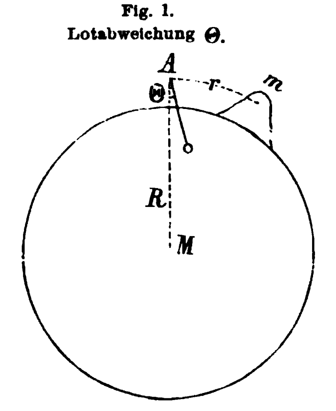


Fig. 1. Lotabweichung Θ.

Aus dem mittleren Erdhalbmesser R berechnet man das Volumen der Erde $= \frac{4}{3}\pi R^3$, und wenn $\varDelta$ die mittlere Dichte der Erde ist, so hat man die Masse der Erde:

$$M = \frac{4}{3}\varDelta \pi R^3 \qquad (2)$$

Das Volumen des Gebirges sei V, dessen Dichte sei δ, dann ist die Gebirgs-Masse:

$$m = V\delta \qquad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) findet man die Lotabweichung Θ, wenn man Θ als kleinen Winkel behandelt und zugleich für numerische Rechnung die Reduktions-Konstante ϱ zufügt:

$$\Theta = \frac{3}{4}\,\frac{\delta}{\varDelta}\,\frac{V}{R r^2}\,\frac{\varrho}{\pi} \qquad (4)$$

Nach *Listing* „Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers", aus den „Nachr. der Königl. Gesellsch. der Wissensch., Göttingen 1878", S. 61, ist die mittlere Dichte der Erde:

$$\varDelta = 5{,}63 \qquad (5)$$

der mittlere Erdhalbmesser ist in runder Zahl (nach S. 230):

$$R = 6\,370\,000^{m} \qquad (6)$$

Setzt man (5) und (6) in (4), so erhält man:

$$\Theta = 0{,}001373\,\frac{V\delta}{r^2} \text{ in Sekunden} \qquad (7)$$

dabei ist V das Volumen des Gebirges in Kubikmetern und r die Entfernung in Metern zu nehmen.

Wenn man nicht die Abweichung in der Richtung von r selbst haben will, sondern die Komponente nach einer anderen Richtung, so ist der nach (4) oder (7) berechnete Wert Θ auf die fragliche Richtung, z. B. den Meridian zu projizieren.

Als Beispiel nehmen wir die summarische Schätzung des Einflusses des nördlichen Schwarzwaldes mit dem Zentralpunkt Hornisgrinde auf die meridionale Lotrichtung in Durlach. Das Volumen dieses Gebirgsstocks stellt sich ungefähr dar als Produkt einer Fläche von $65\,000^{m}$ Breite und $43\,000^{m}$ Länge in einer Höhe von 800^{m}, die mittlere Entfernung von Durlach mag $r = 46\,000^{m}$ angenommen werden und die Dichte $\delta = 2{,}3$ (bunter Sandstein und Granit). Mit diesen Zahlen bekommt man aus (7):

$$v = 3{,}3'' \qquad (8)$$

Durch eine ähnliche Überschlagsrechnung bekommt man für den südlichen Schwarzwald 1,0″ und für die schwäbische Alb 1,6″ zusammen 5,9″.

Dieses ist nur eine summarische Schätzung.

Viel grössere Erhebungen und Vertiefungen der Geoid-Falten ergeben sich bei der Massenwirkung ganzer Kontinente gegenüber weniger dichten Oceanen. Im Durchschnitt für die sämtlichen Kontinente liegt innerhalb derselben die gestörte Meeresfläche (Geoid) nach der Berechnung um 700^m über der ursprünglichen Meeresfläche (*Helmert*, „Höhere Geodäsie, II., 1884“, S. 356).

Dieses ist aber ein rein theoretisches Ergebnis aus Massen-Wirkungsberechnungen, welches mit den Ergebnissen von Pendelbeobachtungen nicht zusammen stimmt. *Helmert* hat aus solchen Vergleichungen geschlossen (*Helmert*, „Höhere Geodäsie, II.“, S. 364—365), „dass die Wirkung der Kontinentalmassen mehr oder weniger kompensiert wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinentalmassen“. „Die Kontinente erscheinen hiermit als Schollen der Erdkruste, welche etwas geringere Dichtigkeit haben als letztere im allgemeinen“, und Pendelbeobachtungen zeigen, „dass in der Regel Gebirge durch unterirdische Massendefekte mehr oder weniger kompensiert sind“.

Hieraus folgt, dass die Höhe der Geoid-Falten eine weit geringere ist, als die Verteilung zwischen Wasser und Land nach der schematischen Darstellung von Fig. 2. S. 526 vermuten lässt.

Lotablenkung und Lotabweichung.

Durch die astronomisch-geodätischen Hilfsmittel, welche wir in § 110. — 112. kennen lernen werden, kann man immer nur *Differenzen* von Lotablenkungen, oder *relative* Lotablenkungen bestimmen, aus zwei Gründen: Erstens braucht man zu der Berechnung die Annahme eines *Vergleichs-Ellipsoids* (z. B. des *Bessel*schen Ellipsoides), und das ist eine innerhalb ziemlich weiter Grenzen willkürliche Annahme, und je nachdem man ein Ellipsoid zur Vergleichung annimmt, bekommt man verschiedene Lotablenkungen. Wüsste man, welches Ellipsoid sich als günstigstes, mittleres Ellipsoid der Erde am besten anpasst, so würde man die Lotablenkungen auf dieses beziehen; so lange dieses aber nicht der Fall ist, sind alle Lotablenkungs-Berechnungen nur vorläufig an irgend ein Vergleichs-Ellipsoid gebunden.

Ausserdem braucht man zu Lotablenkungs-Berechnungen irgend einen festen *Ausgangspunkt*, z. B. hat das geodätische Institut hiefür den Punkt Rauenberg bei Berlin (vgl. das Übersichtsnetz S 193). Nun geben alle Berechnungen nur die *Vergleichung* der Lotablenkungen anderer Punkte mit der Lotablenkung des Ausgangspunktes, welche selbst unbekannt, zuweilen schlechthin gleich Null gesetzt, oder dem negativen Mittel aller anderen Ablenkungen entsprechend angenommen werden kann.

Wenn man dem Ausgangspunkte der Berechnungen eine Lotablenkung Θ_0 gleich Null *oder* irgend einen anderen Wert willkürlich zuteilt, die Dimensionen des Vergleichs-Ellipsoids aber in beiden Fällen *gleich* annimmt, so hat man in diesen beiden Fällen ($\Theta_0 = 0$ oder $\Theta_0 = \Theta_1$) dasselbe Vergleichs-Ellipsoid an und für sich, aber in verschiedenen Lagen.

Aus diesen Gründen empfiehlt es sich, verschiedene Benennungen einzuführen; und indem wir dem Vorgange von *Helmert* („Höhere Geodäsie, 1880“, I. Band, S. 514) folgen, unterscheiden wir erstens: *absolute* „*Lotablenkungen*“, d. h. solche, welche sich auf das günstigste mittlere Vergleichs-Ellipsoid beziehen, dessen Mittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt, und dessen kleine Axe mit der Umdrehungsaxe der Erde zusammenfällt, und zweitens *relative* „*Lotabweichungen*“, welche sich auf ein vorläufig der Rechnung zu Grunde gelegtes Vergleichs-Ellipsoid und auf eine bestimmte Lage desselben beziehen.

§ 109. Bestimmung der Lotabweichung durch Vergleichung astronomischer und geodätischer Messungen.

Die Lotabweichung ist der Winkel, welchen die physikalische Lotlinie eines Punktes mit der entsprechenden Ellipsoid-Normalen bildet.

Wir wollen zuerst den einfachen Fall der Lotabweichung im Meridian behandeln, d. h. wir wollen annehmen, dass die Lotlinie zwar von der Ellipsoid-Normalen abweicht, aber doch in der Ebene des Ellipsoid-Meridians sich befindet (oder wir betrachten nur die meridionale Komponente ξ der Lotabweichung).

Fig. 1.
Lotabweichung ξ im Meridian.

Dieser Fall ist in Fig. 1. dargestellt. In einem Punkte J des Ellipsoids haben wir die Ellipsoid-Normale JZ mit der ellipsoidischen oder geodätischen Breite φ, und die Lotlinie JZ' mit der astronomischen Breite φ'. Die Lotlinie JZ' ist rechtwinklig auf der Geoidfläche, welche durch die punktierte Linie GJG' angedeutet ist. Der Winkel ξ zwischen JZ und JZ' ist die Lotabweichung im Meridian, und wir wollen ξ positiv zählen, wenn, wie in Fig. 1. angenommen ist, die Lotlinie JZ' gegen den Nordpol hin von JZ abweicht. Man sagt in diesem Falle auch, die *Zenit-Abweichung* ξ ist nördlich oder die *Lot-Abweichung* ξ ist südlich, und wir haben hiefür nach Fig. 1.:

$$\xi = \varphi' - \varphi \tag{1}$$

Die Lotabweichung im allgemeinen, d. h. nicht im Meridian, kann in zweierlei Weise bestimmt werden: Erstens giebt man die absolute Lotabweichung Θ und ihr Azimut ε an, oder zweitens bestimmt man die beiden Komponenten ξ und η der Lotabweichung nach Norden und Osten, dieselben sind:

$$\xi = \Theta \cos \varepsilon \qquad \eta = \Theta \sin \varepsilon \tag{2}$$

Diese zwei Gleichungen, welche nach dem Vorhergehenden wohl unmittelbar zu verstehen sind, werden wir auch wieder bestätigt finden durch die nachfolgende Fig. 2. S. 530, zu welcher wir nun übergehen.

In Fig. 2. S. 530 sei Z das geodätische Zenit und Z' das astronomische Zenit. P ist der Pol, welcher zu beiden Zeniten in Beziehung steht. J ist ein Punkt der Erdoberfläche, auf welchem geodätische und astronomische Beobachtungen gemacht werden. Durch astronomische Beobachtungen soll die Polhöhe φ', die geographische Länge λ' und ein Azimut α' bestimmt werden, und es handelt sich um die Auffindung von Beziehungen zwischen diesen Grössen φ', λ', α' und den entsprechenden geodätischen Werten φ, λ, α, welche man erhalten haben würde, wenn das Zenit nicht in Z' sondern in Z befindlich wäre.

Nachdem diese Verhältnisse erkannt sind, wird es nicht mehr schwer sein, die Wirkung der Lotabweichung in Breite, Länge und im Azimut anzugeben.

Viel grössere Erhebungen und Vertiefungen der Geoid-Falten ergeben sich bei der Massenwirkung ganzer Kontinente gegenüber weniger dichten Oceanen. Im Durchschnitt für die sämtlichen Kontinente liegt innerhalb derselben die gestörte Meeresfläche (Geoid) nach der Berechnung um 700^m über der ursprünglichen Meeresfläche (*Helmert*, „Höhere Geodäsie, II., 1884", S. 356).

Dieses ist aber ein rein theoretisches Ergebnis aus Massen-Wirkungsberechnungen, welches mit den Ergebnissen von Pendelbeobachtungen nicht zusammen stimmt. *Helmert* hat aus solchen Vergleichungen geschlossen (*Helmert*, „Höhere Geodäsie, II.", S. 364—365), „dass die Wirkung der Kontinentalmassen mehr oder weniger kompensiert wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinentalmassen". „Die Kontinente erscheinen hiermit als Schollen der Erdkruste, welche etwas geringere Dichtigkeit haben als letztere im allgemeinen", und Pendelbeobachtungen zeigen, „dass in der Regel Gebirge durch unterirdische Massendefekte mehr oder weniger kompensiert sind".

Hieraus folgt, dass die Höhe der Geoid-Falten eine weit geringere ist, als die Verteilung zwischen Wasser und Land nach der schematischen Darstellung von Fig. 2. S. 526 vermuten lässt.

Lotablenkung und Lotabweichung.

Durch die astronomisch-geodätischen Hilfsmittel, welche wir in § 110.—112. kennen lernen werden, kann man immer nur *Differenzen* von Lotablenkungen, oder *relative* Lotablenkungen bestimmen, aus zwei Gründen: Erstens braucht man zu der Berechnung die Annahme eines *Vergleichs-Ellipsoids* (z. B. des *Bessel*schen Ellipsoides), und das ist eine innerhalb ziemlich weiter Grenzen willkürliche Annahme, und je nachdem man ein Ellipsoid zur Vergleichung annimmt, bekommt man verschiedene Lotablenkungen. Wüsste man, welches Ellipsoid sich als günstigstes, mittleres Ellipsoid der Erde am besten anpasst, so würde man die Lotablenkungen auf dieses beziehen; so lange dieses aber nicht der Fall ist, sind alle Lotablenkungs-Berechnungen nur vorläufig an irgend ein Vergleichs-Ellipsoid gebunden.

Ausserdem braucht man zu Lotablenkungs-Berechnungen irgend einen festen *Ausgangspunkt*, z. B. hat das geodätische Institut hiefür den Punkt Rauenberg bei Berlin (vgl. das Übersichtsnetz S 193). Nun geben alle Berechnungen nur die *Vergleichung* der Lotablenkungen anderer Punkte mit der Lotablenkung des Ausgangspunktes, welche selbst unbekannt, zuweilen schlechthin gleich Null gesetzt, oder dem negativen Mittel aller anderen Ablenkungen entsprechend angenommen werden kann.

Wenn man dem Ausgangspunkte der Berechnungen eine Lotablenkung Θ_0 gleich Null *oder* irgend einen anderen Wert willkürlich zuteilt, die Dimensionen des Vergleichs-Ellipsoids aber in beiden Fällen *gleich* annimmt, so hat man in diesen beiden Fällen ($\Theta_0 = 0$ oder $\Theta_0 = \Theta_1$) dasselbe Vergleichs-Ellipsoid an und für sich, aber in verschiedenen Lagen.

Aus diesen Gründen empfiehlt es sich, verschiedene Benennungen einzuführen; und indem wir dem Vorgange von *Helmert* („Höhere Geodäsie, 1880", I. Band, S. 514) folgen, unterscheiden wir erstens: *absolute „Lotablenkungen"*, d. h. solche, welche sich auf das günstigste mittlere Vergleichs-Ellipsoid beziehen, dessen Mittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt, und dessen kleine Axe mit der Umdrehungsaxe der Erde zusammenfällt, und zweitens *relative „Lotabweichungen"*, welche sich auf ein vorläufig der Rechnung zu Grunde gelegtes Vergleichs-Ellipsoid und auf eine bestimmte Lage desselben beziehen.

§ 109. Bestimmung der Lotabweichung durch Vergleichung astronomischer und geodätischer Messungen.

Die Lotabweichung ist der Winkel, welchen die physikalische Lotlinie eines Punktes mit der entsprechenden Ellipsoid-Normalen bildet.

Wir wollen zuerst den einfachen Fall der Lotabweichung im Meridian behandeln, d. h. wir wollen annehmen, dass die Lotlinie zwar von der Ellipsoid-Normalen abweicht, aber doch in der Ebene des Ellipsoid-Meridians sich befindet (oder wir betrachten nur die meridionale Komponente ξ der Lotabweichung).

Fig. 1.
Lotabweichung ξ im Meridian.

Dieser Fall ist in Fig. 1. dargestellt. In einem Punkte J des Ellipsoids haben wir die Ellipsoid-Normale JZ mit der ellipsoidischen oder geodätischen Breite φ, und die Lotlinie JZ' mit der astronomischen Breite φ'. Die Lotlinie JZ' ist rechtwinklig auf der Geoidfläche, welche durch die punktierte Linie GJG' angedeutet ist. Der Winkel ξ zwischen JZ und JZ' ist die Lotabweichung im Meridian, und wir wollen ξ positiv zählen, wenn, wie in Fig. 1. angenommen ist, die Lotlinie JZ' gegen den Nordpol hin von JZ abweicht. Man sagt in diesem Falle auch, die *Zenit-Abweichung* ξ ist nördlich oder die *Lot-Abweichung* ξ ist südlich, und wir haben hiefür nach Fig. 1.:

$$\xi = \varphi' - \varphi \qquad (1)$$

Die Lotabweichung im allgemeinen, d. h. nicht im Meridian, kann in zweierlei Weise bestimmt werden: Erstens giebt man die absolute Lotabweichung Θ und ihr Azimut ε an, oder zweitens bestimmt man die beiden Komponenten ξ und η der Lotabweichung nach Norden und Osten, dieselben sind:

$$\xi = \Theta \cos \varepsilon \qquad \eta = \Theta \sin \varepsilon \qquad (2)$$

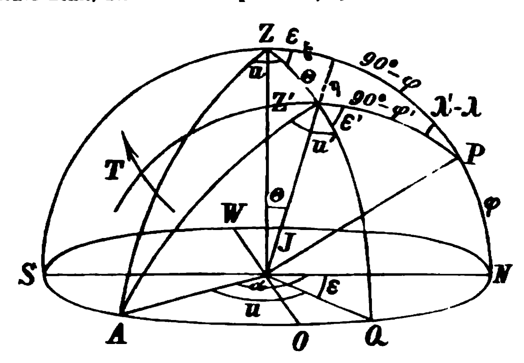
Diese zwei Gleichungen, welche nach dem Vorhergehenden wohl unmittelbar zu verstehen sind, werden wir auch wieder bestätigt finden durch die nachfolgende Fig. 2. S. 530, zu welcher wir nun übergehen.

In Fig. 2. S. 530 sei Z das geodätische Zenit und Z' das astronomische Zenit. P ist der Pol, welcher zu beiden Zeniten in Beziehung steht. J ist ein Punkt der Erdoberfläche, auf welchem geodätische und astronomische Beobachtungen gemacht werden. Durch astronomische Beobachtungen soll die Polhöhe φ', die geographische Länge λ' und ein Azimut α' bestimmt werden, und es handelt sich um die Auffindung von Beziehungen zwischen diesen Grössen φ', λ', α' und den entsprechenden geodätischen Werten φ, λ, α, welche man erhalten haben würde, wenn das Zenit nicht in Z' sondern in Z befindlich wäre.

Nachdem diese Verhältnisse erkannt sind, wird es nicht mehr schwer sein, die Wirkung der Lotabweichung in Breite, Länge und im Azimut anzugeben.

Fig. 2.

Z = Geodätisches Zenit, dem Ellipsoid entsprechend, φ = geodätische (ellipsoidische) Breite.
Z' = Astronomisches Zenit, dem Geoid entsprechend, φ' = astronomische Breite (Polhöhe).



I. Lotabweichung in Breite.

Die Lotabweichung in Breite, oder die meridionale Komponente ξ der Lotabweichung, ist am leichtesten zu bestimmen.

Das Komplement der Polhöhe ist immer gleich dem Bogen zwischen dem Pol und dem Zenit, also in Fig. 2. $ZP = 90° - \varphi$, $Z'P = 90° - \varphi'$, wie auch bereits in die Figur eingeschrieben ist.

Da nun das Dreieck PZZ' bei Z' nur die kleine Ordinate η hat, kann man die Projektion ξ der Seite $ZZ' = \varepsilon$ hinreichend genau als Differenz der beiden Seiten PZ und PZ' annehmen, also:

$$\xi = (90° - \varphi) - (90° - \varphi') \qquad \text{oder}$$

$$\xi = \varphi' - \varphi \qquad (3)$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, die wir schon bei (1) unmittelbar gefunden haben.

II. Lotabweichung in Länge.

Bei Vergleichung der geographischen Längen hat man zu beachten, dass alle astronomische Längen-Bestimmung auf Ortszeit-Bestimmung beruht. Wenn λ' die astronomisch bestimmte geographische Länge des Punktes J ist, bezogen auf einen westlich von J liegenden Anfangspunkt J_0 (z. B. Ferro, Paris, Greenwich), so heisst das so viel als: Ein Gestirn T, welches in J_0 zur Zeit t_0 kulminiert, kulminiert in J zur Zeit:

$$t' = t_0 - \lambda' \qquad (4)$$

Diese Kulmination findet statt beim Durchgang des Gestirns durch den Deklinationskreis PZ'; dagegen der Durchgang durch den Deklinationskreis PZ, welcher dem geodätischen Zenit angehört, erfolgt später, und zwar um den Winkelbetrag $\sphericalangle ZPZ'$; oder die geodätische Kulmination erfolgt zur Zeit:

$$t = t_0 - \lambda' + \sphericalangle ZPZ' \qquad (4a)$$

Wenn nun λ die geographische Länge des Beobachtungspunktes J ist, welche dem geodätischen Zenit Z entspricht, so hat man entsprechend (4):

$$t = t_0 - \lambda \qquad (5)$$

Aus (4a) und (5) folgt:

$$\angle ZPZ' = \lambda' - \lambda \tag{6}$$

wie auch bereits in Fig. 2. eingeschrieben ist.

Um $\lambda' - \lambda$ in η auszudrücken, braucht man nur wieder das schmale langgestreckte Dreieck $PZ'Z$ zu betrachten, oder das schmale rechtwinklige Dreieck, welches durch Projektion von Z' auf die Seite PZ entsteht. Dadurch erhält man:

$$\sin(\lambda' - \lambda) = \frac{\sin\eta}{\sin(90° - \varphi')} = \frac{\sin\eta}{\cos\varphi'}$$

Da hier $\lambda' - \lambda$ und η beide klein sind, und auch φ' sich von φ nur wenig unterscheidet, kann man aus der vorstehenden Gleichung bilden:

$$\lambda' - \lambda = \eta \sec\varphi \tag{7}$$

III. Lotabweichung im Azimut.

Wenn es sich um astronomische Azimutmessung handelt, so hat man den Horizontalwinkel zu messen zwischen der Richtung nach dem Pol P und der Richtung nach einem geodätischen Zielpunkt, der in Fig. 2. im Horizonte liegend als Punkt A angenommen sei. Die astronomische Azimutmessung wird daher den Winkel am astronomischen Zenit Z' geben, welcher in Fig. 2. als eine Summe $\varepsilon' + u'$ bezeichnet ist. Dabei war die vertikale Theodolit-Axe nach dem astronomischen Zenit Z' oder nach der physikalischen Lotlinie JZ' gerichtet, und das Messungs-Ergebnis $\varepsilon' + u'$ ist von der Lotabweichung beeinflusst.

Wenn wir andererseits dasjenige Azimut kennen lernen wollen, welches man ohne Lotabweichung erhalten haben würde, d. h. das geodätische Azimut, so muss man die vertikale Theodolit-Axe nach dem geodätischen Zenit JZ gerichtet denken, und damit erhält man das Azimut, welches bei Z als eine Summe $\varepsilon + u$, und in der Horizontal-Ebene bei J als ein Winkel $\alpha = \varepsilon + u$ dargestellt ist. Zur Vergleichung haben wir also nun:

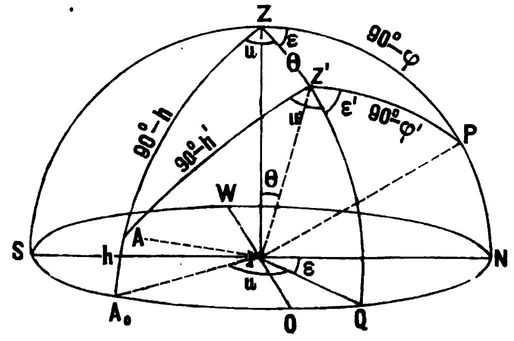
Geodätisches Azimut	$\alpha = \varepsilon + u$	(8)
Astronomisches Azimut	$\alpha' = \varepsilon' + u'$	(9)
Differenz	$\alpha - \alpha' = (\varepsilon - \varepsilon') + (u - u')$	(10)

Von diesen beiden Teilen $\varepsilon - \varepsilon'$ und $u - u'$ ist der zweite Teil $u - u'$ immer sehr klein und meist zu vernachlässigen, wenn der geodätische Zielpunkt A im Horizonte selbst liegt, oder wenigstens nur einen kleinen Höhen- oder Tiefenwinkel hat.

Die Differenz $u - u'$ ist zu vergleichen dem Fehler einer Horizontal-Winkelmessung, der dadurch entsteht, dass die Theodolitaxe nicht genau vertikal, sondern etwas schief gestellt wird.

Die hiefür gültige Fehler-Formel haben wir schon früher (Band II. S. 164) entwickelt, im wesentlichen ebenso, wie wir nun die Entwicklung machen, im Anschluss an Fig. 3., welche sich von Fig. 2. nur dadurch unterscheidet, dass der geo-

Fig. 3.
Z = Geodätisches Zenit.
Z' = Astronomisches Zenit.



dätische Zielpunkt A nicht mehr im Horizont, sondern mit einem Höhenwinkel h angenommen wird.

Indem wir nun eine Cotang-Gleichung der Gruppe (9) S. 195 auf das sphärische Dreieck $ZZ'A$ anwenden, erhalten wir:

$$cotg\,(90° - h)\,sin\,\Theta = cos\,\Theta\,cos\,u + sin\,u\,cotg\,(180° - u') \qquad (11)$$

Indem man Θ als klein behandelt, erhält man:

$$\Theta\,tang\,h = cos\,u - sin\,u\,cotg\,u'$$

$$= \frac{cos\,u\,sin\,u' - sin\,u\,cos\,u'}{sin\,u} = \frac{sin\,(u' - u)}{sin\,u'}$$

$$u' - u = \Theta\,sin\,u\,tang\,h \qquad (12)$$

Wenn der Höhenwinkel h *klein* ist, wie es bei geodätischen Zielpunkten gewöhnlich der Fall ist, so ist $\Theta\,tang\,h$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung, welche wir vernachlässigen, oder besonderer Berücksichtigung vorbehalten.

Es bleibt also noch der erste Teil der Formel (10), d. h. $\varepsilon - \varepsilon'$ zu untersuchen, und hiezu machen wir eine ganz ähnliche Entwicklung wie soeben (11)—(12), nochmals in Bezug auf das sphärische Dreieck $ZZ'P$.

Wir nehmen also wieder eine Cotang-Gleichung der Gruppe (9) S. 195, und finden durch deren Anwendung auf das Dreieck $ZZ'P$:

$$cotg\,(90° - \varphi)\,sin\,\Theta = cos\,\Theta\,cos\,\varepsilon + sin\,\varepsilon\,cotg\,(180° - \varepsilon')$$

$$\Theta\,tang\,\varphi = cos\,\varepsilon - sin\,\varepsilon\,cotg\,\varepsilon'$$

$$= \frac{cos\,\varepsilon\,sin\,\varepsilon' - sin\,\varepsilon\,cos\,\varepsilon'}{sin\,\varepsilon'} = \frac{sin\,(\varepsilon' - \varepsilon)}{sin\,\varepsilon'}$$

$$\varepsilon' - \varepsilon = \Theta\,sin\,\varepsilon\,tang\,\varphi \qquad (13)$$

Statt der absoluten Lotabweichung Θ kann man hier auch die Quer-Komponente $\eta = \Theta\,sin\,\varepsilon$ einführen, und indem wir mit der bei (12) besprochenen Vernachlässigung wieder die Azimut-Differenz $\alpha - \alpha'$ selbst betrachten, haben wir:

$$\alpha' - \alpha = \eta\,tang\,\varphi \qquad (14)$$

Zusammenfassung der Grundformeln für Lotabweichung.

Bezeichnungen.

	Geodät.	Astron.	
Geographische Breite oder Polhöhe	φ	φ'	(15)
Geographische Länge von Westen nach Osten positiv gezählt	λ	λ'	
Azimut von Norden nach Osten positiv gezählt	α	α'	
Absolute Lotablenkung oder Zenitablenkung $= \Theta$			
Südliche Lotablenkung oder nördliche Zenitablenkung $= \xi$			
Westliche Lotablenkung oder östliche Zenitablenkung $= \eta$			

Formeln.

$$\xi = \varphi' - \varphi \qquad (16)$$

$$\eta = (\lambda' - \lambda)\,cos\,\varphi \qquad (17)$$

$$\eta = (\alpha' - \alpha)\,cotg\,\varphi \qquad (18)$$

Die beiden Gleichungen (17) und (18) geben die Kontroll-Gleichung:

$$\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda)\,sin\,\varphi \qquad (19)$$

Diese Gleichung wurde zuerst von *Laplace* gefunden und wird nach ihm „*Laplace*sche *Gleichung*" genannt.

Zur Bestimmung der Lotabweichung ξ im Meridian giebt es nur *ein* Mittel, nämlich nach (16) die Vergleichung astronomischer und geodätischer Breiten. Dagegen für die Querabweichung η kann man nach (17) und (18) die Längen-Vergleichung $\lambda' - \lambda$ *oder* die Azimut-Vergleichung $\alpha' - \alpha$ benützen, hat man beides, so ergiebt sich eine sehr erwünschte Probe, entsprechend der *Laplace*schen Gleichung (19).

In Bezug auf die Genauigkeit, welche in geodätischer Beziehung zur Bestimmung der Lotabweichung erforderlich ist, sind die beiden Gleichungen (16) und (17) wesentlich verschieden von der dritten Gleichung (18), denn geodätische Breiten φ und Längen λ bekommt man aus einer gewöhnlichen Triangulierung bereits mit grosser Genauigkeit, insofern ein geodätischer Bogen von 30 Metern nur einen Breiten-Unterschied $\Delta\varphi = 1''$ bringt, und $\Delta\lambda$ etwa $= 1{,}5''$ in mittleren Breiten, dagegen die geodätische *Azimut-Übertragung* auf etwa 1″ genau, ist viel schwieriger zu erlangen. Die geodätischen Winkel-Genauigkeiten zur Übertragung von Breiten und Längen einerseits und zur Übertragung von Azimuten andererseits, verhalten sich ungefähr ebenso, wie die Länge des Erdhalbmessers zur Länge einer Triangulierungskette.

Einfluss der Lotabweichung auf die Winkelmessung.

Im Anschluss an die Fig. 3. S. 531, welche uns die Grundformeln für die Lotabweichung in Breite, Länge und Azimut geliefert hat, können wir sogleich auch eine Betrachtung anstellen über die Änderungen, welche die Winkelmessung mit dem Theodolit durch die Lotabweichung erleidet.

Da die vertikale Theodolitaxe durch die Wasserwage nach der physikalischen Lotlinie eingestellt wird, steht sie im Falle von Lotabweichung schief zur Ellipsoid-Normalen, und dadurch entstehen genau dieselben Änderungen, wie wenn die Vertikalaxe infolge falscher mechanischer Behandlung schief stünde (vgl. Vertikal-Axenfehler oder Aufstellungsfehler, Band II., S. 164).

Den Einfluss einer solchen Schiefstellung haben wir auch schon im vorstehenden bei (12) bestimmt, nämlich:

$$u' - u = \Theta \sin u \tan h \qquad (20)$$

Wir haben auch bereits erkannt, dass dieser Einfluss meist wenig ausmachen wird, weil bei ausgedehnten Triangulierungen auch die Höhen- oder Tiefenwinkel h meist klein zu sein pflegen. Indessen im Gebirge, z. B. in den Alpenländern, kann der Einfluss doch merklich werden; nehmen wir z. B. $\Theta = 10''$ und $h = 1^\circ$, so wird $u' - u = 0{,}018''$, was bereits an die Grenze der Messungsfehler heranreicht. Da aber in der Nähe von Hochgebirgen die Lotabweichungen bis zu 60″ anwachsen können, und auch die Höhen- oder Tiefenwinkel über 1° werden können, so giebt es Fälle, in welchen $u' - u$ wohl 1″ und mehr werden kann, so dass Vernachlässigung nicht mehr am Platze wäre.

Was die *Höhen*winkel betrifft, so ist sofort klar, dass ein Höhenwinkel im Azimut einer Lotabweichung, um den Betrag dieser Lotabweichung Θ selbst geändert wird, und dass in einem andern Azimut eine Komponente von Θ wirksam wird. Dieses lässt sich in einer Gleichung ausdrücken, denn das sphärische Dreieck AZZ' Fig. 3. S. 531 giebt:

$$\sin h = \sin h' \cos \Theta + \cos h' \sin \Theta \cos u$$

also für kleines Θ:

$$\sin h = \sin h' + \Theta \cos u \cos h'$$

$$\sin h = \sin (h' + (h - h')) = \sin h' + (h - h') \cos h'$$

$$h - h' = \Theta \cos u \qquad (21)$$

Dieses ist die vorhin besprochene Komponente, nämlich $h - h' = \pm \Theta$ für $u = 0°$ oder $180°$ und $h - h' = 0$ für $u = 90°$ oder $270°$ u. s. w.

Wenn die Refraktions-Gesetze genauer bekannt wären, so könnte man nach dem Gesetze dieser Gleichung die Lotabweichungen durch Höhenwinkel bestimmen.

§ 110. Bestimmung der Lotabweichung aus rechtwinkligen geodätischen Coordinaten.

Als Beispiel für Lotabweichungs-Bestimmung nehmen wir einige astronomische Messungen, welche etwa in der Zeit von 1871—1877 in Baden gemacht wurden. Die Beobachtungspunkte dieser astronomischen Messungen haben wir an die badische Landes-Triangulierung angeschlossen (vgl. S. 13 und S. 26), und damit erhielten wir verschiedenes Material zur Berechnung von Lotabweichungen. Diesen Berechnungen sei jedoch hier keine andere Bedeutung als die formeller Rechen-Beispiele beigelegt, und deshalb unterlassen wir auch, die Zitate für die astronomischen Messungen beizugeben (welche in unserer vorigen Auflage, Karlsruhe 1878, S. 448—449 angegeben wurden).

Aus der badischen Triangulierung haben wir die nachstehenden rechtwinkligen (*Soldner*schen) Coordinaten teils unmittelbar, teils durch Anschluss-Messungen erhalten, wozu nur noch zu bemerken ist, dass die amtlichen badischen Coordinaten von Mannheim nach Süden $+x$ und nach Westen $+y$ zählen, während wir hier dem allgemeineren Gebrauche entsprechend die Coordinaten mit *umgestellten Vorzeichen* geben, so dass $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten zählt.

I. Rechtwinklige Soldner sche Coordinaten.

Punkt	Ordinate y	Abscisse x
Mannheim, Sternwarte, Coordinaten-Nullpunkt	0,00ᵐ	0,00ᵐ
Mannheim, Sternwarte, Pfeiler	— 3,42	+ 1,40
Karlsruhe, Polytechnikum, Pfeiler	— 3 508,39	— 53 046,43
Durlach, Warte, Turmmitte	+ 1 890,26	— 54 452,72
Durlach, Warte, Pfeiler	+ 1 889,32	— 54 450,66
Hornisgrinde (Turmmitte) Pfeiler	— 18 992,56	— 97 916,85
Strassburg, Münsterturm	— 52 332,24	— 100 372,70
Strassburg, Citadelle, Pfeiler	— 50 948,84	— 100 910,13
Tübingen, Sternwarte	+ 43 667,99	— 107,338,01
Feldberg, Turmmitte(bad. Triangulierungspunkt)	— 34 075,05	— 179 239,32
Feldberg, Pfeiler	— 34 068,35	— 179 263,21

Die gegenseitige Lage der wichtigsten dieser Punkte ist in nachstehender Fig. 1. dargestellt.

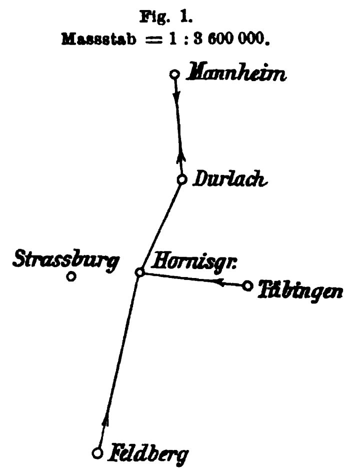


Fig. 1.
Massstab = 1 : 3 600 000.

Die Art und Weise der Berechnung dieser Coordinaten ist durch unser Beispiel S. 268 genügend erklärt. Die Orientierung erfolgte durch das astronomisch gemessene Azimut Mannheim-Speyer ((1) S. 267), welches auch sehr nahe übereinstimmt mit dem Azimut Mannheim-Durlach, das wir nachher unter (3) angeben werden.

Indem wir weiter auch die astronomisch gemessene Breite $\varphi_0 = 49° \; 29' \; 10{,}82''$ für den Coordinaten-Nullpunkt benützen, haben wir aus den soeben unter I. angegebenen rechtwinkligen Coordinaten die geographischen Coordinaten berechnet, nach den Formeln von § 64. (Rechenschema S. 334), unter Zugrundlegung der Hilfstafeln unseres Anhangs, d. h. mit den *Bessel*schen Erddimensionen. Folgendes sind die Ergebnisse:

II. Geodätisch-Geographische Coordinaten.

Punkt	Breite φ	Länge λ	Meridian-konvergenz γ
Mannheim, Coordinaten-Nullpunkt	49° 29′ 10,82″	0° 0′ 0,00″	0° 0′ 0,00″
Mannheim, Pfeiler	49° 29′ 10,87″	— 0° 0′ 0,17″	. .
Karlsruhe, Polytechnikum, Pfeiler	49° 0′ 33,49″	— 0° 2′ 52,66″	— 0° 2′ 10,33″
Durlach, Warte, Pfeiler	48° 59′ 48,05″	+ 0° 1′ 32,96″	+ 0° 1′ 10,15″
Hornisgrinde, Pfeiler	48° 36′ 19,78″	— 0° 15′ 27,24″	— 0° 11′ 35,59″
Strassburg, Münsterturm . . .	48° 34′ 53,42″	— 0° 42′ 33,73″	— 0° 31′ 55,09″
Strassburg, Citadelle, Pfeiler . .	48° 34′ 36,43″	— 0° 41′ 25,99″	— 0° 31′ 4,14″
Tübingen, Sternwarte	48° 31′ 10,30″	+ 0° 35′ 28,32″	+ 0° 26′ 34,52″
Feldberg, Pfeiler	47° 52′ 23,62″	— 0° 27′ 19,69″	— 0° 20′ 16,11″

Hiezu haben wir folgende Ergebnisse astronomischer Messungen:

III. Astronomische Messungen.

Mannheim, Sternwarte, Pfeiler, Polhöhe . . . . . . = 49° 29′ 10,87″ (1)

Hieraus ist durch östliche Reduktion abgeleitet:

Mannheim, Coordinaten-Nullpunkt . . . . $\varphi_0 = 49° \; 29' \; 10{,}82''$ (2)

Dieses ist der schon oben erwähnte Wert, mit dem die geodätisch-geographischen Coordinaten II. berechnet sind. In Mannheim ist auch gemessen:

Azimut Mannheim, Pfeiler—Durlach, Pfeiler . . . . . = 178° 0′ 33,31″ (3)

Dieses Azimut betrachten wir als Orientierung für die *Soldner*schen Coordinaten I. (In Wirklichkeit war die Orientierung um 0,22″ anders.)

Durlach, Pfeiler, Polhöhe . . . . = 48° 59′ 57,00″ (4)
Azimut Durlach, Pfeiler—Mannheim, Pfeiler . . . . . = 358° 1′ 35,20″ (5)

Strassburg, Münsterturm, Polhöhe . . . . = 48° 34′ 55,94″ (6)

Der Längenunterschied zwischen Mannheim, Pfeiler und Strassburg, Pfeiler ist astronomisch $= 0^h\ 2^m\ 45{,}792^s = 0°\ 41'\ 26{,}88''$ bestimmt; indem wir die kleine Reduktion $0{,}011^s = 0{,}17''$ von Mannheim, Pfeiler auf Mannheim, Coordinaten-Nullpunkt anbringen, haben wir, da Strassburg westlich von Mannheim liegt:

Mannheim, Nullpunkt—Strassburg, Pfeiler . . . . . $\lambda' = -0°\ 41'\ 27{,}05''$ (7)

Tübingen, Sternwarte, Polhöhe . . . . = 48° 31′ 12,40″ (8)
Azimut Tübingen, Hornisgrinde . . . . = 278° 59′ 40,68″ (9)

(Dieses ist derselbe Wert wie α' in (3) S. 387.)

Feldberg, Pfeiler, Polhöhe . . . . = 47° 52′ 24,43″ (10)
Azimut Feldberg, Pfeiler—Hornisgrinde, Pfeiler . . . . = 10° 9′ 46,02″ (11)

Nun wollen wir diese Angaben zur Berechnung von Lotabweichungen benützen. Wir nehmen zuerst die Breiten geodätisch aus II. und astronomisch aus (2), (4), (6), (8), (10) und haben damit folgende Vergleichung:

Punkt	Geodätisch φ	Astronomisch φ'	Lotabweichung $\xi = \varphi' - \varphi$	
Mannheim, Nullpunkt .	49° 29′ 10,82″	49° 29′ 10,82″	(± 0,00″)	(12)
Durlach, Pfeiler	48° 59′ 48,05″	48° 59′ 57,00″	+ 8,95″	
Strassburg, Münsterturm	48° 34′ 53,42″	48° 34′ 55,94″	+ 2,52″	
Tübingen, Sternwarte .	48° 31′ 10,30″	48° 31′ 12,40″	+ 2,10″	
Feldberg, Pfeiler	47° 52′ 23,62″	47° 52′ 24,43″	+ 0,79″	

Diese meridionalen Lotabweichungen, relativ gegen Mannheim, scheinen sich durch die Massenwirkung des Schwarzwaldes erklären zu lassen.

Zur Bestimmung der *Quer*-Abweichung durch astronomisch-telegraphische Längen-Bestimmung haben wir unter dem oben mitgeteilten Material nur *einen* Fall, nämlich Mannheim-Strassburg, Citadelle, Pfeiler. Dieser Längenunterschied ist nach Tabelle II.:

Mannheim–Strassburg, geodätisch $\lambda = -0°\ 41'\ 25{,}99''$
desgl. nach (7) astronomisch $\lambda' = -0°\ 41'\ 27{,}05''$

Differenz $\lambda' - \lambda = -1{,}06''$

Hiefür hat man nach der Grundformel (17) § 109. S. 532 die Querabweichung:

$$\eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi = -1{,}06'' \cos 48°\ 35' = -0{,}70'' \qquad (13)$$

Nach der Vorzeichen-Bestimmung von (15) § 109. S. 532 ist dieses eine westliche Zenitabweichung oder östliche Lotabweichung.

Übergehend zu der Bestimmung der Querabweichung durch Azimute, haben wir in unserem Falle drei Werte, welche zu dem angegebenen Zwecke benützt werden können.

Wir wollen die Einzelheiten an dem Beispiele von Durlach zeigen. Wir nehmen aus der Tabelle I.:

Mannheim, Pfeiler	$y' = -\ \ 3{,}42^m$	$x' = +\ \ 1{,}40^m$
Durlach, Pfeiler	$y = +1889{,}32^m$	$x = -54450{,}66^m$
	$y' - y = -1892{,}74$	$x' - x = +54452{,}06$

Damit rechnet man weiter nach § 48. (15) — (20) S. 273—274:

Ebener Richtungswinkel	$\alpha_0 = 358°\ 0'\ 33{,}172''$
	$d\alpha = +0{,}174''$
Sphärischer Richtungswinkel	$(\alpha) = 358°\ 0'\ 33{,}346''$
Hiezu Meridian-Konvergenz aus d. Tabelle II.	$\gamma = +0°\ 1'\ 10{,}15''$
Also Azimut Durlach-Mannheim geodätisch	$\alpha = 358°\ 1'\ 43{,}50''$
Zur Vergleichung von (5) astronomisch	$\alpha' = 358°\ 1'\ 35{,}20''$
Differenz	$\alpha' - \alpha = -8{,}30''$ (14)

Daraus findet man nach der Grundformel (18) § 109. S. 532 die Querabweichung:

$$\text{Durlach} \quad \eta = (\alpha' - \alpha)\, cotg\, \varphi = -8{,}30''\, cotg\, 49°\ 0' = -7{,}22'' \tag{15}$$

Nach der Bestimmung über die Vorzeichen, bei (15) § 109. S. 532, ist dieses $-7{,}22''$ eine östliche Lotabweichung oder westliche Zenitabweichung.

In gleicher Weise können wir auch die Querabweichungen für Feldberg und Tübingen berechnen, wofür hier nur die Haupt-Berechnungswerte hergesetzt werden sollen.

Aus den Coordinaten der Tabelle I. berechnet man:

Feldberg, Pfeiler — Hornisgrinde, Pfeiler	$\alpha_0 = 10°\ 29'\ 57{,}876''$
	$d\alpha = -5{,}657''$
	$(\alpha) = 10°\ 29'\ 52{,}219''$
Meridian-Konvergenz (Tabelle II.)	$-\ 0°\ 20'\ 16{,}11''$
Feldberg-Hornisgrinde, Geodätisches Azimut	$\alpha = 10°\ 9'\ 36{,}11''$
„ „ Astr. Azimut (11)	$\alpha' = 10°\ 9'\ 46{,}02''$
Differenz	$\alpha' - \alpha = +9{,}91''$

$$\text{Feldberg} \quad \eta = +9{,}91''\, cotg\, 47°\ 52' = +8{,}96'' \tag{16}$$

Ebenso haben wir auch noch für Tübingen:

Tübingen-Hornisgrinde	$\alpha_0 = 278°\ 33'\ 1{,}828''$
	$d\alpha = +0{,}365''$
	$(\alpha) = 278°\ 33'\ 2{,}193''$
Meridian-Konvergenz (Tabelle II.)	$+\ 0°\ 26'\ 34{,}52''$
Tübingen-Hornisgrinde, Geodätisches Azimut	$\alpha = 278°\ 59'\ 36{,}71''$
„ „ Astr. Azimut (9)	$\alpha' = 278°\ 59'\ 40{,}68''$
Differenz	$\alpha' - \alpha = +3{,}97''$

$$\text{Tübingen} \quad \eta = +3{,}97''\, cotg\, 48°\ 31' = +3{,}51'' \tag{17}$$

Wenn wir nun alles, was wir gefunden haben, zusammenstellen, so haben wir:

Punkt	Lotabweichung im Meridian ξ	Lotabweichung in der Quere η		
Mannheim	$(\pm 0{,}00'')$	$(\pm 0{,}00'')$	Ausgangspunkt	(18)
Durlach	$+8{,}95''$	$-7{,}22''$	(östlich)	
Strassburg	$+2{,}52''$	$-1{,}06''$	(östlich)	
Tübingen	$+2{,}10''$	$+3{,}51''$	(westlich)	
Feldberg	$+0{,}79''$ (südlich)	$[+8{,}96'']$	(westlich)	

Leider haben wir unter diesen Punkten keinen, in welchem die Querabweichung η durch eine geographische Länge *und* durch ein Azimut, also mit Probe, bestimmt wäre.

Die vorstehenden Lotabweichungs-Berechnungen bilden ein formelles, in sich selbst konsequentes Rechen-Beispiel, auf dessen sachliche Richtigkeit jedoch hier kein Gewicht gelegt wird. Trotzdem mag so viel bemerkt werden, dass die Abweichungen ξ *im Meridian* wohl als richtig anzunehmen sind, und auch die Querabweichung η in Strassburg, soweit es sich um den geodätischen Teil handelt. Von den aus *Azimut-Übertragung* berechneten Querabweichungen in Durlach, Tübingen und Feldberg mag die erste, Durlach, auch noch richtig sein, die letzte, Feldberg, aber jedenfalls *nicht*, weshalb sie in (18) in Klammer gestellt wurde, und zwar aus dem Grunde, weil die Triangulierung im Süden an ein *zweites*, von Mannheim unabhängiges Azimut, orientiert ist, während unsere Rechnung nur *ein* orientierendes Azimut (8) in Mannheim voraussetzt.

Aus diesem Grunde hatten wir in der vorigen Auflage dieses Buches, Karlsruhe 1878, S. 452, eine besondere geodätische Übertragung zwischen Mannheim und Feldberg eingeschaltet, welche dann in der That auch $\eta = -2''$ (östlich) für Feldberg gab. Wir haben dieses aber nun fortgelassen, weil alle vorstehenden Berechnungen keinen anderen Zweck haben sollen, als ein formelles Rechen-Beispiel zu bieten.

Lotabweichung des Nullpunkts.

Wir haben in dem vorstehenden Beispiele die Lotabweichung in dem Coordinaten-Nullpunkte Mannheim, selbst gleich Null angenommen, weil wir überhaupt nur *relative* Lotabweichungen berechnen konnten, und, wenn einmal eine Annahme für ξ_0 und η_0 in Mannheim zu machen war, es am einfachsten war, $\xi_0 = 0$ und $\eta_0 = 0$ zu setzen.

Hat man nachträglich Veranlassung, die Annahmen für ξ_0 und η_0 zu ändern, oder will man (z. B. zum Zwecke einer Ausgleichung) diese Annahmen von vornherein unbestimmt lassen, so muss man andererseits wissen, in welcher Weise sich eine Änderung von ξ_0 und η_0 auf die ξ und η der anderen Punkte überträgt.

In unserem Falle eines mässig ausgedehnten rechtwinkligen Coordinaten-Systems kann man leicht überblicken, dass Änderungen $d\xi_0$ und $d\eta_0$ sich *sehr nahe in gleicher* Grösse auf die anderen Punkte übertragen, so dass z. B. eine Änderung $d\xi_0 = +1''$ auch alle anderen Werte ξ um *nahezu* 1″ vergrössert, u. s. w.

Die strengere Berechnung giebt nicht genau $d\xi = d\xi_0$ u. s. w.; indessen werden sich $d\xi$ und $d\xi_0$ nur um kleine Glieder höherer Ordnung unterscheiden, welche man durch Differentiieren der Formeln von § 64. finden kann.

In solcher Weise hat zuerst *von Orff* die rechtwinkligen Coordinaten der bayerischen Landesvermessung behandelt, in dem Werke: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873“, S. 556—560 (vgl. auch unseren Bericht in *Jordan-Steppes*, „Deutsches Vermessungswesen, 1882“, S. 209—210).

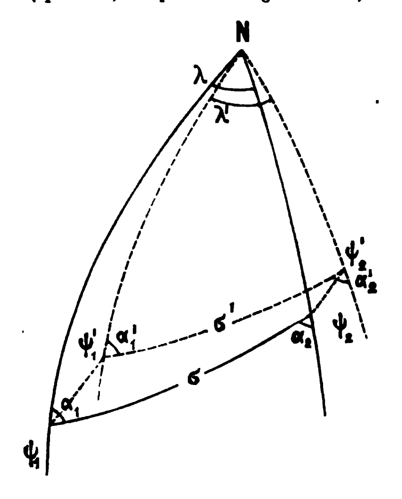
Indem wir für die Behandlung rechtwinkliger Coordinaten hierauf verweisen, wollen wir in dem folgenden § 111. die allgemeinere Aufgabe, nämlich geodätische

Übertragung von Breite, Länge und Azimut durch eine geodätische Linie unter beliebigem Azimut in dem Sinne behandeln, dass die Änderungen $d\varphi$, $d\lambda$, $d\alpha$ des Anfangspunktes einer geodätischen Linie auf den Endpunkt übertragen werden, woran sich weitere Aufgaben anschliessen werden.

§. 111. Differential-Formeln zur astronomisch-geodätischen Netz-Ausgleichung.*)

Wir betrachten zunächst die *sphärisch*-geodätische Hauptaufgabe, indem wir uns vorbehalten, von sphärischen Formeln auf sphäroidische Formeln überzugehen.

Fig. 1.
(*Sphärisch*, entsprechend Fig. 2. S. 406.)



In der sphärischen Fig. 2. haben wir zwei Punkte mit den Breiten ψ_1 und ψ_2 und dem Längenunterschied λ.

Diese beiden Punkte erfahren kleine Verschiebungen, so dass die Breiten ψ_1 und ψ_2 in ψ'_1 und ψ'_2 übergehen und auch der Längenunterschied λ ein anderer λ' wird. Dadurch wird auch die sphärische Entfernung σ eine andere σ' und die beiden Azimute α_1 und α_2 gehen über in α'_1 und α'_2.

Die sämtlichen so bestimmten Änderungen sind:

$$\left.\begin{array}{c}\psi'_1 - \psi_1 = d\psi_1 \quad \psi'_2 - \psi_2 = d\psi_2 \\ \lambda' - \lambda = d\lambda\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{c}\alpha'_1 - \alpha_1 = d\alpha_1 \quad \alpha'_2 - \alpha_2 = d\alpha \\ \sigma' - \sigma = d\sigma\end{array}\right\} \quad (2)$$

Wir haben die Aufgabe, die Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen diesen Änderungen bestehen, und zuerst sollen $d\sigma$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ als Funktion von $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\lambda$ bestimmt werden.

Die Entfernung σ wird in ψ_1, ψ_2 und λ ausgedrückt durch:

$$\cos\sigma = \sin\psi_1 \sin\psi_2 + \cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\lambda \quad (3)$$

Diese Gleichung wird differentiiert:

$$-\sin\sigma\, d\sigma = (\cos\psi_1 \sin\psi_2 - \sin\psi_1 \cos\psi_2 \cos\lambda)\, d\psi_1$$
$$+ (\cos\psi_2 \sin\psi_1 - \cos\psi_1 \sin\psi_2 \cos\lambda)\, d\psi_2 - \cos\psi_1 \cos\psi_2 \sin\lambda\, d\lambda \quad (3a)$$

Die Coëfficienten von $d\psi_1$ und $d\psi_2$ in dieser Gleichung lassen sich durch die sphärisch-trigonometrischen Beziehungen von (11) S. 195 sehr kurz darstellen:

$$\cos\psi_1 \sin\psi_2 - \sin\psi_1 \cos\psi_2 \cos\lambda = \sin\sigma \cos\alpha_1$$
$$\cos\psi_2 \sin\psi_1 - \cos\psi_1 \sin\psi_2 \cos\lambda = \sin\sigma \cos(180° - \alpha_2)$$

*) Die beiden letzten Paragraphen 111. und 112. sind bearbeitet im Anschluss an *Helmert* „Höhere Geodäsie, I., 1880“, S. 281—283 und S. 534—536, sowie Veröffentlichung des geodätischen Instituts, Lotabweichungen, Berlin 1886. Jedoch der Übergang von den sphärischen zu den sphäroidischen Differential-Formeln (Gleichungen (14)—(17) S. 542) ist von uns nicht nach *Helmert* (reduzierte Distanz), sondern nach unserer „neuen Methode“ § 83. gemacht

Ausserdem hat man für das letzte Glied in (3a) die Sinusgleichung $\frac{\sin\lambda}{\sin s} = \frac{\sin\alpha_2}{\cos\varphi_1}$. Dadurch geht die Gleichung (3a) über in die einfachere Form:

$$d\sigma = -\cos\alpha_1\, d\psi_1 + \cos\alpha_2\, d\psi_2 + \cos\psi_2 \sin\alpha_2\, d\lambda \tag{4}$$

Übergehend zu den Azimuten erhalten wir durch Anwendung einer Cotangenten-Gleichung (9) S. 195 auf unsere Fig. 1. die Gleichung:

$$tang\,\psi_2 \cos\psi_1 = \sin\psi_1 \cos\lambda + \sin\lambda\, cotg\,\alpha_1 \tag{5}$$

Wenn man dieses differentiiert, und die dadurch entstehende Gleichung nach den Differentialen ordnet, so erhält man:

$$d\alpha_1 \frac{\sin\lambda}{\sin^2\alpha_1} = d\psi_1 (\cos\psi_1 \cos\lambda + \sin\psi_1\, tang\,\psi_2) - d\psi_2 \frac{\cos\psi_1}{\cos^2\psi_2}$$
$$+ d\lambda (\cos\lambda\, cotg\,\alpha_1 - \sin\lambda \sin\psi_1)$$

$$\left.\begin{aligned} d\alpha_1 = {} & d\psi_1 \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin\lambda} (\cos\psi_1 \cos\lambda + \sin\psi_1\, tang\,\psi_2) \\ & - d\psi_2 \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin\lambda} \frac{\cos\psi_1}{\cos^2\psi_2} \\ & + d\lambda\ \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin\lambda} (\cos\lambda\, cotg\,\alpha_1 - \sin\lambda \sin\psi_1) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Um diesen Ausdruck umzuformen, brauchen wir verschiedene sphärisch-trigonometrische Formeln:

1) für $d\psi_1$: $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\lambda} = \frac{\cos\psi_2}{\sin\sigma}$
$\cos\sigma = \sin\psi_1 \sin\psi_2 + \cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\lambda$

2) für $d\psi_2$: $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\lambda} = \frac{\cos\psi_2}{\sin\sigma}$, $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\cos\psi_2}{\cos\psi_1}$

3) für $d\lambda$: $\cos(180° - \alpha_2) = -\cos\alpha_1 \cos\lambda + \sin\alpha_1 \sin\lambda \sin\psi_2$.

Damit lässt sich die Gleichung (6) auf folgende Form bringen:

$$d\alpha_1 = \sin\alpha_1 \frac{\cos\sigma}{\sin\sigma} d\psi_1 - \frac{\sin\alpha_2}{\sin\sigma} d\psi_2 + \frac{\cos\psi_2 \cos\alpha_2}{\sin\sigma} d\lambda \tag{7}$$

Um die entsprechende Formel für $d\alpha_2$ zu finden, braucht man keine neue Entwicklung zu machen, sondern in der Gleichung (7) nur ψ_1 und ψ_2, sowie α_1 und $180° - \alpha_2$, also auch $d\alpha_1$ und $-d\alpha_2$ gegenseitig zu vertauschen. Dadurch findet man die Formel für $d\alpha_2$, welche in der nachfolgenden Zusammenstellung aller *drei* Auflösungs-Formeln angegeben ist:

$$d\sigma = -\cos\alpha_1\, d\psi_1 + \cos\alpha_2\, d\psi_2 + \sin\alpha_2 \cos\psi_2\, d\lambda \tag{8}$$

$$d\alpha_1 = \sin\alpha_1 \frac{\cos\sigma}{\sin\sigma} d\psi_1 - \frac{\sin\alpha_2}{\sin\sigma} d\psi_2 + \frac{\cos\psi_2 \cos\alpha_2}{\sin\sigma} d\lambda \tag{9}$$

$$d\alpha_2 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\sigma} d\psi_1 - \sin\alpha_2 \frac{\cos\sigma}{\sin\sigma} d\psi_2 + \frac{\cos\psi_1}{\sin\sigma} \cos\alpha_1\, d\lambda \tag{10}$$

Diese drei Gleichungen (8), (9), (10) enthalten die Auflösung der zuerst gestellten Aufgabe, nämlich bei gegebenen $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\lambda$ die zugehörigen $d\sigma$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, zu bestimmen. Wenn man umgekehrt $d\psi_1$, $d\sigma$ und $d\alpha_1$ als gegeben annimmt, und $d\psi_2$, $d\lambda$ und $d\alpha_2$ daraus bestimmen will, so kann man dieses dadurch erreichen, dass man die drei Gleichungen (8), (9), (10) nach $d\psi_2$, $d\lambda$, $d\alpha_2$ auflöst.

Zu diesem Zwecke haben wir zuerst $d\lambda$ aus (8) und (9) eliminiert und $d\psi_2$ bestimmt, dann $d\psi_2$ aus (8) und (9) eliminiert und $d\lambda$ bestimmt, endlich die dadurch erhaltenen Formeln für $d\psi_2$ und $d\lambda$ in (10) eingesetzt, wodurch eine Formel für $d\alpha_2$ entsteht.

Hiebei hat man die verschiedenen trigonometrischen und goniometrischen Beziehungen zu beachten, welche zwischen den 6 Werten ψ_1, ψ_2, λ, α_1, α_2, σ stattfinden (man braucht namentlich die Gleichungen (8) und (9) S. 195), insbesondere die letztgenannte Einsetzung von $d\psi_2$ und $d\lambda$ in (10) ist zunächst etwas umständlich, reduziert sich aber sehr bedeutend. Wir geben von all diesem sofort die End-Ergebnisse:

$$d\psi_2 = \cos\lambda\, d\psi_1 + \cos\alpha_2\, d\sigma - \sin\alpha_2 \sin\sigma\, d\alpha_1 \tag{11}$$

$$d\lambda = \sin\lambda \tang\psi_2\, d\psi_1 + \frac{\sin\alpha_2}{\cos\psi_2}\, d\sigma + \frac{\cos\alpha_2 \sin\sigma}{\cos\psi_2}\, d\alpha_1 \tag{12}$$

$$d\alpha_2 = \sin\lambda \sec\psi_2\, d\psi_1 + \sin\alpha_2 \tang\psi_2\, d\sigma + \cos\lambda \cos\varphi_1 \sec\psi_2\, d\alpha_1 \tag{13}$$

Diese Gleichungen (11), (12), (13), welche wir hier auf dem Umwege über (8), (9), (10) gefunden haben, kann man auch *unmittelbar* aus den Formeln (16), (17), (18) S. 298 herleiten, z. B. nach (16) S. 298:

$$\sin\psi_2 = \sin\psi_1 \cos\sigma + \cos\psi_1 \sin\sigma \cos\alpha_1$$

$$\begin{aligned}\cos\psi_2\, d\psi_2 = {} & \cos\psi_1\, d\psi_1 \cos\sigma - \sin\psi_1 \sin\sigma\, d\sigma \\ & - \sin\psi_1\, d\psi_1 \sin\sigma \cos\alpha_1 + \cos\psi_1 \cos\sigma\, d\sigma \cos\alpha_1 - \cos\psi_1 \sin\sigma \sin\alpha_1\, d\alpha_1\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}d\psi_2 = {} & \frac{\cos\psi_1 \cos\sigma - \sin\psi_1 \sin\sigma \cos\alpha_1}{\cos\psi_2}\, d\psi_1 \\ & + \frac{-\sin\psi_1 \sin\sigma + \cos\psi_1 \cos\sigma \cos\alpha_1}{\cos\psi_2}\, d\sigma \\ & - \frac{\cos\psi_1 \sin\sigma \sin\alpha_1}{\cos\psi_2}\, d\alpha_1\end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

Das Glied mit $d\alpha_1$ lässt sich durch eine Sinusformel auf das entsprechende Glied mit $d\alpha_1$ in (11) bringen, und die anderen Glieder mit $d\psi_1$ und $d\sigma$ werden beide durch Anwendung je einer Gleichung der Gruppe (11) S. 195 mit den entsprechenden Gliedern von (11) in Übereinstimmung gebracht. In ähnlicher Weise lassen sich auch (12) aus (17) S. 298, und (13) aus (18) S. 298 herleiten.

Endlich kann man auch die Reihen-Entwicklungen von § 59. zur Ableitung, bzw. zur Kontrollierung der Formeln (11), (12), (13) benützen; z. B. giebt (8) S. 313 mit den Bezeichnungen dieses Paragraphen:

$$\psi_2 = \psi_1 + \sigma \cos\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2\alpha_1 \tang\psi_1$$

$$d\psi_2 = d\psi_1 - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2\alpha_1 (1 + \tang^2\psi_1)\, d\psi_1$$

andererseits hat man nach (10) S. 314:

$$\lambda = \frac{\sigma \sin\alpha_1}{\cos\psi_1} \quad \text{also} \quad \cos\lambda = 1 - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\sin^2\alpha_1}{\cos^2\psi_1}$$

also zusammen:

$$d\psi_2 = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2\alpha_1 (1 + \tang^2\psi_1)\right) d\psi_1 = \cos\lambda\, d\psi_1$$

Dieses stimmt mit dem ersten Gliede von (11), und in gleicher Weise kann man auch alle 9 Glieder der Formeln (11), (12), (13) begründen.*)

Nachdem wir somit die Formeln (8), (9), (10) und (11), (12), (13) auf verschiedenen Wegen abgeleitet, und gegenseitig versichert haben, wollen wir diese *sphärischen* Differential-Formeln auf das *Ellipsoid* übertragen, was durch die Hilfsmittel von § 80. und § 83. geschieht.

Wir haben:

von (14) S. 403: $$d\psi = \frac{d\varphi}{V^2}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \tag{14}$$

von (12) und (13) S. 403: $$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}}\,,\quad \tan\psi = \tan\varphi\sqrt{1-e^2} \tag{15}$$

von (19) S. 417: $$\sigma = \frac{S}{\sqrt{1-e^2}}(1+\eta^2\ldots)\ \text{wo}\ S = \frac{sV}{c} \tag{16}$$

von (20) S. 417: $$\lambda = Vl(1+\eta^2\ldots) \tag{17}$$

Wenn es bei sehr langen Linien nötig scheint, können die Korrektionsglieder, welche mit $1+\eta^2\ldots$ bei (16) und (17) angedeutet sind, nach (19) und (20) S. 417 zugesetzt werden; im folgenden wollen wir das nicht thun, und entsprechend auch die Näherungen gelten lassen:

$$\sin\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\sin S \qquad \cos\sigma = \cos S \tag{18}$$

$$\sin\lambda = V\sin l \qquad \cos\lambda = \cos l \tag{19}$$

Aus (16) und (17) bilden wir auch noch:

$$d\sigma = \frac{V}{c\sqrt{1-e^2}}ds \qquad d\lambda = V\,dl \tag{20}$$

Die hier mehrfach vorkommende Funktion V, welche wie immer die Bedeutung $= \sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}$ hat, soll sich auf die *Mittel*breite φ beziehen, und entsprechend sollen V_1 und V_2 zu den Breiten φ_1 und φ_2 gehören.

Indem wir betreffs der zwei Gleichungen (20) noch eine Bemerkung vorbehalten (bei (29)—(31)), führen wir nun alle Änderungen (14)—(20) in (8)—(13) ein, und erhalten dadurch:

$$ds = -\frac{c\cos\alpha_1}{V}\frac{d\varphi_1}{V_1^2} + \frac{c\cos\alpha_2}{V}\frac{d\varphi_2}{V_2^2} + \frac{c}{V_2}\sin\alpha_2\cos\varphi_2\,dl \tag{21}$$

$$d\alpha_1 = \sin\alpha_1\frac{\cos S}{\sin S}\frac{d\varphi_1}{V_1^2} - \frac{\sin\alpha_2}{\sin S}\frac{d\varphi_2}{V_2^2} + \frac{\cos\varphi_2\cos\alpha_2}{\sin S}\frac{V}{V_2}dl \tag{22}$$

$$d\alpha_2 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin S}\frac{d\varphi_1}{V_1^2} - \sin\alpha_2\frac{\cos S}{\sin S}\frac{d\varphi_2}{V_2^2} + \frac{\cos\varphi_1\cos\alpha_1}{\sin S}\frac{V}{V_1}dl \tag{23}$$

---

*) Wenn man die Formeln (11), (12), (13), welche wir nachher brauchen, auf dem kürzesten Wege finden will, so wird wohl die bei (11a) angedeutete Herleitung am meisten zu empfehlen sein. Indessen schien es nicht unpassend, diese sphärischen Differential-Formeln (welche ähnlich teilweise auch bei der Theorie der Mond-Distanzen auftreten) von verschiedenen Seiten zu betrachten, bzw. die auf einem Wege erhaltene Ableitung auf anderem Wege zu kontrollieren. Der Umweg über (8), (9), (10) entspricht *Helmert*, „Höhere Geodäsie, I.", S. 282.

$$d\varphi_2 = V_2^3 \cos l \frac{d\varphi_1}{V_1^3} + V_2^3\, V \cos\alpha_2 \frac{ds}{c} - V_2^3 \sin\alpha_2 \sin S\, d\alpha_1 \tag{24}$$

$$dl = \sin l \tan\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{V_1^3} + V_2 \frac{\sin\alpha_2}{\cos\varphi_2}\frac{ds}{c} + V_2 \frac{\cos\alpha_2}{\cos\varphi_2} \sin S\, d\alpha_1 \tag{25}$$

$$d\alpha_2 = V V_2 \sin l \sec\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{V_1^3} + V \sin\alpha_2 \tan\varphi_2 \frac{ds}{c} + \cos l \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} d\alpha_1 \tag{26}$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir diese Gleichungen kontrollieren durch unmittelbares Ableiten der Reihen-Entwicklungen (25*), (26*), (27*) S. 390. Z. B. die erste Reihe (25*) ausführlich geschrieben, giebt in den ersten Gliedern:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = V_1^3 \frac{s}{c} \cos\alpha_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{c}\right)^2 V_1^4 \sin^2\alpha_1 \tan\varphi_1 + \ldots$$

Wenn man dieses nach φ_1 ableitet, so findet man nach (13) S. 388, und im zweiten Gliede genähert mit S:

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = 1 - 3\eta_1^2 \frac{s}{c} V_1 \cos\alpha_1 - \frac{1}{2} S^2 \sin^2\alpha_1 (1 + t_1^2) \tag{27}$$

Nun ist:

$$V_1^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi_1 \qquad V_2^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 - \eta^2 (\varphi_2 - \varphi_1)\, t = 1 - \eta^2 S \cos\alpha\, t \tag{28}$$

Auch kann man $S^2 \sin^2\alpha\,(1 + t_1^2) = l^2$ setzen, wodurch man (27) so umformen kann:

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \left(1 - \frac{l^2}{2}\right)(1 - 3\eta^2 S \cos\alpha\, t) = \cos l \frac{V_2^3}{V_1^3} \tag{29}$$

Dieses stimmt in Bezug auf V_2 und V_1 nicht genau mit dem ersten Gliede von (24), indem die V_2 und V_1 in anderen Potenzen auftreten. Der Grund dieser Abweichung liegt in den Gleichungen (20), welche insofern nicht richtig sind, als dabei der Faktor V als *konstant* behandelt wird, während doch $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi}$ eine Funktion von φ ist

Wir wollen deshalb nun genauer so rechnen:

$$\sigma = \frac{s}{c} \frac{V}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$d\sigma = \frac{ds}{c} \frac{V}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{s}{c} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dV}{d\varphi} d\varphi, \quad \text{also genähert:}$$

$$d\sigma = \frac{ds}{c} \frac{V}{\sqrt{1-e^2}} - \eta^2 t S\, d\varphi \tag{30}$$

Setzen wir dieses in (11) ein, so erhalten wir:

$$d\psi_2 = \cos\lambda\, d\psi_1 - \eta^2 t S \cos\alpha_2\, d\varphi + ds \cos\alpha_2 \ldots$$

Das Glied mit ds interessiert uns hier nicht, wir lassen es beim Übergang zum Ellipsoid fort und erhalten (immer nur auf η^2 einschliesslich genau):

$$\frac{d\varphi_2}{V_2^3} = \cos l \frac{d\varphi_1}{V_1^3} - \eta^2 t S \cos\alpha \frac{d\varphi_1 + d\varphi_2}{2} \tag{31}$$

Dabei ist im letzten Glied schlechthin α statt α_2 als Näherung geschrieben und für $d\varphi$ das Mittel aus $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ eingesetzt. Dieses (31) kann man wegen (28) auf die Form (29) bringen.

Der zweite Ausdruck in (29) mit dem Quotienten $V_2^3 : V_1^3$ ist also nun auf zweifachem Wege bestätigt, an Stelle des weniger genauen Quotienten $V_2^2 : V_1^2$ im ersten Gliede von (24).

Wir wollen in gleichem Sinne auch die Gleichung (8) genauer behandeln. Aus (8), (14) und (30) haben wir:

$$\frac{ds}{c}\,\frac{V}{\sqrt{1-e^2}} - \eta^2 t\, S\, d\varphi = -\frac{d\varphi_1}{V_1^3}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\cos\alpha_1$$

Der hier zunächst unbestimmt eingesetzte Wert $d\varphi$ in dem Gliede mit η^2 muss nun gesetzt werden:

$$d\varphi = -\frac{ds}{c}\,\frac{\cos\alpha_1}{2}$$

und zwar deswegen, weil $d\varphi$ als Änderung der *Mittel*breite die Hälfte derjenigen Breitenänderung sein muss, welche der Änderung ds entspricht. Damit giebt (28):

$$\frac{ds}{c}\,V\left(1+\frac{\eta^2}{2}\,\frac{s}{c}\cos\alpha_1\,t\right) = -\frac{d\varphi_1}{V_1^3}\cos\alpha_1 + \ldots$$

Nun ist aber:

$$1+\frac{\eta^2}{2}\,\frac{s}{c}\cos\alpha_1\,t = \frac{V_1}{V}$$

und damit wird:

$$ds = -c\,\frac{d\varphi_1}{V_1^3}\cos\alpha_1 + \ldots .$$

Dieses ist der Anfang der verbesserten Gleichung (21) und die ganze Gleichung giebt in gleicher Weise verbessert:

$$ds = -c\cos\alpha_1\,\frac{d\varphi_1}{V_1^2} + c\cos\alpha_2\,\frac{d\varphi_2}{V_2^2} + \frac{c}{V_2}\sin\alpha_2\cos\varphi_2\, l \qquad (32)$$

Nachdem wir an diesen beiden Beispielen (31) und (32) gezeigt haben, dass man die Gleichungen (21) — (26), welche in Bezug auf die Glieder von der Ordnung $\eta^2 S$ noch nicht streng richtig sind, durch Berücksichtigung der von der Breite abhängigen Änderungen von σ und λ schärfer machen kann, und da man ausserdem das einfache Hilfsmittel hat, die Glieder von der Ordnung $\eta^2 S$ durch Differentiieren der Reihen (25*), (26*), (27*) S. 390 nötigenfalls zu entwickeln, bzw. zu kontrollieren, wollen wir jetzt umgekehrt die Gleichungen (21) — (26) *vereinfachen*.

Diese Gleichungen sind in der Form (21) — (26) nicht konsequent, wegen der Vernachlässigung des Einflusses von $d\varphi$ auf den Reduktionsfaktor V; indessen bei Lotabweichungs-Berechnungen ist es überhaupt auch sachlich zweifelhaft, welche Breitenwerte φ zur Berechnung der Coëfficienten angewendet werden sollen, die *astronomisch* gemessenen Polhöhen φ' oder die *geodätisch* übertragenen, zu einem rein hypothetischen Ellipsoid gehörigen Breiten φ.

Mit Rücksicht hierauf, und überhaupt für solche Fälle, in welchen die Glieder von der Ordnung $\eta^2 S$ schon aus anderen Gründen vernachlässigt werden können, schreiben wir nun die hauptsächlich gebrauchten Gleichungen (24) — (26) von nun an ohne Unterscheidung der verschiedenen V_1, V, V_2, indem dann V schlechthin als zur Mittelbreite φ gehörig genommen wird. (Man beachte, dass das Korrektionsglied in (30), welches von der Ordnung $\eta^2 S\, d\varphi$ ist, in den *Coëfficienten* von (24) — (26) Änderungen von der Ordnung $\eta^2 S$ erzeugt, welche einer Verwechslung zwischen V_1, V und V_2 entsprechen.)

Zugleich wollen wir den Längenunterschied l als Differenz $L_2 - L_1$ zweier absoluter Längen L_1 und L_2 darstellen, wie in Fig. 2. unten angedeutet ist, welche zugleich auch die übrigen Zeichen φ_1, φ_2, α_1, α_2, s, für das Ellipsoid gültig, darstellt, im Gegensatz zu der früheren sphärischen Fig. 1. S. 539.

Damit erhalten wir aus (24) — (26), in Bezug auf V vereinfacht:

$$d\varphi_2 = \cos l\, d\varphi_1 + V^3 \cos\alpha_2 \frac{ds}{c} - V^2 \sin\alpha_2 \sin S\, d\alpha_1 \tag{33}$$

$$dL_2 = dL_1 + \frac{\sin l \sin\varphi_2}{V^2 \cos\varphi_2} d\varphi_1 + V\frac{\sin\alpha_2}{\cos\varphi_2}\frac{ds}{c} + V\frac{\cos\alpha_2}{\cos\varphi_2}\sin S\, d\alpha_1 \tag{34}$$

$$d\alpha_2 = \frac{\sin l}{\cos\varphi_2} d\varphi_1 + V\frac{\sin\alpha_2 \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}\frac{ds}{c} + \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\cos l\, d\alpha_1 \tag{35}$$

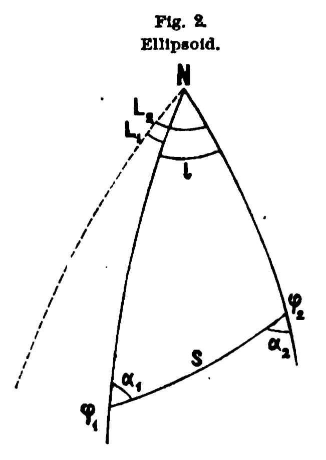


Fig. 2. Ellipsoid.

Wenn man hier $ds = 0$ setzt, d. h. wenn man die lineare Grösse der geodätischen Linie als fehlerfrei annimmt; wenn man ferner S und l beide als *klein* annimmt, so dass $\sin S = 0$, $\sin l = 0$, $\cos l = 1$ wird, so bleibt von den drei Gleichungen (33), (34), (35) nichts mehr übrig als:

$$d\varphi_2 = d\varphi_1 \quad , \quad dL_2 = dL_1 \quad , \quad d\alpha_2 = d\alpha_1$$

d. h. auf sehr *kurze* Entfernung tragen sich $d\varphi_1$, dL_1 und $d\alpha_1$ in ihrer eigenen Grösse über, und die anderen Einflüsse verschwinden; oder allgemeiner: die Übertragungen von $d\varphi_1$, dL_1, $d\alpha_1$ auf die ungleichnamigen Elemente (z. B. $d\varphi_1$ auf dL_2 u.s.w.) sind nur Grössen zweiter Ordnung im Vergleich mit den Übertragungen auf die gleichnamigen Grössen (z. B. $d\varphi_1$ auf $d\varphi_2$ u. s. w.).

§ 112. Ausgleichung eines astronomisch-geodätischen Netzes und Bestimmung der Lotabweichungen.*)

Die im vorigen § 111. entwickelten Differential-Formeln wollen wir nun weiter benützen, und hiezu die Formeln (33), (34), (35) (s. oben) in allgemeiner Form so schreiben:

$$d\varphi_2 = p_1\, d\varphi_1 + p_2\, ds + p_3\, d\alpha_1 \tag{1}$$

$$\cos\varphi_2\, dL_2 = \cos\varphi_2\, dL_1 + q_1\, d\varphi_1 + q_2\, ds + q_3\, d\alpha_1 \tag{2}$$

$$\operatorname{cotg}\varphi_2\, d\alpha_2 = r_1\, d\varphi_1 + r_2\, ds + r_3\, d\alpha_1 \tag{3}$$

*) In diesem Schluss-Paragraphen bringen wir die Grundgedanken der *Helmert*schen Theorien zur Darstellung, welche enthalten sind in der „Veröffentlichung des königl. Preussischen Geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft I. Berlin 1886".
Zur Vergleichung der Bezeichnungen sei bemerkt, dass wir, wie gewöhnlich, die Breiten mit φ und die Azimute mit α bezeichnen, während die Veröffentlichung des geodätischen Instituts für die Breiten B und für die Azimute T genommen hat.
Unsere Gleichungen (1), (2), (3) mit den Coëfficienten (4), (5), (6) entsprechen den Gleichungen von *Helmert*, „Höhere Geodäsie, I." (7), (8), (9), S. 282 — 283 oder der „Veröffentl. d. Geod. Inst., Lotabweichungen, 1886", (3) S. 5., mit dem Coëfficienten (1) S. 8.

Die Bedeutung der Coëfficienten p, q, r ist bestimmt durch die Vergleichung dieser Gleichungen (1), (2), (3) mit den früheren Gleichungen (33), (34), (35) § 111. S. 545. nämlich:

$$p_1 = \cos l \qquad p_2 = \frac{V^3}{c} \cos \alpha_2 \qquad p_3 = - V^2 \sin \alpha_2 \sin S \tag{4}$$

$$q_1 = \frac{\sin l}{V^2} \sin \varphi_2 \qquad q_2 = \frac{V}{c} \sin \alpha_2 \qquad q_3 = V \cos \alpha_2 \sin S \tag{5}$$

$$r_1 = \frac{\sin l}{\sin \varphi_2} \qquad r_2 = \frac{V}{c} \sin \alpha_2 \qquad r_3 = \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_2} \cos l \tag{6}$$

Dabei ist $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$ die Funktion, welche in unserem Anhang durch die Tabellen Seite [2]—[23] und Seite [46]—[47] gegeben wird, und S ist nach (10) S. 415 und (22) S. 389 die Reduktion der geodätischen Linie s auf den Quer-Krümmungshalbmesser N der Mittelbreite φ, d. h. $S = \frac{s}{N} = \frac{s}{c} V$.

Nun wollen wir dazu übergehen, den Differentialen $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, dL_1 u. s. w. die Bedeutung teils von Lotabweichungen, teils von Beobachtungs-Fehlern unterzulegen, und dazu sollen für alle geodätisch oder astronomisch gemessenen Grössen solche Näherungswerte eingeführt werden, welche innerhalb der Beobachtungs-Fehler oder Lotabweichungs-Beträge willkürlich, im übrigen aber so gewählt sind, dass sie unter sich und mit den Dimensionen des benützten Vergleichs-Ellipsoids in aller Rechenschärfe übereinstimmen. Ein solches System von Näherungswerten wird z. B. erhalten, wenn man die Breiten und Längen der Endpunkte einer geodätischen Linie willkürlich annimmt und dann die Entfernung, die Azimute und den Längenunterschied nach § 79. oder § 83. berechnet. Oder kurz, man verfährt in ähnlicher Weise, wie bei der Coordinaten-Ausgleichung von Dreiecksnetzen (vgl. z. B. Band I. § 65.). Das erwähnte System von Näherungswerten werde mit $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ u. s. w. bezeichnet, während die Beobachtungswerte mit φ'_1, φ'_2 u. s. w. bezeichnet seien, d. h. im ganzen:

$$\text{Beobachtungen:} \quad \varphi'_1 \quad \varphi'_2 \quad L'_1 \quad L'_2 \quad \alpha'_1 \quad \alpha'_2 \quad s' \tag{7}$$

$$\text{Näherungswerte:} \quad \bar{\varphi}_1 \quad \bar{\varphi}_2 \quad \bar{L}_1 \quad \bar{L}_2 \quad \bar{\alpha}_1 \quad \bar{\alpha}_2 \quad \bar{s} \tag{8}$$

Wegen der Beobachtungs-Fehler, d. h. infolge der Ausgleichung, werden an den Beobachtungen angebracht die

$$\text{Verbesserungen:} \quad \delta\varphi'_1 \quad \delta\varphi'_2 \quad \delta L'_1 \quad \delta L'_2 \quad \delta\alpha'_1 \quad \delta\alpha'_2 \quad \delta s' \tag{9}$$

Hiezu werden nachher noch die Verbesserungen v_1 und v_2 für geodätische Azimut-Übertragung kommen.

Die beiden Endpunkte der betrachteten geodätischen Linie haben:

$$\text{Lotabweichungen:} \quad \xi_1 \quad \eta_1 \quad \xi_2 \quad \eta_2 \tag{10}$$

Wenn wir noch festsetzen, dass allgemein mit $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, dL_1 u. s. w. diejenigen Änderungen bezeichnet sein sollen, welche man an den Näherungswerten $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ u. s. w. anbringen muss, um sie mit der Ausgleichung in Übereinstimmung zu bringen, so können wir zur Aufstellung der Bedingungs-Gleichungen übergehen. Zuerst haben wir für die Breiten:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi}_1 + d\varphi_1 &= \varphi'_1 + \delta\varphi'_1 - \xi_1 \\ \bar{\varphi}_2 + d\varphi_2 &= \varphi'_2 + \delta\varphi'_2 - \xi_1 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Auch die Bedingungs-Gleichungen für die Längen erhält man leicht, wenn man nur bedenkt, dass die Quer-Lotabweichungen η_1 und η_2 nach (17) § 109. S. 532, auf die Längen die Einflüsse $\eta_1 \sec \varphi_1$ und $\eta_2 \sec \varphi_2$ geben. Man hat also:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{L}_1 + d L_1 = L'_1 + \delta L'_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ \bar{L}_2 + d L_2 = L'_1 + \delta L'_2 - \eta_2 \sec \varphi_2 \end{array}\right\} \quad (12)$$

Bei den Azimuten ist ausser den Verbesserungen $\delta \alpha_1$ und $\delta \alpha_2$ die schon bei (9) angegeben wurden, noch eine weitere Verbesserung zuzufügen. Die $\delta \alpha_1$ und $\delta \alpha_2$ beziehen sich nämlich lediglich auf die *astronomische* Azimutmessung, und wenn etwa diese astronomischen Messungen geradezu *gegenseitig* wären, d. h. wenn die geodätische Linie s, die wir betrachten, einfach *eine* Dreiecksseite wäre, die als Sicht hin und her bei den astronomischen Azimutmessungen diente, dann wäre ausser den $\delta \alpha_1$ und $\delta \alpha_2$ nichts weiter nötig.

Wenn aber, wie gewöhnlich, die geodätische Linie s, an deren Endpunkten die beiden Azimute α_1 und α_2 gemessen sind, selbst aus einer langen Dreieckskette geodätisch abgeleitet ist (vgl. Fig. 2. S. 383), so ist für die Ungenauigkeiten der dabei vorkommenden geodätischen Azimut-Übertragung in der Ausgleichung ein Spielraum zu lassen, welcher durch zwei Verbesserungen v_1 und v_2 ausgedrückt werden soll. Es würde zwar genügen, die Verbesserung der Azimut-Übertragung längs der ganzen Linie durch *eine* Unbekannte v auszudrücken, allein es hindert nichts, dieselbe in der Form einer *Differenz* $v_2 - v_1$ einzuführen, was aus formellen Gründen vorzuziehen ist.

Legen wir also der Azimut-Verbesserung im ersten Punkte noch die geodätische Verbesserung v_1, und im zweiten Punkte entsprechend v_2 zu, und bedenken, dass die Lotabweichungen η_1 und η_2 mit den Beträgen $\eta_1 \tan \varphi_1$ und $\eta_2 \tan \varphi_2$ auf die Azimute einwirken, so erhalten wir die beiden Bedingungs-Gleichungen für die Azimute:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_1 + d\alpha_1 = \alpha'_1 + \delta \alpha'_1 + v_1 - \eta_1 \tan \varphi_1 \\ \bar{\alpha}_2 + d\alpha_2 = \alpha'_2 + \delta \alpha'_2 + v_2 - \eta_2 \tan \varphi_2 \end{array}\right\} \quad (13)$$

Endlich haben wir noch eine Bedingungs-Gleichung für die geodätische Linie selbst, nämlich:

$$\bar{s} + ds = s' + \delta s' \quad (14)$$

Nun sollen die Gleichungen (11) — (14) in die Differential-Formeln (1), (2), (3) eingesetzt werden, und dabei kann man auch statt der Quer-Lotabweichungen η_1 und η_2 deren Werte in Länge setzen, d. h. man kann neue Unbekannte einführen:

$$\eta_1 \sec \varphi_1 = \lambda_1 \qquad \eta_2 \sec \varphi_2 = \lambda_2 \quad (15)$$

Alle diese Substitutionen gehen ohne Schwierigkeit vor sich, da man es nur mit *linearen* Gleichungen zu thun hat.

Da wir von der weiteren Behandlung der Aufgabe nur noch den Grundgedanken angeben wollen, mag es genügen, einzusehen, dass die beschriebenen Substitutionen zu drei neuen linearen Gleichungen führen von folgender Form:

$$\xi_2 = f_1 (\xi_1 , \lambda_1 , \delta\varphi_1 , \delta\varphi_2 , \delta\alpha_1 , v_1 , \delta s) \quad (16)$$

$$\lambda_2 = f_2 (\xi_1 , \lambda_1 , \delta\varphi_1 , \delta L_1 , \delta L_2 , \delta\alpha_1 , v_1 , \delta s) \quad (17)$$

$$\lambda_2 = f_3 (\xi_1 , \lambda_1 , \delta\varphi_1 , \delta\alpha_1 , \delta\alpha_2 , v_1 , v_2 , \delta s) \quad (18)$$

Wenn man die beiden letzten Gleichungen subtrahiert, so fallen die δs fort (weil in den Gleichungen (2) und (3) die Coëfficienten q_2 und r_2 einander gleich sind), und dadurch erhält man eine neue Gleichung, in welcher λ_2 eliminiert ist, nämlich:

$$0 = f_4 (\xi_1 , \lambda_1 , \delta\varphi_1 , \delta L_1 , \delta L_2 , \delta\alpha_1 , \delta\alpha_2 . v_1 . v_2) \quad (19)$$

Dieses ist die von *Helmert* „erweiterte *Laplace sche Gleichung*“.

Diese Gleichung hat die wertvolle Eigenschaft, dass die beiden Lotabweichungs-Komponenten ξ_2 und η_2 (bzw. ξ_2 und λ_2) *eliminiert* sind.

Allerdings ξ_1 und λ_1 sind noch in der Gleichung vorhanden, allein diese Lotabweichungs-Komponenten sind insofern unschädlich, als Lotabweichungen nur *relativ* aufzufassen sind; d. h. bezogen auf einen Ausgangspunkt, dessen Lotabweichung ξ_1, λ_1 man häufig schlechthin gleich Null setzt, oder die man einem grösseren System entsprechend als Mittelwert annehmen kann. Diese Lotabweichung ξ_1, λ_1 des Ausgangspunktes spielt dieselbe Rolle, wie die bekannten Nullpunkts-Korrektionen bei Richtungs-Ausgleichungen.

Die hohe geodätische Bedeutung der *Laplace*schen Gleichung (19) besteht nun darin, dass dadurch für eine geodätische Linie, welche geodätisch und astronomisch vollständig nach Breiten, Längen und Azimuten gemessen ist, bei der heutigen Feinheit, namentlich der telegraphischen Zeitübertragung für astronomische Längen, eine Bedingungs-Gleichung geliefert wird, *welche von den Lotabweichungen unabhängig ist*, und den übrigen rein geodätischen Bedingungs-Gleichungen (Geodätischer Excess, Seiten-Gleichungen) *gleichberechtigt* ist.

Damit ist auch der Grundgedanke zur Ausgleichung eines astronomisch-geodätischen Netzes Fig. 1. S. 193 klar gemacht.

Für jede geodätische Verbindung zwischen zwei astronomischen Knotenpunkten wird eine *Laplace*sche Gleichung gebildet; die ξ_1, λ_1 von (19) werden dabei successive eliminiert und alle auf *einen* Zentralpunkt (Rauenberg bei Berlin) bezogen.

Wenn ein *geschlossenes* Polygon vorhanden ist, so giebt dieses noch 3 rein geodätische Gleichungen hinzu, und alle diese Bedingungs-Gleichungen werden zusammen nach Correlaten ausgeglichen, wie ein rein trigonometrisches Netz.

Z. B. das astronomisch-geodätische Netz Fig. 1. S. 193 hat 39 geodätische Linien und 13 Polygonschlüsse; es würde also zu einer Ausgleichung in der beschriebenen Weise $39 + 3 \times 13 = 78$ Bedingungs-Gleichungen geben.

Um den ganzen Gang einer solchen Ausgleichung zu verstehen, muss man noch wissen, wie die *Gewichts*verhältnisse der auszugleichenden Elemente zu bemessen sind.

Die mittleren Fehler, bzw. Gewichte der astronomischen Messungen, Breiten, Azimute und Längen, müssen aus dem Messungsverfahren selbst a priori ermittelt werden.

Ähnlich verhält es sich auch mit den geodätischen Messungen, nämlich mit den geodätischen Linien s und ihren Azimut-Übertragungen, doch ist hier die Genauigkeits- bzw. Gewichtsschätzung nicht so einfach wie bei den astronomischen Messungen.

Es kommen hier Gewichts-Bestimmungen in Betracht wie diejenigen, welche wir auf S. 191 in der Tabelle der „mittleren Fehler von Polar-Coordinaten" von den Triangulierungen der Landes-Aufnahme zusammengestellt haben. Wenn hier im Durchschnitt für eine Diagonale $D = 133\,000^{m}$ der mittlere Fehler von D im Logarithmus $= \pm\, 9{\cdot}5$ und der mittlere Fehler der Azimut-Übertragung $= \pm\, 0{,}57''$ angegeben ist, so heisst das für die Ausgleichung nach *Laplace*schen Gleichungen (19), dass für die Differenz $v_1 - v_2$ der mittlere Fehler $= \pm\, 0{,}57''$ sei, dass also v_1 und v_2 etwa beide mit Gewichten einzuführen sind, welche proportional $\dfrac{2}{0{,}57^2}$ sind.

Die Gewichte für die linearen Entfernungen s (entsprechend dem obigen $d \log D = \pm\, 9{\cdot}5$) braucht man zu den *Laplace*schen Gleichungen nicht, sondern nur zu den Polygon-Gleichungen.

Das Sicherste für solche Gewichts-Bestimmungen wird sein, wenn man für jede Triangulierungskette, im Anschluss an ihre eigene Ausgleichung, die Gewichte formell streng berechnet, so wie für 5 Ketten der Landes-Aufnahme auf S. 191 angegeben ist (mit Rücksicht auf das Verhältnis $\mu_2 : \mu_1$ nach S. 182—183). Wenn solche Gewichts-Berechnungen nicht vorliegen, und auch nicht nachgeholt werden können, so müssen allgemeine Schätzungen nach schematischen Netzen eintreten, nach unserem § 20. oder nach der Abhandlung von *Simon*, welche wir auf S. 191 unten zitiert haben.

Nach der Ausgleichung bestimmt man die Lotabweichungs-Komponenten ξ_2, λ_2 aus den Gleichungen (16), (17) und (18), und zwar λ_2 doppelt.

Mit einer solchen Ausgleichung kann man auch noch eine Bestimmung der Erddimensionen bzw. eine Verbesserung der Annahmen c und e'^2 (oder a und e^2) verbinden, indem man in die Bedingungs-Gleichungen noch je zwei Glieder von der Form dc und de'^2 aufnimmt, die man durch Differentiieren nach § 107. findet.

Anhang.

Hilfstafeln.

φ	$log\ M$	Δ	$log\ N$	Δ	$log\ r$	Δ	$log\ \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.801	+	6.804	+	6.803	+	— 20	—
0° 0′	7351·0		6434·6		1892·8		6.393 621	
		0·4		0·2		0·3		0
10	7351·4		6434·8		1893·1		621	
		1·1		0·3		0·7		0
20	7352·5		6435·1		1893·8		621	
		1·9		0·6		1·2		0
30	7354·4		6435·7		1895·0		621	
		2·5		0·9		1·8		0
40	7356·9		6436·6		1896·8		621	
		3·3		1·1		2·2		1
50	7360·2		6437·7		1899·0		620	
		4·1		1·4		2·7		0
1° 0′	7364·3		6439·1		1901·7		6.393 620	
		4·8		1·5		3·2		1
10	7369·1		6440·6		1904·9		619	
		5·5		1·9		3·6		1
20	7374·6		6442·5		1908·5		618	
		6·2		2·1		4·2		1
30	7380·8		6444·6		1912·7		617	
		7·0		2·3		4·7		0
40	7387·8		6446·9		1917·4		617	
		7·7		2·6		5·1		0
50	7395·5		6449·5		1922·5		617	
		8·5		2·8		5·6		2
2° 0′	7404·0		6452·3		1928·1		6.393 615	
		9·2		3·1		6·2		2
10	7413·2		6455·4		1934·3		613	
		9·9		3·3		6·6		1
20	7423·1		6458·7		1940·9		612	
		10·7		3·5		7·1		2
30	7433·8		6462·2		1948·0		610	
		11·4		3·8		7·6		1
40	7445·2		6466·0		1955·6		609	
		12·1		4·1		8·1		2
50	7457·3		6470·1		1963·7		607	
		12·8		4·2		8·5		1
3° 0′	7470·1		6474·3		1972·2		6.393 606	
		13·6		4·6		9·1		2
10	7483·7		6478·9		1981·3		604	
		14·3		4·7		9·5		2
20	7498·0		6483·6		1990·8		602	
		15·1		5·1		10·1		2
30	7513·1		6488·7		2000·9		600	
		15·8		5·2		10·5		2
40	7528·9		6493·9		2011·4		598	
		16·5		5·5		11·0		2
50	7545·4		6499·4		2022·4		596	
		17·2		5·8		11·5		3
4° 0′	7562·6		6505·2		2033·9		6.393 593	
		18·0		6·0		12·0		2
10	7580·6		6511·2		2045·9		591	
		18·7		6·2		12·4		3
20	7599·3		6517·4		2058·3		588	
		19·4		6·5		13·0		2
30	7618·7		6523·9		2071·3		586	
		20·1		6·7		13·4		3
40	7638·8		6530·6		2084·7		583	
		20·9		6·9		13·9		3
50	7659·7		6537·5		2098·6		580	
		21·6		7·2		14·4		3
5° 0′	7681·3		6544·7		2113·0		6.393 577	
		22·4		7·5		14·9		3
10	7703·7		6552·2		2127·9		574	
		23·0		7·7		15·4		3
20	7726·7		6559·9		2143·3		571	
		23·8		7·9		15·8		3
30	7750·5		6567·8		2159·1		568	
		24·5		8·1		16·4		3
40	7775·0		6575·9		2175·5		565	
		25·2		8·5		16·8		3
50	7800·2		6584·4		2192·3		562	
		25·9		8·6		17·3		4
6° 0′	7826·1		6593·0		2209·6		6.393 558	
		26·7		8·9		17·7		3
10	7852·8		6601·9		2227·3		555	
		27·4		9·1		18·3		4
20	7880·2		6611·0		2245·6		551	
		28·1		9·4		18·7		4
30	7908·3		6620·4		2264·3		547	
		28·8		9·6		19·2		4
40	7937·1		6630·0		2283·5		543	
		29·5		9·8		19·7		4
50	7966·6		6639·8		2303·2		539	
		30·2		10·1		20·2		4
7° 0′	7996·8		6649·9		2323·4		6.393 535	
		31·0		10·3		20·6		4
10	8027·8		6660·2		2344·0		531	
		31·7		10·6		21·1		4
20	8059·5		6670·8		2365·1		527	
		32·3		10·8		21·6		4
30	8091·8		6681·6		2386·7		523	
		33·1		11·0		22·1		5
40	8124·9		6692·6		2408·8		518	
		33·8		11·3		22·5		4
50	8158·7		6703·9		2431·3		514	
		34·5		11·5		23·0		5
8° 0′	8193·2		6715·4		2454·3		509	

vgl. § 33 S. 213.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.512 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
0° 0′	*0000·0	0·1	6900·3	0·4	7816·7	0·1	9083·6	0·2
10	9999·9	0·4	6899·9	1·1	7816·6	0·4	9083·4	0·8
20	9999·5	0·6	6898·8	1·8	7816·2	0·6	9082·6	1·2
30	9998·9	0·9	6897·0	2·6	7815·6	0·9	9081·4	1·7
40	9998·0	1·1	6894·4	3·3	7814·7	1·1	9079·7	2·2
50	9996·9	1·3	6891·1	4·0	7813·6	1·3	9077·5	2·7
1° 0′	9995·6	1·6	6887·1	4·8	7812·3	1·6	9074·8	3·2
10	9994·0	1·8	6882·3	5·6	7810·7	1·9	9071·6	3·7
20	9992·2	2·1	6876·7	6·2	7808·8	2·0	9067·9	4·2
30	9990·1	2·4	6870·5	7·0	7806·8	2·4	9063·7	4·6
40	9987·7	2·5	6863·5	7·7	7804·4	2·5	9059·1	5·2
50	9985·2	2·9	6855·8	8·5	7801·9	2·9	9053·9	5·6
2° 0′	9982·3	3·0	6847·3	9·2	7799·0	3·0	9048·3	6·1
10	9979·3	3·3	6838·1	9·9	7796·0	3·3	9042·2	6·7
20	9976·0	3·6	6828·2	10·6	7792·7	3·6	9035·5	7·1
30	9972·4	3·8	6817·6	11·4	7789·1	3·8	9028·4	7·5
40	9968·6	4·0	6806·2	12·1	7785·3	4·0	9020·9	8·1
50	9964·6	4·3	6794·1	12·9	7781·3	4·3	9012·8	8·6
3° 0′	9960·3	4·5	6781·2	13·6	7777·0	4·5	9004·2	9·1
10	9955·8	4·8	6767·6	14·3	7772·5	4·8	8995·1	9·5
20	9951·0	5·0	6753·3	15·1	7767·7	5·0	8985·6	10·0
30	9946·0	5·3	6738·2	15·7	7762·7	5·3	8975·6	10·5
40	9940·7	5·5	6722·5	16·5	7757·4	5·5	8965·1	11·0
50	9935·2	5·7	6706·0	17·3	7751·9	5·7	8954·1	11·5
4° 0′	9929·5	6·0	6688·7	18·0	7746·2	6·0	8942·6	11·9
10	9923·5	6·2	6670·7	18·6	7740·2	6·3	8930·7	12·5
20	9917·3	6·5	6652·1	19·5	7733·9	6·4	8918·2	12·9
30	9910·8	6·7	6632·6	20·1	7727·5	6·7	8905·3	13·5
40	9904·1	7·0	6612·5	20·9	7720·8	7·0	8891·8	13·9
50	9897·1	7·2	6591·6	21·6	7713·8	7·2	8877·9	14·4
5° 0′	9889·9	7·4	6570·0	22·3	7706·6	7·4	8863·5	14·9
10	9882·5	7·7	6547·7	23·1	7699·2	7·7	8848·6	15·3
20	9874·8	7·9	6524·6	23·7	7691·5	7·9	8833·3	15·9
30	9866·9	8·2	6500·9	24·5	7683·6	8·2	8817·4	16·3
40	9858·7	8·4	6476·4	25·3	7675·4	8·4	8801·1	16·8
50	9850·3	8·7	6451·1	25·9	7667·0	8·7	8784·3	17·3
6° 0′	9841·6	8·8	6425·2	26·7	7658·3	8·9	8766·9	17·8
10	9832·8	9·2	6398·5	27·3	7649·4	9·1	8749·1	18·3
20	9823·6	9·3	6371·2	28·1	7640·3	9·3	8730·8	18·7
30	9814·3	9·6	6343·1	28·8	7631·0	9·6	8712·1	19·2
40	9804·7	9·9	6314·3	29·6	7621·4	9·9	8692·9	19·7
50	9794·8	10·1	6284·7	30·2	7611·5	10·1	8673·2	20·1
7° 0′	9784·7	10·3	6254·5	31·0	7601·4	10·3	8653·1	20·7
10	9774·4	10·5	6223·5	31·6	7591·1	10·5	8632·4	21·1
20	9763·9	10·8	6191·9	32·4	7580·6	10·8	8611·3	21·6
30	9753·1	11·1	6159·5	33·1	7569·8	11·1	8589·2	22·0
40	9742·0	11·2	6126·4	33·8	7558·7	11·2	8567·7	22·6
50	9730·8	11·5	6092·6	34·5	7547·5	11·5	8545·1	23·0
8° 0′	9719·3		6058·1		7536·0		8522·1	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log *M*	Δ	log *N*	Δ	log *r*	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.801	+	6.804	+	6.803	+	— 20	—
8° 0′	8193·2	35·3	6715·4	11·7	2454·3	23·5	6.393 509	5
10	8228·5	35·9	6727·1	12·0	2477·8	23·9	504	4
20	8264·4	36·6	6739·1	12·2	2501·7	24·4	500	5
30	8301·0	37·4	6751·3	12·4	2526·1	25·0	495	5
40	8338·4	38·0	6763·7	12·7	2551·1	25·3	490	5
50	8376·4	38·7	6776·4	12·9	2576·4	25·8	485	5
9° 0′	8415·1	39·5	6789·3	13·2	2602·2	26·3	6.393 480	6
10	8454·6	40·1	6802·5	13·4	2628·5	26·8	474	5
20	8494·7	40·9	6815·9	13·6	2655·3	27·2	469	6
30	8535·6	41·5	6829·5	13·8	2682·5	27·7	463	5
40	8577·1	42·2	6843·3	14·1	2710·2	28·2	458	6
50	8619·3	42·9	6857·4	14·3	2738·4	28·6	452	5
10° 0′	8662·2	43·7	6871·7	14·5	2767·0	29·0	6.393 447	6
10	8705·9	44·3	6886·2	14·8	2796·0	29·6	441	6
20	8750·2	45·0	6901·0	15·0	2825·6	30·0	435	6
30	8795·2	45·6	6916·0	15·2	2855·6	30·4	429	6
40	8840·8	46·4	6931·2	15·5	2886·0	30·9	423	6
50	8887·2	47·0	6946·7	15·7	2916·9	31·4	417	7
11° 0′	8934·2	47·8	6962·4	15·9	2948·3	31·8	6.393 410	6
10	8982·0	48·4	6978·3	16·1	2980·1	32·3	404	6
20	9030·4	49·1	6994·4	16·4	3012·4	32·7	398	7
30	9079·5	49·7	7010·8	16·6	3045·1	33·2	391	7
40	9129·2	50·5	7027·4	16·8	3078·3	33·6	384	6
50	9179·7	51·1	7044·2	17·0	3111·9	34·1	378	7
12° 0′	9230·8	51·8	7061·2	17·3	3146·0	34·6	6.393 371	7
10	9282·6	52·5	7078·5	17·5	3180·6	34·9	364	7
20	9335·1	53·1	7096·0	17·7	3215·5	35·5	357	7
30	9388·2	53·8	7113·7	17·9	3251·0	35·8	350	7
40	9442·0	54·5	7131·6	18·2	3286·8	36·3	343	8
50	9496·5	55·1	7149·8	18·4	3323·1	36·8	335	7
13° 0′	9551·6	55·8	7168·2	18·6	3359·9	37·2	6.393 328	7
10	9607·4	56·5	7186·8	18·8	3397·1	37·6	321	8
20	9663·9	57·1	7205·6	19·0	3434·7	38·1	313	8
30	9721·0	57·7	7224·6	19·3	3472·8	38·5	305	7
40	9778·7	58·5	7243·9	19·4	3511·3	39·0	298	8
50	9837·2	59·0	7263·3	19·7	3550·3	39·3	290	8
14° 0′	9896·2	59·8	7283·0	19·9	3589·6	39·9	6.393 282	8
10	9956·0	60·3	7302·9	20·2	3629·5	40·2	274	8
20	*0016·3	61·1	7323·1	20·3	3669·7	40·7	266	8
30	0077·4	61·6	7343·4	20·6	3710·4	41·1	258	8
40	0139·0	62·3	7364·0	20·7	3751·5	41·5	250	9
50	0201·3	63·0	7384·7	21·0	3793·0	42·0	241	8
15° 0′	0264·3	63·6	7405·7	21·2	3835·0	42·4	6.393 233	8
10	0327·9	64·2	7426·9	21·4	3877·4	42·8	225	9
20	0392·1	64·8	7448·3	21·6	3920·2	43·1	216	9
30	0456·9	65·5	7469·9	21·9	3963·4	43·7	207	8
40	0522·4	66·1	7491·8	22·0	4007·1	44·1	199	9
50	0588·5	66·8	7513·8	22·3	4051·2	44·5	190	9
16° 0′	0655·3		7536·1		4095·7		181	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.512 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
8° 0′	9719·3	11·8	6058·1	35·2	7536·0	11·8	8522·1	23·5
10	9707·5	12·0	6022·9	36·0	7524·2	12·0	8498·6	23·9
20	9695·5	12·2	5986·9	36·6	7512·2	12·2	8474·7	24·4
30	9683·3	12·4	5950·3	37·3	7500·0	12·4	8450·3	24·9
40	9670·9	12·7	5913·0	38·1	7487·6	12·7	8425·4	25·4
50	9658·2	12·9	5874·9	38·7	7474·9	12·9	8400·0	25·8
9° 0′	9645·3	13·2	5836·2	39·5	7462·0	13·2	8374·2	26·3
10	9632·1	13·3	5796·7	40·1	7448·8	13·3	8347·9	26·8
20	9618·8	13·6	5756·6	40·8	7435·5	13·6	8321·1	27·2
30	9605·2	13·9	5715·8	41·6	7421·9	13·9	8293·9	27·7
40	9591·3	14·1	5674·2	42·2	7408·0	14·1	8266·2	28·1
50	9577·2	14·3	5632·0	42·9	7393·9	14·3	8238·1	28·6
10° 0′	9562·9	14·5	5589·1	43·6	7379·6	14·5	8209·5	29·1
10	9548·4	14·6	5545·5	44·3	7365·1	14·8	8180·4	29·6
20	9533·6	15·0	5501·2	45·0	7350·3	15·0	8150·8	29·9
30	9518·6	15·2	5456·2	45·7	7335·3	15·2	8120·9	30·5
40	9503·4	15·5	5410·5	46·4	7320·1	15·5	8090·4	30·9
50	9487·9	15·6	5364·1	47·0	7304·6	15·6	8059·5	31·4
11° 0′	9472·3	15·9	5317·1	47·7	7289·0	15·9	8028·1	31·8
10	9456·4	16·2	5269·4	48·5	7273·1	16·2	7996·3	32·3
20	9440·2	16·3	5220·9	49·0	7256·9	16·4	7964·0	32·7
30	9423·9	16·6	5171·9	49·8	7240·5	16·5	7931·3	33·2
40	9407·3	16·8	5122·1	50·5	7224·0	16·9	7898·1	33·6
50	9390·4	17·1	5071·6	51·1	7207·1	17·0	7864·5	34·1
12° 0′	9373·4	17·3	5020·5	51·8	7190·1	17·3	7830·4	34·5
10	9356·1	17·4	4968·7	52·4	7172·8	17·5	7795·9	35·0
20	9338·7	17·8	4916·3	53·2	7155·3	17·7	7760·9	35·4
30	9320·9	17·9	4863·1	53·8	7137·6	17·9	7725·5	35·9
40	9303·0	18·1	4809·3	54·5	7119·7	18·2	7689·6	36·3
50	9284·9	18·4	4754·8	55·1	7101·5	18·3	7653·3	36·7
13° 0′	9266·5	18·6	4699·7	55·8	7083·2	18·6	7616·6	37·2
10	9247·9	18·8	4643·9	56·4	7064·6	18·8	7579·4	37·7
20	9229·1	19·1	4587·5	57·1	7045·8	19·1	7541·7	38·1
30	9210·0	19·2	4530·4	57·8	7026·7	19·2	7503·6	38·5
40	9190·8	19·5	4472·6	58·4	7007·5	19·5	7465·1	38·9
50	9171·3	19·7	4414·2	59·1	6988·0	19·7	7426·2	39.4
14° 0′	9151·6	19·9	4355·1	59·7	6968·3	19·9	7386·8	39·8
10	9131·7	20·1	4295·4	60·4	6948·4	20·1	7347·0	40·3
20	9111·6	20·4	4235·0	61·0	6928·3	20·4	7306·7	40·6
30	9091·2	20·5	4174·0	61·7	6907·9	20·5	7266·1	41·2
40	9070·7	20·8	4112·3	62·3	6887·4	20·8	7224·9	41·5
50	9049·9	21·0	4050·0	62·9	6866·6	21·0	7183·4	42·0
15° 0′	9028·9	21·2	3987·1	63·6	6845·6	21·2	7141·4	42·4
10	9007·7	21·4	3923·5	64·3	6824·4	21·4	7099·0	42·8
20	8986·3	21·6	3859·2	64·8	6803·0	21·6	7056·2	43·2
30	8964·7	21·8	3794·4	65·5	6781·4	21·8	7013·0	43·7
40	8942·9	22·1	3728·9	66·1	6759·6	22·1	6969·3	44·0
50	8920·8	22·2	3662·8	66·8	6737·5	22·2	6925·3	44·5
16° 0′	8898·6		3596·0		6715·3		6880·8	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log M	Δ	log N	Δ	log r	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.802		6.804		6.803		— 20	—
16° 0′	0655·3	67·4	7536·1	22·4	4095·7	44·9	6.393 181	9
10	0722·7	67·9	7558·5	22·7	4140·6	45·3	172	9
20	0790·6	68·7	7581·2	22·8	4185·9	45·7	163	9
30	0859·3	69·2	7604·0	23·1	4231·6	46·2	154	10
40	0928·5	69·8	7627·1	23·3	4277·8	46·6	144	9
50	0998·3	70·5	7650·4	23·5	4324·4	46·9	135	9
17° 0′	1068·8	71·1	7673·9	23·7	4371·3	47·4	6.393 126	10
10	1139·9	71·6	7697·6	23·9	4418·7	47·8	116	9
20	1211·5	72·3	7721·5	24·1	4466·5	48·2	107	10
30	1283·8	72·9	7745·6	24·3	4514·7	48·6	097	10
40	1356·7	73·5	7769·9	24·5	4563·3	49·0	087	9
50	1430·2	74·1	7794·4	24·7	4612·3	49·4	078	10
18° 0′	1504·3	74·7	7819·1	24·9	4661·7	49·8	6.393 068	10
10	1579·0	75·3	7844·0	25·0	4711·5	50·2	058	10
20	1654·3	75·8	7869·0	25·3	4761·7	50·5	048	10
30	1730·1	76·5	7894·3	25·5	4812·2	51·0	038	11
40	1806·6	77·1	7919·8	25·7	4863·2	51·4	027	10
50	1883·7	77·6	7945·5	25·9	4914·6	51·7	017	10
19° 0′	1961·3	78·2	7971·4	26·1	4966·3	52·2	6.393 007	11
10	2039·5	78·8	7997·5	26·2	5018·5	52·5	6.392 996	10
20	2118·3	79·4	8023·7	26·5	5071·0	52·9	986	11
30	2197·7	79·9	8050·2	26·6	5123·9	53·3	975	10
40	2277·6	80·5	8076·8	26·9	5177·2	53·7	965	11
50	2358·1	81·1	8103·7	27·0	5230·9	54·0	954	11
20° 0′	2439·2	81·6	8130·7	27·2	5284·9	54·5	6.392 943	11
10	2520·8	82·2	8157·9	27·4	5339·4	54·8	932	11
20	2603·0	82·8	8185·3	27·6	5394·2	55·2	921	11
30	2685·8	83·3	8212·9	27·8	5449·4	55·5	910	11
40	2769·1	83·9	8240·7	27·9	5504·9	55·9	899	11
50	2853·0	84·4	8268·6	28·2	5560·8	56·3	888	11
21° 0′	2937·4	85·0	8296·8	28·3	5617·1	56·6	6.392 877	12
10	3022·4	85·5	8325·1	28·5	5673·7	57·1	865	11
20	3107·9	86·1	8353·6	28·7	5730·8	57·3	854	12
30	3194·0	86·6	8382·3	28·9	5788·1	57·8	842	11
40	3280·6	87·1	8411·2	29·0	5845·9	58·1	831	12
50	3367·7	87·7	8440·2	29·2	5904·0	58·4	819	11
22° 0′	3455·4	88·2	8469·4	29·4	5962·4	58·8	6.392 808	12
10	3543·6	88·8	8498·8	29·6	6021·2	59·2	796	12
20	3632·4	89·2	8528·4	29·8	6080·4	59·5	784	12
30	3721·6	89·8	8558·2	29·9	6139·9	59·8	772	12
40	3811·4	90·3	8588·1	30·1	6199·7	60·2	760	12
50	3901·7	90·8	8618·2	30·3	6259·9	60·6	748	12
23° 0′	3992·5	91·3	8648·5	30·4	6320·5	60·9	6.392 736	12
10	4083·8	91·9	8678·9	30·6	6381·4	61·2	724	13
20	4175·7	92·3	8709·5	30·8	6442·6	61·6	711	12
30	4268·0	92·9	8740·3	30·9	6504·2	61·9	699	12
40	4360·9	93·3	8771·2	31·2	6566·1	62·2	687	13
50	4454·2	93·9	8802·4	31·2	6628·3	62·5	674	12
24° 0′	4548·1		8833·6		6690·8		6.392 662	

vgl. § 33. S. 213.

φ	*log W*	*Δ*	*log* [1]	*Δ*	*log* [2]	*Δ*	*log V*²	*Δ*
	9.999 —10	—	8.512 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
16° 0′	8898·6	22·5	3596·0	67·3	6715·3	22·5	6880·8	44·9
10	8876·1	22·6	3528·7	68·0	6692·8	22·6	6835·9	45·4
20	8853·5	22·9	3460·7	68·6	6670·2	22·9	6790·5	45·7
30	8830·6	23·1	3392·1	69·2	6647·3	23·1	6744·8	46·2
40	8807·5	23·3	3322·9	69·9	6624·2	23·3	6698·6	46·5
50	8784·2	23·5	3253·0	70·5	6600·9	23·5	6652·1	47·0
17° 0′	8760·7	23·6	3182·5	71·0	6577·4	23·6	6605·1	47·4
10	8737·1	23·9	3111·5	71·6	6553·8	23·9	6557·7	47·8
20	8713·2	24·1	3039·9	72·4	6529·9	24·1	6519·9	48·2
30	8689·1	24·3	2967·5	72·9	6505·8	24·3	6461·7	48·5
40	8664·8	24·5	2894·6	73·5	6481·5	24·5	6413·2	49·0
50	8640·3	24·7	2821·1	74·1	6457·0	24·7	6364·2	49·4
18° 0′	8615·6	24·9	2747·0	74·7	6432·3	24·9	6314·8	49·8
10	8590·7	25·1	2672·3	75·2	6407·4	25·1	6265·0	50·2
20	8565·6	25·3	2597·1	75·9	6382·3	25·3	6214·8	50·6
30	8540·3	25·5	2521·2	76·5	6357·0	25·5	6164·2	51·0
40	8514·8	25·7	2444·7	77·0	6331·5	25·7	6113·2	51·3
50	8489·1	25·8	2367·7	77·6	6305·8	25·9	6061·9	51·8
19° 0′	8463·3	26·1	2290·1	78·3	6279·9	26·0	6010·1	52·1
10	8437·2	26·3	2211·8	78·7	6253·9	26·3	5958·0	52·6
20	8410·9	26·4	2133·1	79·4	6227·6	26·4	5905·4	52·9
30	8384·5	26·7	2053·7	80·0	6201·2	26·7	5852·5	53·3
40	8357·8	26·8	1973·7	80·5	6174·5	26·8	5799·2	53·6
50	8331·0	27·0	1893·2	81·0	6147·7	27·1	5745·6	54·1
20° 0′	8304·0	27·3	1812·2	81·7	6120·6	27·1	5691·5	54·4
10	8276·7	27·4	1730·5	82·2	6093·4	27·4	5637·1	54·8
20	8249·3	27·6	1648·3	82·8	6066·0	27·6	5582·3	55·2
30	8221·7	27·7	1565·5	83·3	6038·4	27·7	5527·1	55·6
40	8194·0	28·0	1482·2	83·9	6010·7	28·0	5471·5	55·9
50	8166·0	28·1	1398·3	84·4	5982·7	28·1	5415·6	56·3
21° 0′	8137·9	28·4	1313·9	85·0	5954·6	28·4	5359·3	56·6
10	8109·5	28·5	1228·9	85·5	5926·2	28·5	5302·7	57·0
20	8081·0	28·6	1143·4	86·1	5897·7	28·7	5245·7	57·4
30	8052·4	28·9	1057·3	86·6	5869·0	28·8	5188·3	57·7
40	8023·5	29·1	0970·7	87·1	5840·2	29·1	5130·6	58·1
50	7994·4	29·2	0883·6	87·7	5811·1	29·2	5072·5	58·5
22° 0′	7965·2	29·4	0795·9	88·2	5781·9	29·4	5014·0	58·8
10	7935·8	29·6	0707·7	88·7	5752·5	29·6	4955·2	59·1
20	7906·2	29·7	0619·0	89·3	5722·9	29·7	4896·1	59·5
30	7876·5	29·9	0529·7	89·8	5693·2	30·0	4836·6	59·9
40	7846·6	30·1	0439·9	90·3	5663·2	30·1	4776·7	60·2
50	7816·5	30·3	0349·6	90·8	5633·1	30·2	4716·5	60·5
23° 0′	7786·2	30·5	0258·8	91·3	5602·9	30·5	4656·0	60·9
10	7755·7	30·6	0167·5	91·8	5572·4	30·6	4595·1	61·3
20	7725·1	30·8	0075·7	92·4	5541·8	30·8	4533·8	61·5
30	7694·3	30·9	*9983·3	92·8	5511·0	30·9	4472·3	61·9
40	7663·4	31·1	9890·5	93·4	5480·1	31·1	4410·4	62·3
50	7632·3	31·3	9797·1	93·8	5449·0	31·3	4348·1	62·5
24° 0′	7601·0		9703·3		5417·7		4285·6	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log M	Δ	log N	Δ	log r	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.802	+	6.804	+	6.803	+	— 20	—
24° 0′	4548·1	94·3	8833·6	31·5	6690·8	62·9	6.392 662	13
10	4642·4	94·8	8865·1	31·6	6753·7	63·3	649	12
20	4737·2	95·4	8896·7	31·8	6817·0	63·5	637	13
30	4832·6	95·8	8928·5	31·9	6880·5	63·9	624	13
40	4928·4	96·3	8960·4	32·1	6944·4	64·2	611	13
50	5024·7	96·7	8992·5	32·3	7008·6	64·5	598	13
25° 0′	5121·4	97·2	9024·8	32·4	7073·1	64·8	6.392 585	13
10	5218·6	97·8	9057·2	32·5	7137·9	65·2	572	13
20	5316·4	98·1	9089·7	32·8	7203·1	65·4	559	13
30	5414·5	98·7	9122·5	32·9	7268·5	65·8	546	13
40	5513·2	99·1	9155·4	33·0	7334·3	66·0	533	13
50	5612·3	99·6	9188·4	33·2	7400·3	66·4	520	13
26° 0′	5711·9	100·0	9221·6	33·3	7466·7	66·7	6.392 507	14
10	5811·9	100·4	9254·9	33·5	7533·4	67·0	493	13
20	5912·3	101·0	9288·4	33·6	7600·4	67·3	480	14
30	6013·3	101·3	9322·0	33·8	7667·7	67·5	466	13
40	6114·6	101·8	9355·8	34·0	7735·2	67·9	453	14
50	6216·4	102·3	9389·8	34·1	7803·1	68·2	439	13
27° 0′	6318·7	102·7	9423·9	34·2	7871·3	68·4	6.392 426	14
10	6421·4	103·1	9458·1	34·3	7939·7	68·8	412	14
20	6524·5	103·5	9492·4	34·6	8008·5	69·0	398	13
30	6628·0	104·0	9527·0	34·6	8077·5	69·3	385	14
40	6732·0	104·4	9561·6	34·8	8146·8	69·6	371	14
50	6836·4	104·8	9596·4	34·9	8216·4	69·8	357	14
28° 0′	6941·2	105·2	9631·3	35·1	8286·2	70·2	6.392 343	14
10	7046·4	105·6	9666·4	35·2	8356·4	70·4	329	14
20	7152·0	106·0	9701·6	35·4	8426·8	70·7	315	15
30	7258·0	106·5	9737·0	35·4	8497·5	71·0	300	14
40	7364·5	106·8	9772·4	35·7	8568·5	71·2	286	14
50	7471·3	107·2	9808·1	35·7	8639·7	71·5	272	14
29° 0′	7578·5	107·7	9843·8	35·9	8711·2	71·7	6.392 258	15
10	7686·2	108·0	9879·7	36·0	8782·9	72·0	243	14
20	7794·2	108·4	9915·7	36·1	8854·9	72·3	229	14
30	7902·6	108·7	9951·8	36·3	8927·2	72·5	215	15
40	8011·3	109·2	9988·1	36·4	8999·7	72·8	200	14
50	8120·5	109·5	*0024·5	36·5	9072·5	73·0	186	15
30° 0′	8230·0	109·9	0061·0	36·6	9145·5	73·3	6.392 171	15
10	8339·9	110·3	0097·6	36·8	9218·8	73·5	156	14
20	8450·2	110·6	0134·4	36·8	9292·3	73·7	142	15
30	8560·8	111·0	0171·2	37·0	9366·0	74·0	127	15
40	8671·8	111·4	0208·2	37·1	9440·0	74·2	112	15
50	8783·2	111·7	0245·3	37·3	9514·2	74·5	097	15
31° 0′	8894·9	112·0	0282·6	37·3	9588·7	74·7	6.392 082	15
10	9006·9	112·4	0319·9	37·5	9663·4	74·9	067	15
20	9119·3	112·7	0357·4	37·6	9738·3	75·2	052	15
30	9232·0	113·1	0395·0	37·6	9813·5	75·4	037	15
40	9345·1	113·4	0432·6	37·8	9888·9	65·6	022	15
50	9458·5	113·7	0470·4	38·0	9964·5	65·8	007	15
32° 0′	9572·2		0508·4		*0040·3		6.391 992	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V^2	Δ
	9.999 —10	—	8.511 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
24° 0′	7601·0	31·5	9703·3	94·4	5417·7	31·5	4285·6	62·9
10	7569·5	31·6	9608·9	94·8	5386·2	31·6	4222·7	63·2
20	7537·9	31·7	9514·1	95·3	5354·6	31·7	4159·5	63·6
30	7506·2	32·0	9418·8	95·8	5322·9	32·0	4095·9	63·9
40	7474·2	32·1	9323·0	96·3	5290·9	32·1	4032·0	64·1
50	7442·1	32·2	9226·7	96·8	5258·8	32·2	3967·9	64·5
25° 0′	7409·9	32·4	9129·9	97·2	5226·6	32·4	3903·4	64·9
10	7377·5	32·6	9032·7	97·7	5194·2	32·6	3838·5	65·1
20	7344·9	32·7	8935·0	98·2	5161·6	32·7	3773·4	65·5
30	7312·2	32·9	8836·8	98·7	5128·9	32·9	3707·9	65·7
40	7279·3	33·0	8738·1	99·1	5096·0	33·1	3642·2	66·1
50	7246·3	33·2	8639·0	99·5	5062·9	33·1	3576·1	66·4
26° 0′	7213·1	33·4	8539·5	100·0	5029·8	33·4	3509·7	66·7
10	7179·7	33·5	8439·5	100·5	4996·4	33·5	3443·0	66·9
20	7146·2	33·6	8339·0	100·9	4962·9	33·6	3376·1	67·3
30	7112·6	33·8	8238·1	101·4	4929·3	33·8	3308·8	67·6
40	7078·8	33·9	8136·7	101·8	4895·5	33·9	3241·2	67·9
50	7044·9	34·1	8034·9	102·3	4861·6	34·1	3173·3	68·1
27° 0′	7010·8	34·2	7932·6	102·6	4827·5	34·2	3105·2	68·5
10	6976·6	34·4	7830·0	103·1	4793·3	34·4	3036·7	68·7
20	6942·2	34·5	7726·9	103·6	4758·9	34·5	2968·0	69·0
30	6907·7	34·7	7623·3	103·9	4724·4	34·7	2899·0	69·4
40	6873·0	34·8	7519·4	104·4	4689·7	34·8	2829·6	69·5
50	6838·2	34·9	7415·0	104·8	4654·9	34·9	2760·1	69·9
28° 0′	6803·3	35·1	7310·2	105·2	4620·0	35·1	2690·2	70·2
10	6768·2	35·2	7205·0	105·7	4584·9	35·2	2620·0	70·4
20	6733·0	35·3	7099·3	106·0	4549·7	35·3	2549·6	70·7
30	6697·7	35·5	6993·3	106·4	4514·4	35·5	2478·9	70·9
40	6662·2	35·6	6886·9	106·9	4478·9	35·6	2408·0	71·2
50	6626·6	35·8	6780·0	107·2	4443·3	35·8	2336·8	71·5
29° 0′	6590·8	35·8	6672·8	107·6	4407·5	35·8	2265·3	71·8
10	6555·0	36·0	6565·2	108·0	4371·7	36·0	2193·5	72·0
20	6519·0	36·2	6457·2	108·4	4335·7	36·2	2121·5	72·3
30	6482·8	36·2	6348·8	108·8	4299·5	36·2	2049·2	72·5
40	6446·6	36·4	6240·0	109·2	4263·3	36·4	1976·7	72·7
50	6410·2	36·5	6130·8	109·5	4226·9	36·5	1904·0	73·1
30° 0′	6373·7	36·7	6021·3	109·9	4190·4	36·7	1830·9	73·2
10	6337·0	36·7	5911·4	110·3	4153·7	36·7	1757·7	73·5
20	6300·3	36·9	5801·1	110·6	4117·0	36·9	1684·2	73·8
30	6263·4	37·0	5690·5	111·0	4080·1	37·0	1610·4	74·0
40	6226·4	37·1	5579·5	111·3	4043·1	37·1	1536·4	74·2
50	6189·3	37·2	5468·2	111·7	4006·0	37·2	1462·2	74·5
31° 0′	6152·1	37·4	5356·5	112·1	3968·8	37·4	1387·7	74·7
10	6114·7	37·4	5244·4	112·4	3931·4	37·5	1313·0	74·9
20	6077·3	37·6	5132·0	112·7	3893·9	37·5	1238·1	75·2
30	6039·7	37·7	5019·3	113·0	3856·4	37·7	1162·9	75·3
40	6002·0	37·8	4906·3	113·4	3818·7	37·8	1087·6	75·6
50	5964·2	37·9	4792·9	113·8	3780·9	37·9	1012·0	75·8
32° 0′	5926·3		4679·1		3743·0		0936·2	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log M	Δ	log N	Δ	log r	Δ	$\log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.802	+	6.805	+	6.804	+	—.20	—
32° 0′	9572·2	114·1	0508·4	38·0	0040·3	76·0	6.391 992	15
10	9686·3	114·3	0546·4	38·1	0116·3	76·3	977	16
20	9800·6	114·7	0584·5	38·2	0192·6	76·4	961	15
30	9915·3	115·0	0622·7	38·4	0269·0	76·7	946	15
40	*0030·3	115·3	0661·1	38·4	0345·7	76·9	931	16
50	0145·6	115·7	0699·5	38·5	0422·6	77·1	915	15
33° 0′	0261·3	115·9	0738·0	38·7	0499·7	77·2	6.391 900	15
10	0377·2	116·2	0776·7	38·7	0576·9	77·5	885	16
20	0493·4	116·5	0815·4	38·9	0654·4	77·7	869	15
30	0609·9	116·8	0854·3	38·9	0732·1	77·9	854	16
40	0726·7	117·1	0893·2	39·0	0810·0	78·0	838	16
50	0843·8	117·4	0932·2	39·2	0888·0	78·3	822	15
34° 0′	0961·2	117·6	0971·4	39·2	0966·3	78·4	6.391 807	16
10	1078·8	118·0	1010·6	39·3	1044·7	78·6	791	16
20	1196·8	118·2	1049·9	39·4	1123·3	78·8	775	15
30	1315·0	118·4	1089·3	39·5	1202·1	79·0	760	16
40	1433·4	118·8	1128·8	39·5	1281·1	79·1	744	16
50	1552·2	118·9	1168·3	39·7	1360·2	79·4	728	16
35° 0′	1671·1	119·3	1208·0	39·7	1439·6	79·5	6.391 712	16
10	1790·4	119·5	1247·7	39·9	1519·1	79·6	696	16
20	1909·9	119·7	1287·6	39·9	1598·7	79·8	680	16
30	2029·6	120·0	1327·5	40·0	1678·5	80·0	664	16
40	2149·6	120·2	1367·5	40·1	1758·5	80·2	648	16
50	2269·8	120·4	1407·6	40·1	1838·7	80·3	632	16
36° 0′	2390·2	120·7	1447·7	40·2	1919·0	80·4	6.391 616	16
10	2510·9	120·9	1487·9	40·3	1999·4	80·6	600	16
20	2631·8	121·2	1528·2	40·4	2080·0	80·8	584	16
30	2753·0	121·3	1568·6	40·5	2160·8	80·9	568	16
40	2874·3	121·6	1609·1	40·5	2241·7	81·0	552	17
50	2995·9	121·7	1649·6	40·6	2322·7	81·2	535	16
37° 0′	3117·6	122·0	1690·2	40·6	2403·9	81·3	6.391 519	16
10	3239·6	122·2	1730·8	40·7	2485·2	81·5	503	16
20	3361·8	122·4	1771·5	40·8	2566·7	81·5	487	17
30	3484·2	122·5	1812·3	40·9	2648·2	81·8	470	16
40	3606·7	122·8	1853·2	40·9	2730·0	81·8	454	16
50	3729·5	122·9	1894·1	41·0	2811·8	82·0	438	17
38° 0′	3852·4	123·1	1935·1	41·0	2893·8	82·0	6.391 421	16
10	3975·5	123·3	1976·1	41·1	2975·8	82·2	405	17
20	4098·8	123·5	2017·2	41·2	3058·0	82·3	388	16
30	4222·3	123·6	2058·4	41·2	3140·3	82·5	372	17
40	4345·9	123·8	2099·6	41·3	3222·8	82·5	355	16
50	4469·7	124·0	2140·9	41·3	3305·3	82·6	339	17
39° 0′	4593·7	124·1	2182·2	41·4	3387·9	82·8	6.391 322	16
10	4717·8	124·3	2223·6	41·4	3470·7	82·8	306	17
20	4842·1	124·4	2265·0	41·5	3553·5	83·0	289	16
30	4966·5	124·6	2306·5	41·5	3636·5	83·0	273	17
40	5091·1	124·7	2348·0	41·5	3719·5	83·2	256	17
50	5215·8	124·8	2389·5	41·7	3802·7	83·2	239	16
40° 0′	5340·6		2431·2		8885·9		6.391 223	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.511 —10	—	8.509 —10	—	0.002	—
32° 0′	5926·3	38·0	4679·1	114·0	3743·0	38·0	0936·2	76·1
10	5888·3	38·2	4565·1	114·4	3705·0	38·2	0860·1	76·2
20	5850·1	38·2	4450·7	114·7	3666·8	38·2	0783·2	76·5
30	5811·9	38·3	4336·0	115·0	3628·6	38·3	0707·4	76·7
40	5773·6	38·5	4221·0	115·3	3590·3	38·5	0630·7	76·8
50	5735·1	38·5	4105·7	115·6	3551·8	38·5	0553·9	77·1
33° 0′	5696·6	38·6	3990·1	116·0	3513·3	38·7	0476·8	77·3
10	5658·0	38·8	3874·1	116·2	3474·6	38·7	0399·5	77·5
20	5619·2	38 8	3757·9	116·5	3435·9	38·8	0322·0	77·7
30	5580·4	39·0	3641·4	116 8	3397·1	38·9	0244·3	77·8
40	5541·4	39·0	3524·6	117·1	3358·1	39·1	0166·5	78·1
50	5502·4	39·1	3407·5	117·4	3319·1	39·1	0088·4	78·2
34° 0′	5463·3	39·2	3290·1	117·6	3280·0	39·2	0010·2	78·5
10	5424·1	39 3	3172·5	117·9	3240·8	39·3	*9931·7	78·6
20	5384·8	39·4	3054·6	118·2	3201·5	39·4	9853·1	78·8
30	5345·4	39·5	2936·4	118·5	3162·1	39·5	9774·3	79·0
40	5305·9	39·6	2817·9	118·7	3122·6	39·6	9695·3	79·1
50	5266·3	39·7	2699·2	119·0	3083·0	39·7	9616·2	79·3
35° 0′	5226·6	39·7	2580·2	119·2	3043·3	39·6	9536·9	79·5
10	5186·9	39·8	2461·0	119·5	3003·7	39·9	9457·4	79·7
20	5147·1	39·9	2341·5	119·8	2963·8	40·0	9377·7	79·8
30	5107·2	40·0	2221·7	119·9	2923·8	40 0	9297·9	80·0
40	5067·2	40·1	2101·8	120·3	2883·8	40·0	9217·9	80·1
50	5027·1	40·2	1981·5	120·4	2843·8	40·2	9137·8	80·3
36° 0′	4986·9	40·2	1861·1	120·7	2803·6	40·2	9057·5	80·5
10	4946·7	40·3	1740·4	120·9	2763·4	40·3	8977·0	80·6
20	4906·4	40·4	1619·5	121·1	2723·1	40·4	8896·4	80·7
30	4866·0	40·4	1498·4	121·4	2682·7	40·4	8815·7	80·9
40	4825·6	40·5	1377·0	121·5	2642·3	40·5	8734·8	81·1
50	4785·1	40·6	1255·5	121·8	2601·8	40·6	8653·7	81·2
37° 0′	4744·5	40·7	1133·7	122·0	2561·2	40·7	8572·5	81·3
10	4703·8	40·7	1011·7	122·1	2520·5	40·7	8591·2	81·4
20	4663·1	40·8	0889·6	122·[illegible]	2479·8	40·8	8409·8	81·6
30	4622·3	40·9	0767·2	122·6	2439·0	40·9	8328·2	81·7
40	4581·4	40·9	0644·6	122·7	2398·1	40·9	8246·5	81·9
50	4540·5	41·0	0521·9	123·0	2357·2	41·0	8164·6	81·9
38° 0′	4499·5	41·0	0398·9	123·1	2316·2	41·0	8082·7	82·1
10	4458·5	41·1	0275·8	123·3	2275·2	41·1	8000·6	82·2
20	4417·4	41·2	0152·5	123·5	2234·1	41·2	7918·4	82·3
30	4376·2	41·2	0029·0	123·6	2192·9	41·2	7836·1	82·4
40	4335·0	41·2	*9905·4	123·8	2151·7	41·2	7753·7	82·6
50	4293·8	41·4	9781·6	124·0	2110·5	41·4	7671·1	82·6
39° 0′	4252·4	41·3	9657·6	124·1	2069·1	41·3	7588·5	82·8
10	4211·1	41·5	9533·5	124·3	2027·8	41·5	7505·7	82·8
20	4169·6	41·4	9409·2	124·4	1986·3	41·4	7422·9	82·9
30	4128·2	41·5	9284·8	124·5	1944·9	41·5	7340·0	83·1
40	4086·7	41·6	9160.0	124·7	1903·4	41·6	7256·9	83·1
50	4045·1	41·6	9035·6	124·9	1861·8	41·6	7173·8	83·2
40° 0′	4003·5		8910·7		1820·2		7090·6	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log M	Δ	log N	Δ	log r	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.803	−	6.805	+	6.804	−	−20	−
40° 0′	5340·6	125·0	2431·1	41·7	3885·9	83·3	6.391 223	17
10	5465·6	125·1	2472·8	41·7	3969·2	83·4	206	17
20	5590·7	125·2	2514·5	41·7	4052·6	83·5	189	16
30	5715·9	125·3	2556·2	41·8	4136·1	83·5	173	17
40	5841·2	125·4	2598·0	41·8	4219·6	83·6	156	17
50	5966·6	125·6	2639·8	41·9	4303·2	83·7	139	16
41° 0′	6092·2	125·7	2681·7	41·9	4386·9	83·8	6.391 123	17
10	6217·9	125·7	2723·6	41·9	4470·7	83·9	106	17
20	6343·6	125·9	2765·5	41·9	4554·6	83·9	089	17
30	6469·5	125·9	2807·4	42·0	4638·5	83·9	072	16
40	6595·4	126·1	2849·4	42·0	4722·4	84·1	056	17
50	6721·5	126·1	2891·4	42·1	4806·5	84·0	039	17
42° 0′	6847·6	126·2	2933·5	42·1	4890·5	84·2	6.391 022	17
10	6973·8	126·3	2975·6	42·0	4974·7	84·1	391 005	17
20	7100·1	126·3	3017·6	42·1	5058·8	84·3	*390 988	17
30	7226.4	126·4	3059·7	42·2	5143·1	84·3	971	16
40	7352·8	126·5	3101·9	42·2	5227·4	84·3	955	17
50	7479·3	126·5	3144·1	42·1	5311·7	84·3	938	17
43° 0′	7605·8	126·6	3186·2	42·2	5396·0	84·4	6.390 921	17
10	7732·4	126·7	3228·4	42·2	5480·4	84·4	904	17
20	7859·1	126·6	3270·6	42·3	5564·8	84·5	887	17
30	7985·7	126·8	3312·9	42·2	5649·3	84·5	870	17
40	8112·5	126·7	3355·1	42·3	5733·8	84·5	853	17
50	8239·2	126·8	3397·4	42·2	5818·3	84·5	836	17
44° 0′	8366·0	126·8	3439·6	42·3	5902·8	84·6	6.390 819	16
10	8492·8	126·9	3481·9	42·3	5987·4	84·5	803	17
20	8619·7	126·8	3524·2	42·3	6071·9	84·6	786	17
30	8746·5	126·9	3566·5	42·3	6156·5	84·6	769	17
40	8873·4	126·9	3608·8	42·3	6241·1	84·6	752	17
50	9000·3	126·9	3651·1	42·3	6325·7	84·6	735	17
45° 0′	9127·2	126·9	3693·4	42·3	6410·3	84·6	6.390 718	17
10	9254·1	126·9	3735·7	42·3	6494·9	84·6	701	17
20	9381·0	126·9	3778·0	42·3	6579·5	84·6	684	17
30	9507·9	126·9	3820·3	42·3	6664·1	84·6	667	17
40	9634·8	126·9	3862·6	42·2	6748·7	84·6	650	17
50	9761·7	126·8	3904·8	42·3	6833·3	84·5	633	17
46° 0′	9888·5	126·8	3947·1	42·3	6917·8	84·6	6.390 616	16
10	*0015·3	126·8	3989·4	42·3	7002·4	84·5	600	17
20	0142·1	126·8	4031·7	42·2	7086·9	84·5	583	17
30	0268·9	126·7	4073·9	42·3	7171·4	84·5	566	17
40	0395·6	126·7	4116·2	42·2	7255·9	84·5	549	17
50	0522·3	126·7	4158·4	42·2	7340·4	84·4	532	17
47° 0′	0649·0	126·6	4200·6	42·2	7424·8	84·4	6.390 515	17
10	0775·6	126·5	4242·8	42·2	7509·2	84·3	498	17
20	0902·1	126·5	4285·0	42·2	7593·5	84·4	481	16
30	0928·6	126·4	4327·2	42·1	7677·9	84·3	474	17
40	1155·0	126·4	4369·3	42·1	7762·2	84·2	448	17
50	1281·4	126·3	4411·4	42·1	7846·4	84·2	431	17
48° 0′	1407·7		4453·5		7930·6		6.390 414	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8·511 —10	—	8.509 —10	—	0.001	—
40° 0′	4003·5	41·7	8910·6	34·8	1820·2	41·7	7090·6	83·4
10	3961·8	41·7	8785·8	35·1	1778·5	41·7	7007·2	83·3
20	3920·1	41·7	8660·7	35·2	1736·8	41·7	6923·9	83·5
30	3878·4	41·8	8535·5	35·4	1695·1	41·8	6840·4	83·6
40	3836·6	41·8	8410·1	35·4	1653·3	41·8	6756·8	83·6
50	3794·8	41·9	8284·7	35·6	1611·5	41·9	6673·2	83·7
41° 0′	3752·9	41·8	8159·1	35·6	1569·6	41·8	6589·5	83·8
10	3711·1	42·0	8033·5	35·8	1527·8	42·0	6505·7	83·9
20	3669·1	41·9	7907·7	35·8	1485·8	41·9	6421·9	83·9
30	3627·2	42·0	7781·9	36·0	1443·9	42·0	6338·0	84·0
40	3585·2	42·0	7655·9	36·0	1401·9	42·0	6254·0	84·0
50	3543·2	42·0	7529·9	36·1	1359·9	42·1	6170·0	84·1
42° 0′	3501·2	42·1	7403·8	36·2	1317·8	42·0	6085·9	84·1
10	3459·1	42·1	7277·6	36·3	1275·8	42·1	6001·8	84·2
20	3417·0	42·1	7151·3	36·4	1233·7	42·1	5917·6	84·2
30	3374·9	42·2	7024·9	36·4	1191·6	42·2	5833·4	84·3
40	3332·7	42·1	6898·5	36·5	1149·4	42·1	5749·1	84·3
50	3290·6	42·2	6772·0	36·5	1107·3	42·2	5664·8	84·4
43° 0′	3248·4	42·2	6645·5	36·6	1065·1	42·2	5580·4	84·4
10	3206·2	42·2	6518·9	36·6	1022·9	42·2	5496·0	84·4
20	3164·0	42·2	6392·3	36 7	0980·7	42·2	5411·6	84·5
30	3121·8	42·3	6265·6	36·7	0938·5	42·3	5327·1	84·5
40	3079·5	42·2	6138·9	36·8	0896·2	42·2	5242·6	84·5
50	3037·3	42·3	6012·1	36·8	0854·0	42·3	5158·1	84·5
44° 0′	2995·0	42·3	5885·3	36·8	0811·7	42·3	5073·6	84·5
10	2952·7	42·2	5758·5	36·9	0769·4	42·3	4989·1	84·6
20	2910·5	42·3	5631·6	36·8	0727·1	42·2	4904·5	84·6
30	2868·2	42·3	5504·8	36·9	0684·9	42·3	4819·9	84·6
40	2825·9	42·3	5377·9	36·9	0642·6	42·3	4735·3	84·6
50	2783·6	42·3	5251·0	36·9	0600·3	42·3	4650·7	84·6
45° 0′	2741·3	42·3	5124·1	36·9	0558 0	42·3	4566·1	84·6
10	2699·0	42·3	4997·2	36·9	0515·7	42·3	4481·5	84·6
20	2656·7	42·3	4870·3	36·9	0473·4	42·3	4396·9	84·6
30	2614·4	42·3	4743·4	36·9	0431·1	42·3	4312·3	84·5
40	2572·1	42·3	4616·5	36·8	0388·8	42·3	4227·8	84·6
50	2529·8	42·3	4489·7	36·9	0346·5	42·3	4143·2	84·6
46° 0′	2487·5	42·3	4362·8	36·8	0304·2	42·3	4058 6	84·5
10	2445·2	42·2	4236·0	36·8	0261·9	42·2	3974·1	84·6
20	2403·0	42·3	4109·2	36·8	0219·7	42·3	3889·5	84·5
30	2360·7	42·2	3982·4	36·7	0177·4	42·2	3805·0	84·5
40	2318·5	42·3	3855·7	36·7	0135·2	42·3	3720·5	84·4
50	2276·2	42·2	3729·0	36·6	0092·9	42·2	3636·1	84·5
47° 0′	2234·0	42·2	3602·4	36·6	0050·7	42·2	3551·6	84·4
10	2191·8	42·2	3475·8	36·6	0008·5	42·2	3467·2	84·3
20	2149·6	42·1	3349·2	36·5	*9966·3	42·1	3382·9	84·3
30	2107·5	42·2	3222·7	36·4	9924·2	42·2	3298·6	84·3
40	2065·3	42·1	3096·3	36·3	9882·0	42·1	3214·3	84·3
50	2023·2	42·1	2970·0	36·3	9839·9	42·1	3130·0	84·1
48° 0′	1981·1		2843·7		9797·8		3045·9	

vgl. § 38. S. 213.

φ	log M	Δ	log N	Δ	log r	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.804	+	6.805	+	6.804	+	− 20	−
48° 0′	1407·7	126·2	4453·5	42·1	7930·6	84·1	6.390 414	17
10	1533·9	126·1	4495·6	42·0	8014·7	84·1	397	17
20	1660·0	126·1	4537·6	42·0	8098·8	84·0	380	17
30	1786·1	125·9	4579·6	42·0	8182·8	84·0	363	16
40	1912·0	125·9	4621·6	42·0	8266·8	83·9	347	17
50	2037·9	125·8	4663·6	41·9	8350·7	83·9	330	17
49° 0′	2163·7	125·6	4705·5	41·9	8434·6	83·8	6.390 313	17
10	2289·3	125·6	4747·4	41·9	8518·4	83·7	296	16
20	2414·9	125·5	4789·3	41·8	8602·1	83·6	280	17
30	2540·4	125·3	4831·1	41·8	8685·7	83·6	263	17
40	2665·7	125·2	4872·9	41·7	8769·3	83·5	246	17
50	2790·9	125·1	4914·6	41·7	8852·8	83·4	229	16
50° 0′	2916·0	125·0	4956·3	41·7	8936·2	83·3	6.390 213	17
10	3041·0	124·9	4998·0	41·6	9019·5	83·2	196	17
20	3165·9	124·7	5039·6	41·6	9102·7	83·2	179	16
30	3290·6	124·6	5081·2	41·5	9185·9	83·0	163	17
40	3415·2	124·4	5122·7	41·5	9268·9	83·0	146	16
50	3539·6	124·3	5164·2	41·4	9351·9	82·8	130	17
51° 0′	3663·9	124·1	5205·6	41·4	9434·7	82·8	6.390 113	17
10	3788·0	124·0	5247·0	41·3	9517·5	82·7	096	16
20	3912·0	123·8	5288·3	41·3	9600·2	82·5	080	17
30	4035·8	123·7	5329·6	41·2	9682·7	82·4	063	16
40	4159·5	123·5	5370·8	41·2	9765·1	82·4	047	16
50	4283·0	123·3	5412·0	41·1	9847·5	82·2	031	17
52° 0′	4406·3	123·1	5453·1	41·0	9929·7	82·1	6.390 014	16
10	4529·4	123·0	5494·1	41·0	*0011·8	82·0	389 998	17
20	4652·4	122·8	5535·1	40·9	0093·8	81·8	981	16
30	4775·2	122·6	5576·0	40·9	0175·6	81·7	965	16
40	4897·8	122·4	5616·9	40·8	0257·3	81·6	949	17
50	5020·2	122·2	5657·7	40·7	0338·9	81·5	932	16
53° 0′	5142·4	122·0	5698·4	40·7	0420·4	81·3	6.389 916	16
10	5264·4	121·8	5739·1	40·6	0501·7	81·2	900	17
20	5386·2	121·5	5779·7	40·5	0582·9	81·1	883	16
30	5507·7	121·4	5820·2	40·5	0664·0	80·9	867	16
40	5629·1	121·2	5860·7	40·3	0774·9	80·7	851	16
50	5750·3	120·9	5901·0	40·4	0825·6	80·7	835	16
54° 0′	5871·2	120·7	5941·3	40·3	0906·3	80·4	6.389 819	16
10	5991·9	120·4	5981·6	40·1	0986·7	80·3	803	16
20	6112·3	120·3	6021·7	40·1	1067·0	80·2	787	16
30	6232·6	120·0	6061·8	40·0	1147·2	80·0	771	16
40	6352·6	119·7	6101·8	39·9	1227·2	79·8	755	16
50	6472·3	119·6	6141·7	39·9	1307·0	79·7	739	16
55° 0′	6591·8	119·3	6181·6	39·7	1386·7	79·5	6.389 723	15
10	6711·1	119·0	6221·3	39·7	1466·2	79·4	707	16
20	6830·1	118·8	6261·0	39·6	1545·6	79·1	691	16
30	6948·9	118·4	6300 6	39·5	1624·7	79·0	675	16
40	7067·3	118·3	6340·1	39·4	1703·7	78·8	659	16
50	7185·6	117·9	6379·5	39·3	1782·5	78·6	643	15
56° 0′	7303·5		6418·8		1861·1		6.389 628	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.510 —10	—	8.508 —10	—	0.001	—
48° 0′	1981·1	42·0	2843·7	126·2	9797·8	42·0	3045·9	84·2
10	1939·1	42·1	2717·5	126·2	9755·8	42·1	2961·7	84·1
20	1897·0	42·0	2591·3	126·0	9713·7	42·0	2877·6	84·0
30	1855·0	42·0	2465·3	126·0	9671·7	42·0	2793·6	84·0
40	1813·0	41·9	2339·3	125·9	9629·7	42·0	2709·6	83·9
50	1771·1	42·0	2213·4	125·7	9587·7	41·9	2625·7	83·8
49° 0′	1729·1	41·9	2087·7	125·7	9545·8	41·9	2541·9	83·8
10	1687·2	41·8	1962·0	125·6	9503·9	41·8	2458·1	83·7
20	1645·4	41·8	1836·4	125·4	9462·1	41·8	2374·4	83·7
30	1603·6	41·8	1711·0	125·4	9420·3	41·8	2290·7	83·5
40	1561·8	41·8	1585·6	125·2	9378·5	41·8	2207·2	83·5
50	1520·0	41·7	1460·4	125·1	9336·7	41·7	2123·7	83·4
50° 0′	1478·3	41·6	1335·3	125·0	9295·0	41·6	2040·3	83·4
10	1436·7	41·6	1210·3	124·8	9253·4	41·6	1956·9	83·2
20	1395·1	41·6	1085·5	124·8	9211·8	41·6	1873·7	83·1
30	1353·5	41·5	0960·7	124·5	9170·2	41·5	1790·6	83·1
40	1312·0	41·5	0836·2	124·5	9128·7	41·5	1707·5	82·9
50	1270·5	41·5	0711·7	124·3	9087·2	41·5	1624·6	82·9
51° 0′	1229·0	41·3	0587·4	124·1	9045·7	41·3	1541·7	82·8
10	1187·7	41·4	0463·3	124·0	9004·4	41·4	1458·9	82·6
20	1146·3	41·2	0339·3	123·8	8963·0	41·2	1376·3	82·6
30	1105·1	41·3	0215·5	123·7	8921·8	41·3	1293·7	82·4
40	1063·8	41·1	0091·8	123·5	8880·5	41·1	1211·3	82·3
50	1022·7	41·1	*9968·3	123·3	8839·4	41·1	1129·0	82·2
52° 0′	0981·6	41·1	9845·0	123·1	8798·3	41·1	1046·8	82·1
10	0940·5	41·0	9721·9	123·0	8757·2	41·0	0964·7	82·0
20	0899·5	40·9	9598·9	122·8	8716·2	40·9	0882·7	81·9
30	0858·6	40·8	9476·1	122·5	8675·3	40·8	0800·8	81·7
40	0817·8	40·8	9353·6	122·4	8634·5	40·8	0719·1	81·6
50	0777·0	40·8	9231·2	122·2	8593·7	40·8	0637·5	81·5
53° 0′	0736·2	40·6	9109·0	122·0	8552·9	40·6	0556·0	81·3
10	0695·6	40·6	8987·0	121·8	8512·3	40·6	0474·7	81·2
20	0655·0	40·6	8865·2	121·6	8471·7	40·6	0393·5	81·0
30	0614·4	40·4	8743·6	121·4	8431·3	40·4	0312·5	80·9
40	0574·0	40·4	8622·2	121·1	8390·7	40·4	0231·6	80·8
50	0533·6	40·3	8501·1	120·9	8350·3	40·3	0150·8	80·6
54° 0′	0493·3	40·2	8380·2	120·7	8310·0	40·3	0070·2	80·5
10	0453·1	40·2	8259·5	120·5	8269·7	40·1	*9989·7	80·3
20	0412·9	40·1	8139·0	120·3	8229·6	40·1	9909·4	80·2
30	0372·8	40·0	8018·7	120·0	8189·5	40·0	9829·2	80·0
40	0332·8	39·9	7898·7	119·7	8149·5	39·9	9749·2	79·8
50	0292·9	39·8	7779·0	119·5	8109·6	39·8	9669·4	79·7
55° 0′	0253·1	39·8	7659·5	119·3	8069·8	39·8	9589·7	79·5
10	0213·3	39·7	7540·2	119·0	8030·0	39·7	9510·2	79·3
20	0173·6	39·5	7421·2	118·7	7990·3	39·5	9430·9	79·2
30	0134·1	39·5	7302·5	118·5	7950·8	39·5	9351·7	79·0
40	0094·6	39·4	7184·0	118·2	7911·3	39·4	9272·7	78·8
50	0055·2	39·4	7065·8	118·0	7871·9	39·4	9193·9	78·6
56° 0′	0015·8		6947·8		7832·5		9115·3	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log M	Δ	log N	Δ	log r	Δ	log $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.804	+	6.805	+	6.805	+	— 20	—
56° 0′	7303·5	117·7	6418·8	39·2	1861·1	78·5	6.389 628	16
10	7421·2	117·4	6458·0	39·1	1939·6	78·3	612	15
20	7538·6	117·1	6497·1	39·1	2017·9	78·0	597	16
30	7655·7	116·8	6536·2	38·9	2095·9	77·9	581	16
40	7772·5	116·5	6575·1	38·9	2173·8	77·7	565	15
50	7889·0	116·3	6614·0	38·7	2251·5	77·5	550	16
57° 0′	8005·3	115·9	6652·7	38·7	2329·0	77·3	6.389 534	15
10	8121·2	115·6	6691·4	38·5	2406·3	77·1	519	16
20	8236·8	115·4	6729·9	38·4	2483·4	76·8	503	15
30	8352·2	115·0	6768·3	38·4	2560·2	76·7	488	15
40	8467·2	114·7	6806·7	38·2	2636·9	76·5	473	16
50	8581·9	114·4	6844·9	38·1	2713·4	76·3	457	15
58° 0′	8696·3	114·0	6883·0	38·1	2789·7	76·0	6.389 442	15
10	8810·3	113·8	6921·1	37·9	2865·7	75·8	427	15
20	8924·1	113·4	6859·0	37·8	2941·5	75·6	412	15
30	9037·5	113·0	6996·8	37·7	3017·1	75·4	397	16
40	9150·5	112·8	7034·5	37·6	3092·5	75·2	381	15
50	9263·3	112·4	7072·1	37·4	3167·7	74·9	366	15
59° 0′	9375·7	112·0	7109·5	37·4	3242·6	74·7	6.389 351	14
10	9487·7	111·7	7146·9	37·2	3317·3	74·5	337	15
20	9599·4	111·4	7184·1	37·1	3391·8	74·2	322	15
30	9710·8	111·0	7221·2	37·0	3466·0	74·0	307	15
40	9821·8	110·6	7258·2	36·9	3540·0	73·7	292	15
50	9932·4	110·3	7295·1	36·7	3613·7	73·6	277	14
60° 0′	*0042·7	109·9	7331·8	36·7	3687·3	73·2	6.389 263	15
10	0152·6	109·5	7368·5	36·5	3760·5	73·0	248	15
20	0262·1	109·1	7405·0	36·4	3833·5	72·8	233	14
30	0371·2	108·8	7441·4	36·2	3906·3	72·5	219	15
40	0480·0	108·4	7447·6	36·2	3978·8	72·3	204	14
50	0588·4	108·0	7513·8	36·0	4051·1	72·0	190	15
61° 0′	0696·4	107·6	7549·8	35·8	4123·1	71·7	6.389 175	14
10	0804·0	107·2	7585·6	35·8	4194·8	71·5	161	14
20	0911·2	106·9	7621·4	35·6	4266·3	71·2	147	15
30	1018·1	106·4	7657·0	35·5	4337·5	71·0	132	14
40	1124·5	106·0	7692·5	35·3	4408·5	70·6	118	14
50	1230·5	105·6	7727·8	35·2	4479·1	70·5	104	14
62° 0′	1336·1	105·2	7763·0	35·1	4549·6	70·1	6.389 090	14
10	1441·3	104·8	7798·1	34·9	4619·7	69·8	076	14
20	1546·1	104·3	7833·0	34·8	4689·5	69·6	062	14
30	1650·4	104·0	7867·8	34·6	4759·1	69·3	048	14
40	1754·4	103·5	7902·4	34·5	4828·4	69·0	034	13
50	1857·9	103·1	7936·9	34·4	4897·4	68·7	021	14
63° 0′	1961·0	102·6	7971·3	34·2	4966·1	68·5	6.389 007	14
10	2063·6	102·3	8005·5	34·2	5034·6	68·1	388 993	14
20	2165·9	101·7	8039·6	33·9	5102·7	67·9	979	13
30	2267·6	101·4	8073·5	33·8	5170·6	67·5	966	14
40	2369·0	100·8	8107·3	33·6	5238·1	67·3	952	13
50	2469·8	100·5	8140·9	33·5	5305·4	66·9	939	13
64° 0′	2570·3		8174·4		5372·3		6.388 926	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.999 —10	—	8.509 —10	—	8.508 —10	—	0.000	—
56° 0′	0015·8	39·2	6947·8	117·6	7832·5	39·2	9115·3	78·5
10	*9976·6	39·1	6830·2	117·4	7793·3	39·1	9036·8	78·2
20	9937·5	39·0	6712·8	117·1	7754·2	39·0	8958·6	78·1
30	9898·5	39·0	6595·7	116·9	7715·2	39·0	8880·5	77·9
40	9859·5	38·8	6478·8	116·5	7676·2	38·8	8802·6	77·7
50	9820·7	38·8	6362·3	116·2	7637·4	38·8	8724·9	77·4
57° 0′	9781·9	38·6	6246·1	116·0	7598·6	38·6	8647·5	77·3
10	9743·3	38·6	6130·1	115·6	7560·0	38·6	8570·2	77·1
20	9704·7	38·4	6014·5	115·3	7521·4	38·4	8493·1	76·9
30	9666·3	38·3	5899·2	115·0	7483·0	38·3	8416·2	76·7
40	9628·0	38·3	5784·2	114·7	7444·7	38·3	8339·5	76·5
50	9589·7	38·1	5669·5	114·4	7406·4	38·1	8263·0	76·2
58° 0′	9551·6	38·0	5555·1	114·1	7368·3	38·0	8186·8	76·1
10	9513·6	37·9	5441·0	113·7	7330·3	37·9	8110·7	75·8
20	9475·7	37·8	5327·3	113·4	7292·4	37·8	8034·9	75·6
30	9437·9	37·7	5213·9	113·1	7254·6	37·7	7959·3	75·4
40	9400·2	37·6	5100·8	112·8	7216·9	37·6	7883·9	75·1
50	9362·6	37·5	4988·0	112·3	7179·3	37·5	7808·8	75·0
59° 0′	9325·1	37·3	4875·7	112·1	7141·8	37·3	7733·8	74·7
10	9287·8	37·3	4763·6	111·7	7104·5	37·3	7659·1	74·4
20	9250·5	37·1	4651·9	111·4	7067·2	37·1	7584·7	74·3
30	9213·4	37·0	4540·5	110·9	7030·1	37·0	7510·4	74·0
40	9176·4	36·9	4429·6	110·7	6993·1	36·9	7436·4	73·7
50	9139·5	36·7	4318·9	110·1	6956·2	36·7	7362·7	73·5
60° 0′	9102·8	36·6	4208·7	109·9	6919·5	36·6	7289·2	73·3
10	9066·2	36·6	4098·8	109·6	6882·9	36·6	7215·9	73·0
20	9029·6	36·3	3989·2	109·1	6846·3	36·3	7142·9	72·8
30	8993·3	36·3	3880·1	108·8	6810·0	36·3	7070·1	72·5
40	8957·0	36·1	3771·3	108·4	6773·7	36·1	6997·6	72·3
50	8920·9	36·0	3662·9	108·0	6737·6	36·0	6925·3	72·0
61° 0′	8884·9	35·9	3554·9	107·6	6701·6	35·9	6853·3	71·7
10	8849·0	35·7	3447·3	107·2	6665·7	35·7	6781·6	71·5
20	8813·3	35·6	3440·1	106·8	6630·0	35·6	6710·1	71·2
30	8777·7	35·5	3233·3	106·5	6594·4	35·5	6638·9	70·9
40	8742·2	35·4	3126·8	106·0	6558·9	35·4	6568·0	70·7
50	8706·8	35·2	3020·8	105·6	6523·5	35·2	6497·3	70·4
62° 0′	8671·6	35·0	2915·2	105·2	6488·3	35·0	6426·9	70·2
10	8636·6	34·9	2810·0	104·8	6453·3	35·0	6356·7	69·8
20	8601·7	34·8	2705·2	104·3	6418·3	34·7	6286·9	69·6
30	8566·9	34·7	2600·9	104·0	6383·6	34·7	6217·3	69·3
40	8532·2	34·5	2496·9	103·5	6348·9	34·5	6148·0	69·0
50	8497·7	34·3	2393·4	103·1	6314·4	34·4	6079·0	68·7
63° 0′	8463·4	34·3	2290·3	102·6	6280·0	34·2	6010·3	68·4
10	8429·1	34·0	2187·7	102·2	6245·8	34·0	5941·9	68·2
20	8395·1	34·0	2085·5	101·8	6211·8	34·0	5873·7	67·8
30	8361·1	33·7	1983·7	101·3	6177·8	33·7	5805·9	67·6
40	8327·4	33·7	1882·4	100·9	6144·1	33·7	5738·3	67·2
50	8293·7	33·4	1781·5	100·4	6110·4	33·4	5671·1	67·0
64° 0′	8260·3		1681.1		6077·0		5604·1	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log *M*	Δ	log *N*	Δ	log *r*	Δ	$log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.805	+	6.805	+	6.805	+	— 20	—
64° 0′	2570·3	99·9	8174·4	33·3	5372·3	68·7	6.388 926	14
10	2670·2	99·6	8207·7	33·2	5439·0	66·3	912	13
20	2769·8	99·0	8240·9	33·0	5505·3	66·1	899	13
30	2868·8	98·6	8273·9	32·9	5571·4	65·7	886	13
40	2967·4	98·1	8306·8	32·7	5637·1	65·4	873	14
50	3065·5	97·7	8339·5	32·5	5702·5	65·1	859	13
65° 0′	3163·2	97·2	8372·0	32·4	5767·6	64·8	6.388 846	12
10	3260·4	96·7	8404·4	32·3	5832·4	64·5	834	13
20	3357·1	96·2	8436·7	32·0	5896·9	64·1	821	13
30	3453·3	95·8	8468·7	31·9	5961·0	63·9	808	13
40	3549·1	95·2	8500·6	31·8	6024·9	63·5	795	13
50	3644·3	94·8	8532·4	31·6	6088·4	63·1	782	12
66° 0′	3739·1	94·3	8564·0	31·4	6151·5	62·9	6.388 770	13
10	3833·4	93·7	8595·4	31·3	6214·4	62·5	757	12
20	3927·1	93·3	8626·7	31·1	6276·1	62·2	745	13
30	4020·4	92·8	8657·8	30·9	6339·1	61·8	732	12
40	4113·2	92·2	8688·7	30·7	6400·9	61·5	720	12
50	4005·4	91·8	8719·4	30·6	6462·4	61·2	708	13
67° 0′	4297·2	91·2	8750·0	30·4	6523·6	60·8	6.388 695	12
10	4388·4	90·8	8780·4	30·3	6584·4	60·5	683	12
20	4479·2	90·2	8810·7	30·0	6644·9	60·2	671	12
30	4569·4	89·6	8840·7	29·9	6705·1	59·7	659	12
40	4659·0	89·2	8870·6	29·8	6764·8	59·5	647	12
50	4748·2	88·6	8900·4	29·4	6824·3	59·1	635	12
68° 0′	4836·8	88·1	8929·9	29·4	6883·4	58·7	6.388 623	11
10	4924·9	87·6	8959·3	29·2	6942·1	58·4	612	12
20	5012·5	87·0	8988·5	29·0	7000·5	58·0	600	12
30	5099·5	86·5	9017·5	28·8	7058·5	57·7	588	11
40	5186·0	86·0	9046·3	28·6	7116·2	57·2	577	12
50	5272·0	85·4	9074·9	28·5	7173·4	57·0	565	11
69° 0′	5357·4	84·8	9103·4	28·3	7230·4	56·5	6.388 554	11
10	5442·2	84·3	9131·7	28·1	7286·9	56·2	543	12
20	5526·5	83·7	9159·8	27·9	7343·1	55·9	531	11
30	5610·2	83·2	9187·7	27·7	7399·0	55·4	520	11
40	5693·4	82·7	9215·4	27·6	7454·4	55·1	509	11
50	5776·1	82·0	9243·0	27·3	7509·5	54·7	498	11
70° 0′	5858·1	81·5	9270·3	27·2	7564·2	54·4	6.388 487	11
10	5939·6	80·9	9297·5	27·0	7618·6	53·9	476	11
20	6020·5	80·4	9324·5	26·7	7672·5	53·6	465	10
30	6100·9	79·8	9351·2	26·6	7726·1	53·2	455	11
40	6180·7	79·2	9377·8	26·5	7779·3	52·8	444	10
50	6259·9	78·6	9404·3	26·2	7832·1	52·4	434	
71° 0′	6338·5	78·1	9430·5	26·0	7884·5	52·0	6.388 423	
10	6416·6	77·4	9456·5	25·8	7936·5	51·7	413	
20	6494·0	76·5	9482·3	25·6	7988·2	51·2	402	
30	6570·9	76·3	9507·9	25·4	8039·4	50·9	392	
40	6647·2	75·6	9533·3	25·3	8090·3	50·4	382	
50	6722·8	75·1	9558·6	25·0	8140·7	50·1	372	
72° 0′	6797·9		9583·6		8190·8		6.388 362	

vgl. § 33. S. 213.

φ	*log W*	Δ	*log* [1]	Δ	*log* [2]	Δ	*log V*²	Δ
	9.998 —10	—	8.509 —10	—	8.508 —10	—	0.000	—
64° 0′	8260·3	33·4	1681·1	100·0	6077·0	33·4	5604·1	66·6
10	8226·9	33·1	1581·1	99·5	6043·6	33·1	5537·5	66·4
20	8193·8	33·1	1481·6	99·1	6010·5	33·1	5471·1	66·0
30	8160·7	32·8	1382·5	98·6	5977·4	32·8	5405·1	65·8
40	8127·9	32·7	1283·9	98·1	5944·6	32·7	5339·3	65·4
50	8095·2	32·6	1185·8	97·7	5911·9	32·6	5273·9	65·1
65° 0′	8062·6	32·4	1088·1	97·2	5879·3	32·4	5208·8	64·8
10	8030·2	32·2	0990·9	96·7	5846·9	32·2	5144·0	64·4
20	7998·0	32·1	0894·2	96·2	5814·7	32·1	5079·6	64·2
30	7965·9	31·9	0798·0	95·7	5782·6	31·9	5015·4	64·0
40	7934·0	31·8	0702·3	95·3	5750·7	31·8	4951·4	64·3
50	7902·2	31·5	0607·0	94·8	5718·9	31·6	4888·1	63·2
66° 0′	7870·7	31·5	0512·2	94·2	5687·3	31·4	4824·9	62·8
10	7839·2	31·2	0418·0	93·8	5655·9	31·2	4762·1	62·6
20	7808·0	31·1	0324·2	93·3	5624·7	31·1	4699·5	62·1
30	7776·9	30·9	0230·9	92·7	5593·6	30·9	4637·4	61·9
40	7746·0	30·8	0138·2	92·3	5562·7	30·8	4575·5	61·5
50	7715·2	30·6	0045·9	91·8	5531·9	30·6	4514·0	61·2
67° 0′	7684·6	30·4	*9954·1	91·2	5501·3	30·4	4452·8	60·8
10	7654·2	30·2	9862·9	90·7	5470·9	30·2	4392·0	60·5
20	7624·0	30·1	9772·2	90·2	5440·7	30·1	4331·5	60·1
30	7593·9	29·9	9682·0	89·7	5410·6	29·9	4271·4	59·8
40	7564·0	29·7	9592·3	89·2	5380·7	29·7	4211·6	59·6
50	7534·3	29·6	9503·1	88·6	5351·0	29·6	4152·2	58·9
68° 0′	7504·7	29·3	9414·5	88·1	5321·4	29·3	4093·1	58·8
10	7475·4	29·2	9326·4	87·6	5292·1	29·2	4034·3	58·3
20	7446·2	29·0	9238·8	87·0	5262·9	29·0	3976·0	58·0
30	7417·2	28·9	9151·8	86·5	5233·9	28·9	3918·0	57·7
40	7388·3	28·6	9065·3	85·9	5205·0	28·6	3860·3	57·3
50	7359·7	28·5	8979·4	85·4	5176·4	28·5	3803·0	56·9
69° 0′	7331·2	28·3	8894·0	84·9	5147·9	28·3	3746·1	56·6
10	7302·9	28·1	8809·1	84·3	5119·6	28·1	3689·5	56·2
20	7274·8	27·9	8724·8	83·7	5091·5	27·9	3633·3	55·8
30	7246·9	27·7	8641·1	83·2	5063·6	27·7	3577·5	55·5
40	7219·2	27·5	8557·9	82·6	5035·9	27·5	3522·0	55·1
50	7191·7	27·4	8475·3	82·1	5008·4	27·4	3466·9	54·7
70° 0′	7164·3	27·2	8393·2	81·5	4981·0	27·2	3412·2	54·3
10	7137·1	26·9	8311·7	80·9	4953·8	26·9	3357·9	54·0
20	7110·2	26·8	8230·8	80·4	4926·9	26·8	3303·9	53·5
30	7083·4	26·6	8150·4	79·7	4900·1	26·6	3250·4	53·2
40	7056·8	26·4	8070·7	79·3	4873·5	26·4	3197·2	52·8
50	7030·4	26·2	7991·4	78·6	4847·1	26·2	3144·4	52·5
71° 0′	7004·2	26·0	7912·8	78·0	4820·9	26·0	3091·9	52·0
10	6978·2	25·9	7834·8	77·5	4794·9	25·9	3039·9	51·6
20	6952·3	25·6	7757·3	76·8	4769·0	25·6	2988·3	51·3
30	6926·7	25·4	7680·5	76·3	4743·4	25·4	2937·0	50·8
40	6901·3	25·2	7604·2	75·7	4718·0	25·2	2886·2	50·5
50	6876·1	25·1	7528·5	75·1	4692·8	25·1	2835·7	50·0
72° 0′	6851·0		7453·4		4667·7		2785·7	

vgl. § 33. S. 213.

φ	*log M*	Δ	*log N*	Δ	*log r*	Δ	$log \frac{1}{r^2}$	Δ
	6.805	+	6.805	+	6.805	+	— 20	—
72° 0′	6798	74	9584	24	8191	49	6.388 362	10
10	6872	74	9608	25	8240	50	352	10
20	6946	74	9633	25	8290	49	342	10
30	7020	72	9658	24	8339	48	332	9
40	7092	72	9682	24	8387	48	323	10
50	7164	72	9706	24	8435	48	313	10
73° 0′	7236	71	9730	23	8483	47	6.388 303	9
10	7307	70	9753	24	8530	47	294	9
20	7377	70	9777	23	8577	46	285	10
30	7447	69	9800	23	8623	46	275	9
40	7516	68	9823	23	8669	46	266	9
50	7584	68	9846	22	8715	45	257	9
74° 0′	7652	67	9868	23	8760	45	6.388 248	9
10	7719	66	9891	22	8805	44	239	9
20	7785	66	9913	22	8849	44	230	9
30	7851	65	9935	21	8893	43	221	8
40	7916	65	9956	22	8936	43	213	9
50	7981	64	9978	21	8979	43	204	8
75° 0′	8045	63	9999	21	9022	42	6.388 196	9
10	8108	63	*0020	21	9064	42	187	8
20	8171	62	0041	21	9106	41	179	8
30	8233	61	0062	20	9147	41	171	9
40	8294	61	0082	21	9188	41	162	8
50	8355	60	0103	20	9229	40	154	8
76° 0′	8415	59	0123	19	9269	39	6.388 146	8
10	8474	59	0142	20	9308	40	138	8
20	8533	58	0162	19	9348	38	130	7
30	8591	58	0181	20	9386	39	123	8
40	8649	57	0201	19	9425	38	115	8
50	8706	56	0220	18	9463	37	107	7
77° 0′	8762	55	0238	19	9500	37	6.388 100	7
10	8817	55	0257	18	9537	37	093	8
20	8872	54	0275	18	9574	36	085	7
30	8926	54	0293	18	9610	35	078	7
40	8980	52	0311	17	9645	35	071	7
50	9032	53	0328	18	9680	35	064	7
78° 0′	9085	51	0346	17	9715	34	6.388 057	7
10	9136	51	0363	17	9749	35	050	7
20	9187	50	0380	17	9783	34	043	6
30	9237	49	0397	16	9817	33	037	7
40	9286	49	0413	16	9850	32	030	6
50	9335	48	0429	16	9882	32	024	7
79° 0′	9383	47	0445	16	9914	32	6.388 017	6
10	9430	47	0461	16	9946	31	388 011	6
20	9477	46	0477	15	9977	30	388 005	6
30	9523	45	0492	15	*0007	31	387 999	7
40	9568	45	0507	15	0038	29	992	5
50	9613	44	0522	15	0067	30	987	6
80° 0′	9657		0537		0097		6.387 981	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.998 —10	—	8.508 —10	—	8.508 —10	—	0.000	—
72° 0′	6851	25	7453	74	4668	25	2786	50
10	6826	24	7379	74	4643	25	2736	49
20	6802	25	7305	73	4618	24	2687	49
30	6777	24	7232	73	4594	24	2638	49
40	6753	24	7159	72	4570	25	2589	48
50	6729	24	7087	72	4545	23	2541	47
73° 0′	6705	24	7015	71	4522	24	2494	48
10	6681	23	6944	70	4498	23	2446	46
20	6658	23	6874	69	4475	24	2400	47
30	6635	23	6805	69	4451	23	2353	46
40	6612	23	6736	69	4428	22	2307	45
50	6589	23	6667	67	4406	23	2262	45
74° 0′	6566	22	6600	67	4383	22	2217	45
10	6544	22	6533	67	4361	22	2172	45
20	6522	22	6466	66	4339	22	2127	43
30	6500	22	6400	65	4317	22	2084	44
40	6478	21	6335	65	4295	22	2040	43
50	6457	22	6270	64	4273	21	1997	43
75° 0′	6435	21	6206	63	4252	21	1954	42
10	6414	21	6143	63	4231	21	1912	42
20	6393	20	6080	62	4210	21	1870	41
30	6373	21	6018	61	4189	20	1829	41
40	6352	20	5957	61	4169	20	1788	40
50	6332	20	5896	60	4149	20	1748	40
76° 0′	6312	20	5836	59	4129	20	1708	40
10	6292	19	5777	59	4109	20	1668	39
20	6273	20	5718	58	4089	19	1629	39
30	6253	19	5660	58	4070	19	1590	38
40	6234	19	5602	56	4051	19	1552	38
50	6215	19	5546	57	4032	19	1514	38
77° 0′	6196	18	5489	55	4013	18	1476	37
10	6178	18	5434	55	3995	19	1439	36
20	6160	18	5379	54	3976	18	1403	36
30	6142	18	5325	53	3958	18	1367	36
40	6124	18	5272	53	3940	17	1331	35
50	6106	17	5219	52	3923	17	1296	35
78° 0′	6089	17	5167	52	3906	18	1261	34
10	6072	17	5115	50	3888	17	1227	34
20	6055	17	5065	50	3871	16	1193	33
30	6038	16	5015	50	3855	17	1160	33
40	6022	17	4965	49	3838	16	1127	33
50	6005	16	4916	48	3822	16	1094	32
79° 0′	5989	15	4868	47	3806	16	1062	31
10	5974	16	4821	47	3790	15	1031	31
20	5958	15	4774	46	3775	16	1000	31
30	5943	15	4728	45	3759	16	0969	30
40	5928	15	4683	45	3744	15	0939	30
50	5913	15	4638	43	3729	14	0909	29
80° 0′	5898		4595		3715		0880	

vgl. § 33. S. 213.

φ	*log M*	Δ	*log N*	Δ	*log r*	Δ	*log* $\frac{1}{r^2}$	Δ
	6.805	+	6.806	+	6.806	+	— 20	—
80° 0′	9657	43	0537	14	0097	28	6.387 981	6
10	9700	42	0551	14	0125	29	975	6
20	9742	42	0565	14	0154	27	969	5
30	9784	41	0579	14	0181	28	964	6
40	9825	41	0593	13	0209	27	958	5
50	9866	39	0606	13	0236	26	953	5
81° 0′	9905	39	0619	13	0262	26	6.387 948	6
10	9944	39	0632	13	0288	26	942	5
20	9983	37	0645	13	0314	25	937	5
30	*0020	37	0658	12	0339	24	932	5
40	0057	36	0670	12	0363	25	927	5
50	0093	36	0682	12	0388	23	922	4
82° 0′	0129	34	0694	11	0411	23	6.387 918	5
10	0163	34	0705	12	0434	23	913	4
20	0197	34	0717	11	0457	22	909	5
30	0231	32	0728	11	0479	22	904	3
40	0263	32	0739	10	0501	21	901	5
50	0295	31	0749	11	0522	21	896	5
83° 0′	0326	31	0760	10	0543	20	6.387 891	4
10	0357	30	0770	10	0563	20	887	4
20	0387	28	0780	9	0583	19	883	3
30	0415	29	0789	10	0602	19	880	4
40	0444	27	0799	9	0621	19	876	4
50	0471	27	0808	9	0640	18	872	4
84° 0′	0498	26	0817	9	0658	17	6.387 868	3
10	0524	26	0826	8	0675	17	865	3
20	0550	24	0834	8	0692	16	862	4
30	0574	24	0842	8	0708	16	858	3
40	0598	24	0850	8	0724	16	855	3
50	0622	22	0858	8	0740	15	852	3
85° 0′	0644	22	0866	7	0755	14	6.387 849	3
10	0666	21	0873	7	0769	14	846	3
20	0687	20	0880	7	0783	14	843	2
30	0707	20	0887	6	0797	13	841	3
40	0727	18	0893	6	0810	12	838	2
50	0745	18	0899	6	0822	12	836	3
86° 0′	0763	18	0905	6	0834	12	6.387 833	2
10	0781	16	0911	6	0846	11	831	2
20	0797	16	0917	5	0857	11	829	3
30	0813	16	0922	5	0868	10	826	2
40	0829	14	0927	5	0878	9	824	1
50	0843	13	0932	4	0887	10	823	2
87° 0′	0856	37	0936	13	0897	24	6.387 821	5
30	0893	30	0949	10	0921	20	816	4
88 0	0923	23	0959	7	0941	15	6.387 812	3
30	0946	17	0966	6	0956	12	809	3
89 0	0963	10	0972	3	0968	6	6.387 806	1
30	0973	3	0975	1	0974	2	805	0
90° 0′	0976		0976		0976		6.387 805	

vgl. § 33. S. 213.

φ	log W	Δ	log [1]	Δ	log [2]	Δ	log V²	Δ
	9.998 —10	—	8.508 —10	—	8.508 —10	—	0.000 —10	—
80° 0′	5898	14	4595	44	3715	15	0880	29
10	5884	14	4551	42	3700	14	0851	28
20	5870	14	4509	42	3686	14	0823	28
30	5856	14	4467	41	3672	13	0795	28
40	5842	14	4426	40	3659	14	0767	26
50	5828	13	4386	40	3645	14	0741	27
81° 0′	5815	13	4346	39	3631	12	0714	26
10	5802	12	4307	38	3619	13	0688	25
20	5790	13	4269	38	3606	12	0663	26
30	5777	12	4231	37	3594	13	0637	24
40	5765	12	4194	36	3581	12	0613	24
50	5753	12	4158	35	3569	12	0589	24
82° 0′	5741	12	4123	35	3557	11	0565	23
10	5729	11	4088	34	3546	11	0542	23
20	5718	11	4054	33	3535	12	0519	22
30	5707	11	4021	33	3523	10	0497	22
40	5696	11	3988	32	3513	11	0475	21
50	5685	10	3956	31	3502	10	0454	21
83° 0′	5675	10	3925	31	3492	11	0433	20
10	5665	10	3894	29	3481	10	0413	20
20	5655	10	3865	29	3471	9	0393	19
30	5645	9	3836	29	3462	10	0374	19
40	5636	9	3807	27	3452	9	0355	18
50	5627	9	3780	27	3443	9	0337	18
84° 0′	5618	9	3753	26	3434	8	0319	18
10	5609	9	3727	25	3426	9	0301	16
20	5600	8	3702	25	3417	8	0285	17
30	5592	8	3677	24	3409	8	0268	16
40	5584	8	3653	23	3401	8	0252	15
50	5576	7	3630	23	3393	7	0237	15
85° 0′	5569	7	3607	21	3386	8	0222	15
10	5562	7	3586	21	3378	7	0207	14
20	5555	7	3565	21	3371	6	0193	13
30	5548	6	3544	19	3365	7	0180	13
40	5542	7	3525	19	3358	6	0167	13
50	5535	6	3506	18	3352	6	0154	12
86° 0′	5529	6	3488	18	3346	6	0142	12
10	5523	5	3470	16	3340	5	0130	11
20	5518	5	3454	16	3335	6	0119	10
30	5513	5	3438	15	3329	5	0109	10
40	5508	5	3423	14	3324	5	0099	10
50	5503	5	3319	14	3319	4	0089	9
87° 0′	5498	12	3395	37	3315	12	0080	24
30	5486	10	3358	30	3303	10	0056	20
88° 0′	5476	8	3328	23	3293	8	0036	16
30	5468	5	3305	17	3285	6	0020	11
89° 0′	5463	4	3288	10	3279	3	0009	7
30	5459	1	3278	3	3276	1	0002	2
90° 0′	5458		3275		3275		0000	

vgl. § 33. S. 213.

φ	1° Länge in Kilometern	Δ	φ	1° Breite in Kilometern	Δ	1 Gradabteilung in Q.Kilometern	1 Gradabteilung in geogr. Q.Meilen
0°	111,3066	—	0°— 1°	110,5638	+	12 305,86	223,4873
1	111,2897	169	1 — 2	110,5645	7	12 302,21	223,4210
2	111,2392	505	2 — 3	110,5658	13	12 294,91	223,2885
3	111,1550	842	3 — 4	110,5678	20	12 283,97	223,0898
4	111,0372	1178	4 — 5	110,5705	27	12 269,38	222,8249
5°	110,8858	1514	5°— 6°	110,5739	34	12 251,16	222,4939
6	110,7009	1849	6 — 7	110,5779	40	12 229,30	222,0968
7	110,4824	2185	7 — 8	110,5826	47	12 203,81	221,6339
8	110,2305	2519	8 — 9	110,5879	53	12 174,69	221,1051
9	109,9452	2853	9 —10	110,5939	60	12 141,95	220,5106
10°	109,6266	3186	10°—11°	110,6005	66	12 105,61	219,8505
11	109,2748	3518	11 —12	110,6077	72	12 065,66	219,1250
12	108,8900	3848	12 —13	110,6156	79	12 022,12	218,3343
13	108,4721	4179	13 —14	110,6241	85	11 975,00	217,4785
14	108,0214	4507	14 —15	110,6331	90	11 924,30	216,5578
15°	107,5379	4835	15°—16°	110,6428	97	11 870,05	215,5725
16	107,0219	5160	16 —17	110,6531	103	11 812,25	214,5228
17	106,4734	5485	17 —18	110,6639	108	11 750,92	213,4089
18	105,8926	5808	18 —19	110,6752	113	11 686,07	212,2312
19	105,2797	6129	19 —20	110,6871	119	11 617,71	210,9899
20°	104,6348	6449	20°—21°	110,6996	125	11 545,87	209,6852
21	103,9582	6766	21 —22	110,7126	130	11 470,56	208,3175
22	103,2500	7082	22 —23	110,7260	134	11 391,81	206,8871
23	102,5105	7395	23 —24	110,7399	139	11 309,62	205,3945
24	101,7398	7707	24 —25	110,7543	144	11 224,02	203,8399
25°	100,9382	8016	25°—26°	110,7691	148	11 135,03	202,2237
26	100,1059	8323	26 —27	110,7844	153	11 042,66	200,5464
27	99,2432	8627	27 —28	110,8001	157	10 946,96	198,8083
28	98,3502	8930	28 —29	110,8162	161	10 847,94	197,0099
29	97,4274	9228	29 —30	110,8326	164	10 745,61	195,1516
30°	96,4748	9526	30°—31°	110,8494	168	10 640,03	193,2340
31	95,4929	9819	31 —32	110,8666	172	10 531,20	191,2575
32	94,4819	1,0110	32 —33	110,8840	174	10 419,15	189,2226
33	93,4421	1,0398	33 —34	110,9018	178	10 303,91	187,1298
34	92,3738	1,0683	34 —35	110,9198	180	10 185,52	184,9797
35°	91,2773	1,0965	35°—36°	110,9380	182	10 064,01	182,7728
36	90,1529	1,1244	36 —37	110,9565	185	9 939,40	180,5098
37	89,0010	1,1519	37 —38	110,9752	187	9 811,73	178,1912
38	87,8219	1,1791	38 —39	110,9940	188	9 681,03	175,8176
39	86,6160	1,2059	39 —40	111,0131	191	9 547,34	173,3897
40°	85,3836	1,2324	40°—41°	111,0322	191	9 410,70	170,9081
41	84,1251	1,2585	41 —42	111,0515	193	9 271,14	168,3735
42	82,8408	1,2843	42 —43	111,0708	193	9 128,69	165,7866
43	81,5311	1,3097	43 —44	111,0902	194	8 983,41	163,1481
44	80,1965	1,3346	44 —45	111,1097	195	8 835,32	160,4587
45°	78,8373	1,3592	0°—45°	4984,4393		499 699,59	9075,0670

1 Kilometer = 0,134 76292 geogr. Meilen (*log* = 9.129 5704·3)
1 Q.Kilometer = 0,018 161046 geogr. Q.Meilen (*log* = 8.259 1408·6)

vgl. S. 231.

φ	1° Länge in Kilometern	Δ	φ	1° Breite in Kilometern	Δ	1 Gradabteilung in Q.Kilometern	1 Gradabteilung in geogr. Q.Meilen
		—			+		
45°	78,8373	1,3834	45°—46°	111,1292	195	8 684,47	157,7192
46	77,4539	1,4071	46 —47	111,1487	194	8 530,91	154,9303
47	76,0468	1,4305	47 —48	111,1681	194	8 374,68	152,0928
48	74,6163	1,4534	48 —49	111,1875	193	8 215,81	149,2076
49	73,1629	1,4759	49 —50	111,2068	192	8 054,35	146,2754
50°	71,6870	1,4979	50°—51°	111,2260	191	7 890,36	143,2972
51	70,1891	1,5195	51 —52	111,2451	189	7 723,87	140,2736
52	68,6696	1,5406	52 —53	111,2640	188	7 554,95	137,2057
53	67,1290	1,5613	53 —54	111,2828	186	7 383,62	134,0943
54	65,5677	1,5814	54 —55	111,3014	183	7 209,96	130,9403
55°	63,9863	1,6012	55°—56°	111,3197	182	7 033,99	127,7446
56	62,3851	1,6204	56 —57	111,3379	178	6 855,79	124,5083
57	60,7647	1,6391	57 —58	111,3557	176	6 675,40	121,2323
58	59,1256	1,6574	58 —59	111,3733	173	6 492,88	117,9175
59	57,4682	1,6751	59 —60	111,3906	169	6 308,28	114,5650
60°	55,7931	1,6923	60°—61°	111,4075	166	6 121,66	111,1757
61	54,1008	1,7090	61 —62	111,4241	162	5 933,07	107,7507
62	52,3918	1,7253	62 —63	111,4403	159	5 742,57	104,2911
63	50,6665	1,7408	63 —64	111,4562	154	5 550,22	100,7979
64	48,9257	1,7560	64 —65	111,4716	150	5 356,09	97,2721
65°	47,1697	1,7706	65°—66°	111,4866	145	5 160,22	93,7150
66	45,3991	1,7846	66 —67	111,5011	141	4 962,68	90,1275
67	43,6145	1,7982	67 —68	111,5152	137	4 763,54	86,5108
68	41,8163	1,8111	68 —69	111,5289	131	4 562,85	82,8661
69	40,0052	1,8234	69 —70	111,5420	126	4 360,68	79,1945
70°	38,1818	1,8353	70°—71°	111,5546	120	4 157,09	75,4971
71	36,3465	1,8466	71 —72	111,5666	116	3 952,15	71,7751
72	34,4999	1,8572	72 —73	111,5782	109	3 745,92	68,0298
73	32,6427	1,8674	73 —74	111,5891	104	3 538,47	64,2623
74	30,7753	1,8769	74 —75	111,5995	99	3 329,86	60,4738
75°	28,8984	1,8859	75°—76°	111,6094	92	3 120,17	56,6656
76	27,0125	1,8943	76 —77	111,6186	85	2 909,45	52,8388
77	25,1182	1,9020	77 —78	111,6271	80	2 697,79	48,9947
78	23,2162	1,9093	78 —79	111,6351	74	2 485,23	45,1345
79	21,3069	1,9159	79 —80	111,6425	67	2 271,87	41,2595
80°	19,3910	1,9219	80°—81°	111,6492	61	2 057,76	37,3710
81	17,4691	1,9273	81 —82	111,6553	55	1 842,97	33,4703
82	15,5418	1,9321	82 —83	111,6608	47	1 627,58	29,5585
83	13,6097	1,9364	83 —84	111,6655	40	1 411,65	25,6371
84	11,6733	1,9400	84 —85	111,6695	34	1 195,26	21,7072
85°	9,7333	1,9430	85°—86°	111,6729	28	978,48	17,7702
86	7,7903	1,9455	86 —87	111,6757	20	761,37	13,8273
87	5,8448	1,9472	87 —88	111,6777	14	544,02	9,8799
88	3,8976	1,9485	88 —89	111,6791	7	326,48	5,9292
89	1,9491	1,9491	89 —90	111,6798		108,84	1,9767
90°	0,0000						
			45°—90°	5016,4165		208 565,31	3787,7641
			0°—45°	4984,4393		499 699,59	9075,0670
			0°—90°	10000,8558		708 264,90	12862,8311

1 geogr. Meile = 7,420 43854 Kilom. (*log* = 0.870 4295·7)

1 geogr. Q.Meile = 55,062 9081 Q.Kilom. (*log* = 1.740 8591·4)

vgl. S. 231.

φ	m	Differenzen		φ	m	Differenzen	
		+	+			+	+
40° 0′	4 429 084,788	18 504,034		48° 0′	5 317 885,232	18 529,905	
10	447 588,822	18 504,567	0,533	10	336 415,137	18 530,444	0,539
20	466 093,389	18 505,100	0,533	20	354 945,581	18 530,981	0,537
30	484 598,489	18 505,634	0,534	30	373 476,562	18 531,519	0,538
40	503 104,123	18 506,169	0,535	40	392 008,081	18 532,056	0,537
50	521 610,292	18 506,704	0,535	50	410 540,137	18 532,594	0,538
41° 0′	4 540 116,996	18 507,239	0,535	49° 0′	5 429 072,731	18 533,130	0,536
10	558 624,235	18 507,774	0,535	10	447 605,861	18 533,665	0,535
20	577 132,009	18 508,309	0,535	20	466 139,526	18 534,202	0,537
30	595 640,318	18 508,846	0,537	30	484 673,728	18 534,737	0,535
40	614 149,164	18 509,383	0,537	40	503 208,465	18 535,271	0,534
50	632 658,547	18 509,921	0,538	50	521 743,736	18 535,806	0,535
42° 0′	4 651 168,468	18 510,459	0,538	50° 0′	5 540 279,542	18 536,339	0,533
10	669 678,927	18 510,997	0,538	10	558 815,881	18 536,873	0,534
20	688 189,924	18 511,536	0,539	20	577 352,754	18 537,405	0,532
30	706 701,460	18 512,075	0,539	30	595 890,159	18 537,937	0,532
40	725 213,535	18 512,614	0,539	40	614 428,096	18 538,469	0,532
50	743 726,149	18 513,153	0,539	50	632 966,565	18 538,999	0,530
43° 0′	4 762 239,302	18 513,692	0,539	51° 0′	5 651 505,564	18 539,530	0,531
10	780 752,994	18 514,231	0,539	10	670 045,094	18 540,059	0,529
20	799 267,225	18 514,770	0,539	20	688 585,153	18 540,589	0,530
30	817 781,995	18 515,311	0,541	30	707 125,742	18 541,116	0,527
40	836 297,306	18 515,853	0,542	40	725 666,858	18 541,644	0,528
50	854 813,159	18 516,393	0,540	50	744 208,502	18 542,172	0,528
44° 0′	4 873 329,552	18 516,934	0,541	52° 0′	5 762 750,674	18 542,697	0,525
10	891 846,486	18 517,474	0,540	10	781 293,371	18 543,222	0,525
20	910 363,960	18 518,015	0,541	20	799 846,593	18 543,748	0,526
30	928 881,975	18 518,555	0,540	30	818 380,341	18 544,271	0,523
40	947 400,530	18 519,097	0,542	40	836 924,612	18 544,794	0,523
50	965 919,627	18 519,638	0,541	50	855 469,406	18 545,316	0,522
45° 0′	4 984 439,265	18 520,180	0,542	53° 0′	5 874 014,722	18 545,838	0,522
10	5 002 959,445	18 520,720	0,540	10	892 560,560	18 546,358	0,520
20	021 480,165	18 521,261	0,541	20	911 106,918	18 546,878	0,520
30	040 001,426	18 521,803	0,542	30	929 653,796	18 547,397	0,519
40	058 523,229	18 522,344	0,541	40	948 201,193	18 547,914	0,517
50	077 045,573	18 522,885	0,541	50	966 749,107	18 548,432	0,518
46° 0′	5 095 568,458	18 523,425	0,540	54° 0′	5 985 297,539	18 548,947	0,515
10	114 091,883	18 523,967	0,542	10	6 003 846,486	18 549,463	0,516
20	132 615,850	18 524,508	0,541	20	022 395,949	18 549,976	0,513
30	151 140,358	18 525,048	0,540	30	040 945,925	18 550,490	0,514
40	169 665,406	18 525,588	0,540	40	059 496,415	18 551,002	0,512
50	188 190,994	18 526,129	0,541	50	078 047,417	18 551,512	0,510
47° 0′	5 206 717,123	18 526,669	0,540	55° 0′	6 096 598,929	18 552,023	0,511
10	225 243,792	18 527,209	0,540	10	115 150,952	18 552,532	0,509
20	243 771,001	18 527,749	0,540	20	133 703,484	18 553,039	0,507
30	262 298,750	18 528,288	0,539	30	152 256,523	18 553,446	0,506
40	280 827,038	18 528,828	0,540	40	170 810,069	18 554,052	0,507
50	299 355,866	18 529,366	0,538	50	189 364,121	18 554,556	0,504
48° 0′	5 317 885,232			56° 0′	6 207 918,677		

vgl. S. 231.

Meridianbogen	Mittelbreite φ							Meridianbogen
	0°	30°	45°	50°	55°	60°	75°	
m	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi$	m
100m	3,26″	3,25″	3,24″	3,24″	3,23″	3,23″	3,23″	100m
200	6,51	6,50	6,48	6,47	6,47	6,46	6,45	200
300	9,77	9,74	9,72	9,71	9,70	9,69	9,68	300
400	13,02	12,99	12,96	12,95	12,94	12,93	12,90	400
500	16,28	16,24	16,20	16,18	16,17	16,16	16,13	500
600m	19,54	19,49″	19,44″	19,42″	19,40″	19,39″	19,35″	600m
700	22,79	22,74	22,68	22,66	22,64	22,62	22,58	700
800	26,05	25,98	25,92	25,90	25,85	25,85	25,81	800
900	29,30	29,23	29,16	29,13	29,11	29,08	29,03	900
1000m	0′ 32,6″	0′ 32,5″	0′ 32,4″	0′ 32,4″	0′ 32,3″	0′ 32,3″	0′ 32,3″	1000m
2000	1 5,1	1 5,0	1 4,8	1 4,7	1 4,7	1 4,6	1 4,5	2000
3000	1 37,7	1 37,4	1 37,2	1 37,1	1 37,0	1 36,9	1 36,8	3000
4000	2 10,2	2 9,9	2 9,6	2 9,5	2 9,4	2 9,3	2 9,0	4000
5000	2 42,8	2 42,4	2 42,0	2 41,8	2 41,7	2 41,6	2 41,3	5000
6000m	3′ 15,4″	3′ 14,9″	3′ 14,4″	3′ 14,2″	3′ 14,0″	3′ 13,9″	3′ 13,5″	6000m
7000	3 47,9	3 47,4	3 46,8	3 46,6	3 46,4	3 46,2	3 45,8	7000
8000	4 20,5	4 19,8	4 19,2	4 19,0	4 18,7	4 18,5	4 18,1	8000
9000	4 53,0	4 52,3	4 51,6	4 51,3	4 51,1	4 50,8	4 50,3	9000
10 000m	5′ 25,6″	5′ 24,8″	5′ 24,0″	5′ 23,7″	5′ 23,4″	5′ 23,2″	5′ 22,6″	10 000m
20 000	10 51,2	10 49,6	10 48,0	10 47,4	10 46,8	10 46,3	10 45,1	20 000
30 000	16 16,8	16 14,4	16 11,9	16 11,1	16 10,2	16 9,4	16 7,7	30 000
40 000	21 42,4	21 39,2	21 35,9	21 34,8	21 33,7	21 32,6	21 30,3	40 000
50 000	27 8,0	27 3,9	26 59,6	26 58,5	26 57,1	26 55,8	26 52,8	50 000
60 000m	32′ 33,6″	32′ 28,7″	32′ 23,9″	32′ 22,2″	32′ 20,5	32′ 19,0″	32′ 15,4″	60 000m
70 000	37 59,3	37 53,5	37 47,8	37 45,9	37 43,9	37 42,1	37 38,0	70 000
80 000	43 24,9	43 18,3	43 11,8	43 9,5	43 7,3	43 5,3	43 0,5	80 000
90 000	48 50,5	48 43,1	48 35,8	48 33,2	48 30,7	48 28,5	48 23,1	90 000
100 000	54 16,1	54 7,9	53 59,8	53 57,0	53 54,2	53 51,6	53 45,7	100 000

$\Delta\varphi$	m	m	m	m	m	m	m	$\Delta\varphi$
1″	30,7121m	30,7892m	30,8665m	30,8935m	30,9196m	30,9442m	31,0013m	1″
10″	307,1m	307,9m	308,7m	308,9	309,2m	309,4	310,0m	10″
20″	614,2	615,8	617,3	617,9	618,4	618,9	620,0	20″
30″	921,4	923,7	926,0	926,8	927,6	928,3	930,0	30″
40″	1228,5	1231,6	1234,7	1235,7	1236,8	1237,8	1240,0	40″
50″	1535,6	1539,5	1543,3	1544,7	1546,0	1547,2	1550,1	50″
60″ = 1′	1843m	1847m	1852m	1854m	1855m	1857m	1860m	60″ = 1′
2′	3685	3694	3704	3707	3710	3713	3720	2′
3′	5528	5542	5556	5561	5566	5570	5580	3′
4′	7371	7389	7408	7414	7421	7427	7440	4′
5′	9214	9237	9260	9268	9276	9283	9300	5′
6′	11 056m	11 084m	11 112m	11 122m	11 131m	11 140m	11 160m	6′
7′	12 899	12 931	12 964	12 975	12 986	12 997	13 021	7′
8′	14 742	14 779	14 816	14 829	14 841	14 853	14 881	8′
9′	16 585	16 626	16 668	16 682	16 697	16 710	16 741	9′
10′	18 427	18 474	18 520	18 536	18 552	18 567	18 601	10′

vgl. S. 231 und 334.

Breite φ	Bogen $1'$	Bogen $1''$	Zeit 1^m	Zeit 1^s	Breite φ	Bogen $1'$	Bogen $1''$	Zeit 1^m	Zeit 1^s
0°	1855^m	30,9^m	27 827^m	464^m	45°	1314^m	21,9^m	19 709^m	328^m
1	1855	30,9	27 822	464	46	1291	21,5	19 363	323
2	1854	30,9	27 810	464	47	1267	21,1	19 012	317
3	1853	30,9	27 789	463	48	1244	20,7	18 654	311
4	1851	30,8	27 759	463	49	1219	20,3	18 291	305
5°	1848^m	30,8^m	27 721^m	462^m	50°	1195^m	19,9^m	17 922^m	299^m
6	1845	30,8	27 675	461	51	1170	19,5	17 547	292
7	1841	30,7	27 621	460	52	1144	19,1	17 167	286
8	1837	30,6	27 558	459	53	1119	18,6	16 782	280
9	1832	30,5	27 486	458	54	1093	18,2	16 393	273
10°	1827^m	30,5^m	27 407^m	457^m	55°	1066^m	17,8^m	15 997^m	267^m
11	1821	30,4	27 319	455	56	1040	17,3	15 596	260
12	1815	30,2	27 222	454	57	1013	16,9	15 191	253
13	1808	30,1	27 118	452	58	985	16,4	14 781	246
14	1800	30,0	27 005	450	59	958	16,0	14 367	239
15°	1792^m	29,9^m	26 884^m	448^m	60	930^m	15,5	13 948^m	232^m
16	1784	29,7	26 755	446	61	902	15,0	13 525	225
17	1775	29,6	26 618	444	62	873	14,6	13 098	218
18	1765	29,4	26 473	441	63	844	14,1	12 667	211
19	1755	29,2	26 320	439	64	815	13,6	12 231	204
20°	1744^m	29,1^m	26 159^m	436^m	65°	786^m	13,1^m	11 792^m	197^m
21	1733	28,9	25 990	433	66	757	12,6	11 350	189
22	1721	28,7	25 812	430	67	727	12,1	10 904	182
23	1709	28,5	25 628	427	68	697	11,6	10 454	174
24	1696	28,3	25 435	424	69	667	11,1	10 001	167
25°	1682^m	28,0^m	25 235^m	421^m	70°	636^m	10,6^m	9545^m	159^m
26	1668	27,8	25 026	417	71	606	10,1	9086	151
27	1654	27,6	24 811	414	72	575	9,6	8625	144
28	1639	27,3	24 588	410	73	544	9,1	8161	136
29	1624	27,1	24 357	406	74	513	8,5	7694	128
30°	1608^m	26,8^m	24 119^m	402^m	75°	482^m	8,0^m	7225^m	120^m
31	1592	26,5	23 873	398	76	450	7,5	6753	113
32	1575	26,2	23 620	394	77	419	7,0	6280	105
33	1557	26,0	23 361	389	78	387	6,4	5804	97
34	1540	25,7	23 093	385	79	355	5,9	5327	89
35°	1521^m	25,4^m	22 810^m	380^m	80°	323^m	5,4^m	4848^m	81^m
36	1503	25,0	22 538	376	81	291	4,9	4367	73
37	1483	24,7	22 250	371	82	259	4,3	3885	65
38	1464	24,4	21 955	366	83	227	3,8	3402	57
39	1444	24,1	21 654	361	84	195	3,2	2918	49
40°	1423^m	23,7^m	21 346^m	356^m	85°	162^m	2,7^m	2433^m	41^m
41	1402	23,4	21 031	351	86	130	2,2	1948	32
42	1381	23,0	20 710	345	87	97	1,6	1461	24
43	1359	22,6	20 383	340	88	65	1,1	974	16
44	1337	22,3	20 049	334	89	32	0,5	487	8
45	1314	21,9	19 709	328	90	0	0,0	0	0

vgl. S. 231.

Breite φ	Parallel-Bogen 10′	Meridian-Bogen 6′	Trapez-fläche	Breite φ	Parallel-Bogen 10′	Meridian-Bogen 6′	Trapez-fläche
	Meter	Meter	Q.Kilometer		Meter	Meter	Q.Kilometer
45° 0′	13 139,55	11 112,04	145,8802	50° 0′	11 947,84	11 121,74	132,7428
6	13 116,67	11 112,24	145,6283	6	11 923,03	11 121,93	132,4691
12	13 093,76	11 112,43	145,3760	12	11 898,20	11 122,12	132,1949
18	13 070,80	11 112,63	145,1232	18	11 873,32	11 122,32	131,9203
24	13 047,80	11 112,82	144,8699	24	11 848,41	11 122,51	131,6453
45° 30	13 024,77	11 113,02	144,6163	50° 30′	11 823,46	11 122,70	131,3699
36	13 001,69	11 113,21	144,3621	36	11 798,48	11 122,89	131,0941
42	12 978,57	11 113,41	144,1075	42	11 773,46	11 123,08	130,8178
48	12 955,42	11 113,60	143,8525	48	11 748,40	11 123,27	130,5412
54	12 932,22	11 113,80	143,5970	54	11 723,31	11 123,46	130,2641
46° 0′	12 908,98	11 113,99	143,3410	51° 0′	11 698,18	11 123,65	129,9866
6	12 885,71	11 114,19	143,0846	6	11 673,02	11 123,85	129,7087
12	12 862,39	11 114,38	142,8278	12	11 647,82	11 124,04	129,4304
18	12 839,04	11 114,57	142,5705	18	11 622,58	11 124,23	129,1517
24	12 815,65	11 114,77	142,3128	24	11 597,31	11 124,42	128,8726
46° 30′	12 792,21	11 114,96	142,0546	51° 30′	11 572,01	11 124,61	128,5931
36	12 768,74	11 115,16	141,7960	36	11 546,66	11 124,80	128,3131
42	12 745,23	11 115,35	141,5369	42	11 521,28	11 124,99	128,0328
48	12 721,68	11 115,55	141,2774	48	11 495,87	11 125,18	127,7521
54	12 698,09	11 115,74	141,0174	54	11 470,42	11 125,37	127,4709
47° 0′	12 674,46	11 115,94	140,7570	52° 0′	11 444,94	11 125,56	127,1894
6	12 650,79	11 116,13	140,4961	6	11 419,42	11 125,74	126,9074
12	12 627,09	11 116,32	140,2349	12	11 393,86	11 125,93	126,6250
18	12 603,34	11 116,52	139,9731	18	11 368,27	11 126,12	126,3423
24	12 579,56	11 116,71	139,7110	24	11 342,65	11 126,31	126,0591
47° 30	12 555,74	11 116,91	139,4484	52° 30′	11 316,99	11 126,50	125,7756
36	12 531,88	11 117,10	139,1853	36	11 291,29	11 126,69	125,4916
42	12 507,98	11 117,30	138,9218	42	11 165,56	11 126,88	125,2072
48	12 484,04	11 117,49	138,6579	48	11 239,80	11 127,07	124,9225
54	12 460,06	11 117,68	138,3936	54	11 214,00	11 127,25	124,6373
48° 0′	12 436,05	11 117,88	138,1288	53° 0′	11 188,17	11 127,44	124,3518
6	12 411,99	11 118,07	137,8636	6	11 162,30	11 127,63	124,0658
12	12 387,90	11 118,27	137,5979	12	11 136,40	11 127,82	123,7795
18	12 363,77	11 118,46	137,3319	18	11 110,46	11 128,00	123,4928
24	12 339,61	11 118,65	137,0653	24	11 084,49	11 128,19	123,2057
48° 30′	12 315,40	11 118,85	136,7983	53° 30	11 058,49	11 128,38	122,9183
36	12 291,16	11 119,04	136,5310	36	11 032,45	11 128,56	122,6303
42	12 266,88	11 119,23	136,2631	42	11 006,38	11 128,75	122,3420
48	12 242,56	11 119,43	135,9949	48	10 980,27	11 128,94	122,0533
54	12 218,21	11 119,62	135,7262	54	10 954,13	11 129,12	121,7642
49° 0′	12 193,81	11 119,81	135,4571	54° 0′	10 927,96	11 129,31	121,4748
6	12 169,38	11 120,01	135,1876	6	10 901,75	11 129,49	121,1849
12	12 144,92	11 120,20	134,9177	12	10 875,51	11 129,68	120,8947
18	12 120,41	11 120,39	134,6473	18	10 849,23	11 129,86	120,6041
24	12 095,87	11 120,59	134,3765	24	10 822,92	11 130,05	120,3121
49° 30′	12 071,29	11 120,78	134,1053	54° 30′	10 796,58	11 130,23	120,0218
36	12 046,67	11 120,97	133,8336	36	10 770,21	11 130,42	119,7300
42	12 022,02	11 121,16	133,5616	42	10 743,80	11 130,60	119,4378
48	11 997,33	11 121,36	133,2891	48	10 717,36	11 130,78	119,1454
54	11 972,60	11 121,55	133,0162	54	10 690,89	11 130,97	118,8524
50° 0′	11 947,84			55° 0′	10 664,38		

vgl. S. 223 und S. 227.

Additamente für $log\ sin \frac{s}{r}$

$$A = log \frac{s}{r} - log\ sin \frac{s}{r} = \frac{\mu}{6 r^2} s^2$$

I. *Additament A als Funktion von log s, für die Mittelbreite* $\varphi = 50°$

$$log \frac{\mu}{6 r^2} = 2·249846 - 10.$$

log s	.00	.01	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	Diff.
4.0	1·8	1·9	1·9	2·0	2·1	2·2	2·3	2·5	2·6	2·7	0·1
4.1	2·8	3·0	3·1	3·1	3·4	3·5	3·7	3·9	4·1	4·2	0·3
4.2	4·5	4·7	4·9	5·1	5·4	5·6	5·9	6·2	6·5	6·8	0.3
4.3	7·1	7·4	7·8	8·1	8·5	8·9	9·3	9·8	10·3	10·7	0.5
4.4	11·2	11·7	12·3	12·9	13·5	14·1	14·8	15·5	16·2	17·0	0·8
4.5	17·8	18·6	19·5	20·4	21·4	22·4	23·4	24·5	25·7	26·9	1·3
4.6	28·2	29·5	30·9	32·4	33·9	35·5	37·2	38·9	40·8	42·7	2·0
4.7	44·7	46·8	49·0	51·3	53·7	56 2	58·9	61·7	64·6	67·6	3·2
4.8	70·8	74·1	77·6	81·3	85·1	89·1	93·6	97·7	102·3	107·1	5·1
4.9	112·2	117·4	123·0	128·8	134·8	141·2	147·9	154·8	162·1	169·8	8·0
5.0	177·8	186·1	194·9	204·1	213·7	223·8	234·3	245·4	256·9	169·1	12·8

für *log s* $< 4·0$

log s	*A*
3.2	0·0
3.3	0·1
3.4	0·2
3.5	0·3
3.6	0·3
3.7	0·4
3.8	0·7
3.9	1·1

II. *Additament A als Funktion von* $log \frac{s}{r}$

$\frac{s}{r}\varrho$	$log \frac{s}{r}$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	Diff. +
3′ 26″	7.0	0·7	0·8	0·8	0·8	0·9	0·9	1·0	1·0	1·0	1·1	0·0
4 20	7.1	1·1	1·2	1·3	1.3	1·4	1·4	1·5	1·6	1·7	1·7	0·1
5 27	7.2	1·8	1·9	2·0	2.1	2·2	2.3	2·4	2.5	2·6	2·8	0·1
6 52	7.3	2·9	3·0	3·2	3.3	3·5	3·6	3·8	4·0	4·2	4·4	0·2
8 38	7.4	4·6	4·8	5·0	5.2	5·5	5·7	6·0	6·3	6·6	6·9	0·3
10′ 52″	7.5	7·2	7·6	7·5	8·3	8·7	9·1	9·5	10·0	10·5	11·0	0·5
13 41	7.6	11·5	12·0	12·6	13·2	13·8	14·4	15·1	15·8	16·6	17·4	0·8
17 14	7.7	18·2	19·0	19·9	20·9	21·9	22·9	24·0	25·1	26·3	27·5	1·3
21 41	7.8	28·8	30·2	31·6	33·1	34·6	36·3	38·0	39·8	41·7	43·6	2·1
27 18	7.9	45·7	47·8	50·1	52·4	54·9	57·5	60.2	63·0	66·0	69·1	3·3
		.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009	
34′ 23″	8.00	72·4	72·7	73.1	73·4	73·7	74·1	74·4	74·8	75·1	75·4	0·4
35 11	8.01	75·8	76·1	76·5	76·8	77·2	77·6	77·9	78·3	78·6	79·0	0·4
36 0	8.02	79·4	79·7	80·1	80·5	80·8	81·2	81·6	82·0	82·3	82·7	0·4
36 50	8.03	83·1	83·5	83·9	84·3	84·7	85·0	85·4	85·8	86·2	86·6	0·4
37 42	8.04	87·0	87·4	87·8	88·2	88·6	89·1	89·5	89·9	90·3	90·7	0·4
38′ 34″	8.05	91·1	91·5	92·0	92·4	92·8	93·2	93·7	94·1	94·5	95·0	0·4
39 28	8.06	95·4	95·9	96·3	96·7	97·2	97·6	98·1	98·5	99·0	99·4	0·5
40 23	8.07	99·9	100·4	100·8	101·3	101·8	102·2	102·7	103·2	103·7	104·1	0·5
41 20	8.08	104·6	105·1	105·6	106·1	106·6	107·1	107·6	108·1	108·5	109·0	0·5
42 17	8.09	109·5	110·0	110·6	111·1	111·6	112·1	112·6	113·1	113·7	114·2	0·5
43′ 17″	8.10	114.7	115·2	115·8	116·3	116·8	117·4	117·9	118·5	119·0	119·6	0·5
44 17	8.11	120·1	120·7	121·2	121·8	122·3	122·9	123·5	124·0	124·6	125·2	0·6
45 19	8.12	125·8	126·3	126·9	127·5	128·2	128·7	129·3	129·9	130·5	131·1	0·6
46 22	8.13	131·7	132·3	132·9	133·5	134·1	134·8	135·4	136·0	136·6	137·3	0·6
47 27	8.14	137·9	138·5	139·2	139·8	140·5	141·1	141·8	142·4	143·1	143·8	0·7
48′ 33″	8.15	144·4	145·1	145·7	146·4	147·1	147·8	148·5	149·1	149·8	150·5	0·7
49 41	8.16	151·2	151·9	152·6	153·3	154·0	154·8	155·4	156·2	156·9	157·6	0·7
50 51	8.17	158·3	159·1	159·8	160·5	161·3	162·0	162·8	163·5	164·3	165·0	0·8
52 2	8.18	165·8	166·6	167·3	168·1	168.9	169·7	170·4	171·2	172·0	172·8	0·8
53 14	8.19	173·6	174·4	175·2	176·0	176·8	177·7	178·5	179·3	180·1	181·0	0·8

vgl. S. 242.

°	h	m	'	m	s	'	m	s	"	s	"	s
1	0	4	1	0	4	31	2	4	1	0,0667	31	2,0667
2	0	8	2	0	8	32	2	8	2	0,1333	32	2,1333
3	0	12	3	0	12	33	2	12	3	0,2000	33	2,2000
4	0	16	4	0	16	34	2	16	4	0,2667	34	2,2667
5	0	20	5	0	20	35	2	20	5	0,3333	35	2,3333
6	0	24	6	0	24	36	2	24	6	0,4000	36	2,4000
7	0	28	7	0	28	37	2	28	7	0,4667	37	2,4667
8	0	32	8	0	32	38	2	32	8	0,5333	38	2,5333
9	0	36	9	0	36	39	2	36	9	0,6000	39	2,6000
10	0	40	10	0	40	40	2	40	10	0,6667	40	2,6667
10	0	40	11	0	44	41	2	44	11	0,7333	41	2,7333
20	1	20	12	0	48	42	2	48	12	0,8000	42	2,8000
30	2	0	13	0	52	43	2	52	13	0,8667	43	2,8667
40	2	40	14	0	56	44	2	56	14	0,9333	44	2,9333
50	3	20	15	1	0	45	3	0	15	1,0000	45	3,0000
60	4	0	16	1	4	46	3	4	16	1,0667	46	3,0667
70	4	40	17	1	8	47	3	8	17	1,1333	47	3,1333
80	5	20	18	1	12	48	3	12	18	1,2000	48	3,2000
90	6	0	19	1	16	49	3	16	19	1,2667	49	3,2667
100	6	40	20	1	20	50	3	20	20	1,3333	50	3,3333
110	7	20	21	1	24	51	3	24	21	1,4000	51	3,4000
120	8	0	22	1	28	52	3	28	22	1,4667	52	3,4667
130	8	40	23	1	32	53	3	32	23	1,5333	53	3,5333
140	9	20	24	1	36	54	3	36	24	1,6000	54	3,6000
150	10	0	25	1	40	55	3	40	25	1,6667	55	3,6667
160	10	40	26	1	44	56	3	44	26	1,7333	56	3,7333
170	11	20	27	1	48	57	3	48	27	1,8000	57	3,8000
180	12	0	28	1	52	58	3	52	28	1,8667	58	3,8667
190	12	40	29	1	56	59	3	56	29	1,9333	59	3,9333
200	13	20	30	2	0	60	4	0	30	2,0000	60	4,0000

Verwandlung der Zeit in Bogen.

h	°	m / s	° / '	' / "	m / s	° / '	' / "	m / s	° / '	' / "	m / s	° / '	' / "	s	"
1	15	1	0	15	16	4	0	31	7	45	46	11	30	0,1	1,5
2	30	2	0	30	17	4	15	32	8	0	47	11	45	0,2	3,0
3	45	3	0	45	18	4	30	33	8	15	48	12	0	0,3	4,5
4	60	4	1	0	19	4	45	34	8	30	49	12	15	0,4	6,0
5	75	5	1	15	20	5	0	35	8	45	50	12	30	0,5	7,5
6	90	6	1	30	21	5	15	36	9	0	51	12	45	0,6	9,0
7	105	7	1	45	22	5	30	37	9	15	52	13	0	0,7	10,5
8	120	8	2	0	23	5	45	38	9	30	53	13	15	0,8	12,0
9	135	9	2	15	24	6	0	39	9	45	54	13	30	0,9	13,5
10	150	10	2	30	25	6	15	40	10	0	55	13	45	1,0	15,0
11	165	11	2	45	26	6	30	41	10	15	56	14	0		
12	180	12	3	0	27	6	45	42	10	30	57	14	15		
13	195	13	3	15	28	7	0	43	10	45	58	14	30		
14	210	14	3	30	29	7	15	44	11	0	59	14	45		
15	225	15	3	45	30	7	30	45	11	15	60	15	0		

vgl. S. 291.

I. Abscissen-Korrektionen oder Ordinaten-Korrektionen von der Form

$$d = \frac{a^2 b}{2 r^2} \qquad \left(\log \frac{1}{2 r^2} = 6.08918 \text{ für } \varphi = 50°\right).$$

a	b: 10km	20km	30km	40km	50km	60km	70km	80km	90km	100km
10km	0,01m	0,02m	0,04m	0,05m	0,06m	0,07m	0,09m	0,10m	0,11m	0,12m
20	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,29	0,34	0,39	0,44	0,49
30	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99	1,11
40	0,20	0,39	0,59	0,79	0,98	1,18	1,38	1,57	1,77	1,96
50	0,31	0,61	0,92	1,23	1,53	1,84	2,15	2,46	2,76	3,07
60km	0,44m	0,88m	1,33m	1,77m	2,21m	2,65m	3,09m	3,54m	3,98m	4,42m
70	0,60	1,20	1,81	2,41	3,01	3,61	4,21	4,81	5,42	6,02
80	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,72	5,50	6,29	7,09	7,86
90	0,99	1,99	2,98	3,98	4,97	5,97	6,96	7,96	8,95	9,95
100	1,23	2,46	3,68	4,91	6,14	7,37	8,60	9,82	11,05	12,28

II. Ordinaten-Konvergenz $\alpha' - \alpha = (x' - x) \frac{y' + y}{2} \frac{\varrho}{r^2}$ oder

$$\alpha' - \alpha = m n \frac{\varrho}{r^2} \qquad \left(\log \frac{\varrho}{r^2} = 1.70464 \text{ für } \varphi = 50°\right).$$

m	n: 10km	20km	30km	40km	50km	60km	70km	80km	90km	100km
10km	0,5″	1,0″	1,5″	2,0″	2,5″	3,0″	3,5″	4,1″	4,6″	5,1″
20	1,0	2,0	3,0	4,1	5,1	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1
30	1,5	3,0	4,6	6,1	7,6	9,1	10,6	12,2	13,7	15,2
40	2,0	4,1	6,1	8,1	10,1	12,2	14,2	16,2	18,2	20,3
50	2,5	5,1	7,6	10,1	12,7	15,2	17,7	20,3	22,8	25,3
60km	3,0″	6,1″	9,1″	12,2″	15,2″	18,2″	21,3″	24,3″	27,4″	30,4″
70	3,5	7,1	10,6	14,2	17,7	21,3	24,8	28,4	31,9	35,5
80	4,1	8,1	12,2	16,2	20,3	24,3	28,4	32,4	36,5	40,5
90	4,6	9,1	13,7	18,2	22,8	27,4	31,9	36,5	41,0	45,6
100	5,1	10,1	15,2	20,3	25,3	30,4	35,5	40,5	45,6	50,7

III. Meridian-Konvergenz. Für die Ordinate y und die Breite φ ist die Meridian-Konvergenz genähert $\gamma = \frac{y}{N} \varrho \tang \varphi = [2]\, y \tang \varphi$ in Sekunden, wo N und [2] der Tafel von Seite [2] bis [23] entsprechen. Folgendes Täfelchen giebt γ in Minuten.

y	Geographische Breite φ: 45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°
10km	5,4′	5,6′	5,8′	6,0′	6,2′	6,4′	6,6′	6,9′	7,1′	7,4′	7,7′
20	10,8	11,1	11,5	12,0	12,4	12,8	13,3	13,8	14,3	14,8	15,4
30	16,1	16,7	17,3	17,9	18,6	19,2	19,9	20,7	21,4	22,2	23,0
40	21,5	22,3	23,1	23,9	24,8	25,6	26,6	27,5	28,6	29,6	30,7
50	26,9	27,9	28,9	29,9	30,9	32,1	33,2	34,4	35,7	37,0	38,4
60km	32,3′	33,4′	34,6′	35,9′	37,1′	38,5′	39,9′	41,3′	42,8′	44,4′	46,1′
70	37,7	39,0	40,4	41,8	43,3	44,9	46,5	48,2	50,0	51,8	53,8
80	43,1	44,6	46,2	47,8	49,5	51,3	53,1	55,1	57,1	59,2	61,4
90	48,4	50,1	51,9	53,8	55,7	57,7	59,8	62,0	64,2	66,6	69,1
100	53,8	55,7	57,7	59,8	61,9	64,1	66,4	68,9	71,4	74,0	76,8

vgl. S. 267.

I. Verzerrung der Ordinaten η.

$$\eta - y = \frac{y^3}{6r^2} \qquad \left(\log \frac{1}{6r^2} = 5.61191 \text{ für } \varphi = 51^\circ\, 30', \text{ Göttingen}\right).$$

y oder η	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0km	0,000m	0,000m	0,000m	0,000m	0,000m	0,001m	0,001m	0,001m	0,002m	0,003m
10	0,004	0,005	0,007	0,009	0,011	0,014	0,017	0,020	0,024	0,028
20	0,033	0,038	0,044	0,050	0,057	0,064	0,072	0,081	0,090	0,100
30	0,110	0,121	0,134	0,147	0,161	0,175	0,191	0,207	0,225	0,243
40	0,262	0,282	0,303	0,325	0,349	0,373	0,398	0,425	0,453	0,480
50km	0,51m	0,54m	0,58m	0,61m	0,64m	0,68m	0,72m	0,78m	0,80m	0,84m
60	0,88	0,93	0,98	1,02	1,07	1,12	1,15	1,26	1,29	1,34
70	1,40	1,46	1,53	1,59	1,66	1,73	1,80	1,87	1,99	2,02
80	2,10	2,17	2,26	2,34	2,43	2,51	2,60	2,69	2,79	2,88
90	2,98	3,08	3,19	3,29	3,40	3,51	3,62	3,73	3,85	3,97
100	4,09									

II. Die Ordinaten-Konvergenz ist in erster Näherung dieselbe, wie bei den *Soldner*schen Coordinaten (II. Seite [32]), vgl. (18) S. 284.

III. Die Meridian-Konvergenz ist ebenfalls in erster Näherung dieselbe, wie bei den *Soldner*schen Coordinaten (III. Seite [32]), vgl. (13) S. 291.

IV. Vergrösserungs-Verhältnis $v = 1 + \frac{\eta^2}{2A^2} = \frac{\mu\,\eta^2}{2A^2}$ für den Kugelhalbmesser A der *Gauss*schen konformen Kugel $\log A = 6.805\,0274$ ((35) S. 430), $\log \frac{\mu}{2A^2} = 5.72670$.

Übersichts-Tabelle für $\log s - \log S = \frac{\mu}{2A^2}\, y^2$. ((17) S. 451.)

y	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0km	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00002	0.00003	0.00003	0.00004
100	5	6	8	9	10	12	14	15	17	19
200	21	24	26	28	31	33	36	39	42	45
300	48	51	55	58	62	65	69	73	77	81
400	85	90	94	99	103	108	113	118	123	128
500	133	139	144	150	155	161	167	173	179	186
600	192	198	205	212	218	225	232	239	246	254
700	0.00261	0.00269	0.00276	0.00284	0.00292	0.00300	0.00308	0.00316	0.00324	0.00333
800	0.00341									

vgl. S. 282 und S. 449.

[illegible]

φ	θ	Diff.	θ²	Diff.	η²	Diff.	η²θ	Diff.	η⁴	Diff.
		+		+		—		+		+
0°	0,0000	3	0,0000		0,00672	0	0,00000	0	0,0000451	0
1	0003	9	0000		672	1	000	1	451	1
2	0012	15	0000		671	1	001	1	450	1
3	0027	22	0000		670	1	002	1	449	2
4	0049	28	0000		669	2	003	2	447	2
5°	0,0077	33	0,0001	0	0,00667	2	0,00005	2	0,0000445	3
6	0110	41	0001	1	665	3	007	3	442	4
7	0151	47	0002	2	662	3	010	3	438	4
8	0198	53	0004	2	659	4	013	3	434	4
9	0251	60	0006	4	655	3	016	4	430	5
10°	0,0311	67	0,0010	4	0,00652	5	0,00020	5	0,0000425	6
11	0378	74	0014	6	647	4	025	4	419	6
12	0452	81	0020	8	643	5	029	5	413	6
13	0533	89	0028	11	638	5	034	5	407	7
14	0622	96	0039	13	633	6	039	6	400	7
15°	0,0718	104	0,0052	16	0,00627	6	0,00045	6	0,0000393	8
16	0822	113	0068	20	621	7	051	6	385	7
17	0935	121	0088	23	614	6	057	7	378	9
18	1056	130	0111	30	608	7	064	7	369	8
19	1186	139	0141	34	601	8	071	8	361	9
20°	0,1325	149	0,0175	42	0,00593	7	0,00079	7	0,0000352	9
21	1474	158	0217	49	586	8	086	8	343	9
22	1632	170	0266	59	578	9	094	9	334	10
23	1802	180	0325	68	569	8	103	8	324	10
24	1982	192	0393	80	561	9	111	9	314	9
25°	0,2174	205	0,0473	93	0,00552	9	0,00120	9	0,0000305	10
26	2379	217	0566	108	543	10	129	9	295	10
27	2596	231	0674	125	533	9	138	10	285	11
28	2827	246	0799	145	524	10	148	10	274	10
29	3073	260	0944	167	514	10	158	10	264	10
30°	0,3333	277	0,1111	192	0,00504	10	0,00168	10	0,0000254	10
31	3610	295	1303	222	494	11	178	11	244	10
32	3905	312	1525	254	483	10	189	10	234	11
33	4217	333	1779	291	473	11	199	11	223	10
34	4550	353	2070	334	462	11	210	11	213	10
35°	0,4903	376	0,2404	382	0,00451	11	0,00221	11	0,0000203	10
36	5279	399	2786	439	440	11	232	11	193	9
37	5678	426	3225	501	429	12	243	12	184	10
38	6104	454	3726	574	417	11	255	11	174	9
39	6558	483	4300	657	406	12	266	12	165	10
40°	0,7041	516	0,4957	753	0,00394	11	0,00278	11	0,0000155	9
41	7557	550	5710	863	383	12	289	12	146	8
42	8107	589	6573	989	371	12	301	12	138	9
43	8696	630	7562	1135	359	11	313	11	129	8
44	9326	674	8697	1303	348	12	324	12	121	8
45	1,0000		1,0000		0,00336		0,00336		0,0000113	

Vgl. S. 393.

φ = geographische Breite, $t^2 = tang^2\,\varphi$, $e'^2 \cos^2\varphi = \eta^2$, $e'^2 \sin^2\varphi = \eta^2 t^2$.

φ	t^2	Diff.	t^4	Diff.	η^2	Diff.	$\eta^2 t^2$	Diff.	η^4	Diff.
		+		+		—		+		—
45°	1,000	0,002	1,000	0,150	0,00336	12	0,00336	12	0,0000113	8
46	1,072	0,078	1,150	0,172	324	11	348	11	105	7
47	1,150	0,083	1,322	0,199	313	12	359	12	098	7
48	1,233	0,090	1,521	0,240	301	12	371	12	091	7
49	1,323	0,097	1,751	0,266	289	11	383	11	084	7
50°	1,420	0,105	2,017	0,309	0,00278	12	0,00394	12	0,0000077	6
51	1,525	0,113	2,326	0,358	266	11	406	11	071	6
52	1,638	0,123	2,684	0,417	255	12	417	12	065	6
53	1,761	0,133	3,101	0,487	243	11	429	11	059	5
54	1,894	0,146	3,588	0.572	232	12	440	11	054	5
55°	2,040	0,158	4,160	0,671	0,00221	11	0,00451	11	0,0000049	5
56	2,198	0,173	4,831	0,792	210	11	462	11	044	4
57	2,371	0,190	5,623	0,936	199	10	473	10	040	4
58	2,561	0,209	6,559	1,113	189	11	483	11	036	4
59	2,770	0,23	7,672	1,33	178	10	494	10	032	4
60°	3,00	0,25	9,00	1,59	0,00168	10	0,00504	10	0,0000028	3
61	3,25	0,29	10,59	1,92	158	10	514	10	025	3
62	3,54	0,31	12,51	2,33	148	10	524	9	022	3
63	3,85	0,35	14,84	2,83	138	9	533	10	019	2
64	4,20	0,40	17,67	3,48	129	9	543	9	017	3
65°	4,60	0,44	21,15	4,30	0,00120	9	0,00552	9	0,0000014	2
66	5,04	0,51	25,45	5,35	111	8	561	8	012	1
67	5,55	0,58	30,80	6,73	103	9	569	9	011	2
68	6,13	0,66	37,53	8,53	094	8	578	8	009	2
69	6,79	0,76	46,06	10,9	086	7	586	7	007	1
70°	7,55	0,88	57,0	14,1	0,00079	8	0,00593	8	0,0000006	1
71	8,43	1,04	71,1	18,6	071	7	601	7	005	1
72	9,47	1,23	89,7	24,8	064	7	608	6	004	1
73	10,70	1,46	114,5	33,4	057	6	614	7	003	0
74	12,16	1,77	147,9	46	051	6	621	6	003	1
75°	13,93	2,16	194	65	0,00045	6	0,00627	6	0,0000002	0
76	16,09	2,67	259	103	039	5	633	5	002	1
77	18,76	3,37	352	138	034	5	638	5	001	0
78	22,13	4,34	490	210	029	4	643	4	001	0
79	26,47	5,69	700	334	025	5	647	5	001	1
80°	32,16	7,70	1034	555	0,00020	4	0,00652	3	0,000000	
81	39,88	10,77	1589	974	016	3	655	4		
82	50,63	15,70	2563	1837	013	3	659	3		
83	66,33	24,19	4400	3794	010	3	662	3		
84	90,52		8194		007	2	665	2		
85°	131		17068		0,00005	2	0,00667	2		
86	205		41824		003	1	669	1		
87	364		132561		002	1	670	1		
88	820		672458		001	1	671	1		
89	3282		∞		000	0	672	0		
90°	∞				0,00000		0,00672			

vgl. S. 393.

φ = geographische Breite, $t^2 = tang^2\,\varphi$.

φ	$log\,(1+2\,t^2)$	Diff.	$log\,(1+3\,t^2)$	Diff.	$log\,(2+t^2)$	Diff.	$log\,(2+3\,t^2)$	Diff.	$log\,(5+6\,t^2)$	Diff.
0°	0.0000	+ 3	0.0000	+ 4	0.3010	+ 1	0.3010	+ 2	0.6990	+ 1
1	0003	8	0004	12	3011	2	3012	6	6991	5
2	0011	13	0016	20	3013	3	3018	10	6996	8
3	0024	18	0036	27	3016	5	3028	14	7004	11
4	0042	24	0063	36	3021	6	3042	18	7015	14
5°	0.0066	29	0.0099	43	0.3027	7	0.3060	22	0.7029	18
6	0095	34	0142	50	3034	9	3082	25	7047	21
7	0129	39	0192	58	3043	10	3107	30	7068	23
8	0168	45	0250	65	3053	11	3137	34	7091	28
9	0213	49	0315	72	3064	13	3171	37	7119	30
10°	0.0262	54	0.0387	79	0.3077	15	0.3208	42	0.7149	33
11	0316	60	0466	86	3092	15	3250	45	7182	37
12	0376	64	0552	92	3107	18	3295	49	7219	40
13	0440	69	0644	99	3125	18	3344	53	7259	43
14	0509	74	0743	104	3143	20	3397	58	7302	47
15°	0.0583	78	0.0847	110	0.3163	22	0.3455	60	0.7349	49
16	0661	83	0957	117	3185	24	3515	65	7398	53
17	0744	88	1074	121	3209	25	3580	69	7451	57
18	0832	92	1195	127	3234	26	3649	72	7508	59
19	0924	97	1322	131	3260	29	3721	76	7567	63
20°	0.1021	101	0.1453	137	0.3289	30	0.3797	81	0.7630	67
21	1122	105	1590	141	3319	32	3878	83	7697	70
22	1227	110	1731	146	3351	34	3961	88	7767	73
23	1337	113	1877	150	3385	36	4049	92	7840	76
24	1450	118	2027	154	3421	38	4141	95	7916	81
25°	0.1568	122	0.2181	158	0.3459	39	0.4236	100	0.7997	83
26	1690	126	2339	162	3498	42	4336	103	8080	87
27	1816	130	2501	166	3540	45	4439	107	8167	91
28	1946	135	2667	170	3585	46	4546	110	8258	95
29	2081	137	2837	173	3631	49	4656	115	8353	98
30°	0.2218	142	0.3010	177	0.3680	51	0.4771	119	0.8451	102
31	2360	146	3187	180	3731	54	4890	122	8553	106
32	2506	151	3367	184	3785	56	5012	127	8659	109
33	2657	154	3551	187	3841	59	5139	131	8768	114
34	2810	158	3738	191	3900	63	5270	134	8882	117
35°	0.2968	162	0.3929	193	0.3963	65	0.5404	139	0.8999	122
36	3130	165	4122	197	4028	68	5543	143	9121	125
37	3295	170	4319	201	4096	71	5686	147	9246	130
38	3465	174	4520	204	4167	75	5833	152	9376	135
39	3639	178	4724	207	4292	78	5985	156	9511	138
40°	0.3817	182	0.4931	210	0.4320	82	0.6141	160	0.9649	144
41	3999	186	5141	215	4402	86	6301	165	9793	148
42	4185	191	5356	218	4488	90	6466	170	9941	152
43	4376	195	5574	221	4578	94	6636	174	1.0093	158
44	4571	200	5795	226	4672	99	6810	180	0251	163
45°	0.4771		0.6021		0.4771		0.6900		1.0414	

vgl. S. 315 und S. 332.

φ = geographische Breite, $t^2 = tang^2\,\varphi$.

φ	$\log(1+2t^2)$	Diff.	$\log(1+3t^2)$	Diff.	$\log(2+t^2)$	Diff.	$\log(2+3t^2)$	Diff.	$\log(5+6t^2)$	Diff
		+		+		+		+		+
45°	0.4771	205	0.6021	229	0.4771	104	0.6990	184	1.0414	168
46	4976	209	6250	234	4875	108	7174	190	0582	173
47	5185	214	6484	237	4983	114	7364	195	0755	179
48	5399	220	6721	243	5097	119	7559	201	0934	185
49	5619	225	6964	247	5216	125	7760	206	1119	191
50°	0.5844	230	0.7211	251	0.5341	131	0.7966	213	1.1310	198
51	6074	237	7462	257	5472	137	8179	211	1508	203
52	6311	242	7719	263	5609	144	8398	225	1711	211
53	6553	249	7982	268	5752	151	8623	233	1922	218
54	6802	256	8250	274	5904	159	8856	239	2140	225
55°	0.7058	263	0.8524	281	0.6063	167	0.9095	247	1.2365	233
56	7321	270	8805	287	6230	176	9342	255	2598	241
57	7591	278	9092	295	6406	185	9597	263	2839	250
58	7869	287	9387	302	6591	194	9860	272	3089	259
59	8156	295	9689	311	6785	205	1.0132	282	3348	269
60°	0.8451	305	1.0000	320	0.6990	215	1.0414	291	1.3617	280
61	8756	315	0320	329	7205	228	0705	303	3897	290
62	9071	326	0649	339	7433	240	1008	313	4187	301
63	9397	338	0988	351	7673	254	1321	326	4489	314
64	9735	350	1339	363	7927	268	1647	339	4803	328
65°	1.0085	364	1.1702	375	0.8195	284	1.1986	353	1.5131	343
66	0449	379	2077	390	8479	300	2339	368	5474	358
67	0828	395	2467	406	8779	320	2707	385	5832	375
69	1223	410	2873	423	9099	339	3092	404	6207	394
69	1635	433	3296	442	9438	361	3495	422	6601	414
70°	1.2068	453	1.3738	462	0.9799	386	1.3917	445	1.7015	436
71	2521	477	4200	486	1.0185	411	4362	469	7451	461
72	2998	504	4686	512	0596	442	4831	496	7912	488
73	3502	533	5198	541	1038	473	5327	525	8400	519
74	1.4035	57	1.5739	57	1.1511	51	1.5852	56	1.8919	55
75°	1.460	61	1.631	61	1.202	55	1.641	60	1.947	60
76	1.521	65	1.692	66	1.257	60	1.701	65	2.007	63
77	1.586	70	1.758	71	1.317	66	1.766	69	2.070	69
78	1.656	76	1.829	76	1.383	71	1.835	77	2.139	75
79	1.732	83	1.905	84	1.454	80	1.911	82	2.214	83
80°	1.815	92	1.989	92	1.534	88	1.993	92	2.297	91
81	1.907	103	2.081	103	1.622	99	2.085	102	2.388	102
82	2.010	116	2.184	117	1.721	114	2.187	116	2.490	115
83	2.126	134	2.301	134	1.835	131	2.303	134	2.605	134
84	2.260	159	2.435	159	1.966	157	2.437	158	2.739	158
85°	2.419	194	2.594	195	2.123	192	2.595	194	2.897	194
86	2.613	250	2.789	250	2.315	249	2.789	250	3.091	249
87	3.863	352	3.039	352	2.564	351	3.039	352	3.340	352
88	3.215	602	3.391	602	2.915	601	3.391	602	3.692	602
89	3.817		3.993		3.516		3.993		4.294	
90°	∞		∞		∞		∞		∞	

vgl. S. 315 und S. 332.

φ	log [4]	Diff.	log [5]	Diff.	log [6]	Diff.	log [7]	Diff.	log [8]	Diff.
		—		+		—		—		—
0°	4·62581	0	4·93266	20	2·930$_n$	0	4·93266	0	5·10777	0
1	62581	2	93286	59	930$_n$	1	93266	0	10777	0
2	62579	4	93345	98	929$_n$	1	93266	1	10777	0
3	62575	5	93443	137	928$_n$	2	93265	0	10777	1
4	62570	6	93580	176	926$_n$	2	93265	1	10776	0
5	62564	8	93756	216	924$_n$	3	93264	1	10776	1
6°	4·62556	9	4·93972	255	2·921$_n$	4	4·93263	1	5·10775	1
7	62547	10	94227	293	917$_n$	4	93262	1	10774	0
8	62537	12	94520	333	913$_n$	5	93261	2	10774	2
9	62525	14	94853	371	908$_n$	5	93259	2	10772	1
10	62511	14	95224	411	903$_n$	5	93257	2	10771	1
11	62497	16	95635	449	898$_n$	6	93255	1	10770	1
12°	4·62481	17	4·96084	487	2·892$_n$	7	4·93254	3	5·10769	1
13	62464	19	96571	527	885$_n$	8	93251	2	10768	2
14	62445	19	97098	563	877$_n$	8	93249	2	10766	2
15	62426	21	97661	605	869$_n$	9	93247	3	10764	1
16	62405	22	98266	641	860$_n$	10	93244	3	10763	2
17	62383	24	98907	680	850$_n$	10	93241	3	10761	2
18°	4·62359	24	4·99587	718	2·840$_n$	11	4·93238	3	5·10759	2
19	62335	26	5·00305	756	829$_n$	12	93235	3	10757	3
20	62309	27	01061	795	817$_n$	13	93232	3	10754	2
21	62282	28	01856	832	804$_n$	14	93229	4	10752	2
22	62254	29	02688	871	790$_n$	15	93225	3	10750	2
23	62225	30	03559	909	775$_n$	16	93222	4	10748	2
24°	4·62195	31	5·04468	947	2·759^n	17	4·93218	4	5·10746	3
25	62164	31	05415	986	742^n	18	93214	4	10743	3
26	62133	34	06401	1024	724^n	20	93210	4	10740	2
27	62099	33	07425	1063	704^n	21	93206	4	10738	3
28	62066	35	08488	1102	683^n	23	93202	4	10735	3
29	62031	35	09590	1140	660^n	25	93198	4	10732	3
30°	4·61996	36	5·10730	1180	2·635$_n$	26	4·93194	5	5·10729	3
31	61960	37	11910	1219	609$_n$	29	93189	4	10726	3
32	61923	38	13129	1260	580$_n$	32	93185	5	10723	3
33	61885	38	14389	1299	548$_n$	35	93180	5	10720	3
34	61847	39	15688	1341	613$_n$	38	93175	4	10717	3
35	61808	39	17029	1382	475$_n$	43	93171	5	10714	3
36°	4·61769	40	5·18411	1423	2·432$_n$	48	4·93166	5	5·10711	3
37	61729	40	19834	1466	384$_n$	55	93161	5	10708	4
38	61689	41	21300	1510	329$_n$	63	93156	5	10704	3
39	61648	41	22810	1554	266$_n$	75	93151	5	10701	3
40	61607	42	24364	1598	191$_n$	91	93146	5	10698	3
41	61565	41	25962	1645	100$_n$		93141	5	10695	4
42°	4·61524	42	5·27607	1691	1·984$_n$		4·93136	5	5·10691	3
43	61482	42	29298	1740	1·824$_n$		93131	5	10688	3
44	61440	42	31038	1790	1·568$_n$		93126	5	10685	4
45	61398	42	32828	1840	0·855$_n$		93121	5	10681	3
46	61356	43	34668	1893	1·356		93116	5	10678	3
47	61313	42	36561	1947	1·720		93111	5	10675	4
48°	4·61271		5·38508		1·915		4·93106		5·10671	

log [3] = 4·62872 konstant.

vgl. S. 397.

φ	log [4]	Diff.	log [5]	Diff.	log [6]	Diff.	log [7]	Diff.	log [8]	Diff.
		—		+		+		—		—
48°	4·61271	42	5.38508	2004	1·915	134	4·93106	5	5·10671	3
49	61229	42	40512	2062	2·049	102	93101	5	10668	4
50	61187	42	42574	2122	151	82	93096	5	10664	3
51	61145	41	44696	2186	233	68	93091	5	10661	3
52	61104	41	46882	2251	301	59	93086	5	10658	3
53	61063	41	49133	2320	360	51	93081	5	10655	4
54°	4·61022	41	5·51453	2392	2·411	47	4·93076	5	5·10651	3
55	60981	40	53845	2468	458	39	93071	5	10648	3
56	60941	39	56313	2547	497	37	93066	4	10645	3
57	60902	39	58860	2631	534	33	93062	5	10642	3
58	60863	38	61491	2720	567	31	93057	4	10639	3
59	60825	38	64211	2814	598	28	93053	5	10636	3
60°	4·60787	37	5·67025	2914	2·626	26	4·93048	5	5·10633	3
61	60750	36	69939	3020	652	24	93043	3	10630	3
62	60714	36	72959	3134	676	22	93040	5	10627	3
63	60678	34	76093	3256	698	20	93035	4	10624	2
64	60644	33	79349	3387	718	19	93031	4	10622	3
65	60611	33	82736	3528	737	18	93027	3	10619	2
66°	4·60578	32	5·86264	3681	2·755	17	4·93024	4	5.10617	3
67	60546	31	89945	3848	772	15	93020	4	10614	2
68	60515	29	93793	4029	787	15	93016	3	10612	2
69	60486	30	97822	4228	802	13	93013	4	10610	3
70	60456		6·02050		815		93009		10607	

Besondere Tafel für log [5] mit kleinerem Intervall.

φ	log [5]	Diff.	φ	log [5]	Diff.	φ	log [5]	Diff.	φ	log [5]	Diff.
		+			+			+			+
43° 0′	5·29298	286	46° 0′	5·34668	312	49° 0′	5·40512	340	52° 0′	5·46882	371
10	29584	288	10	34980	314	10	40852	341	10	47253	372
20	29872	290	20	35294	315	20	41193	343	20	47625	374
30	30162	290	30	35609	315	30	41536	344	30	47999	376
40	30452	292	40	35924	318	40	41880	344	40	48375	378
50	30744	294	50	36242	319	50	42226	348	50	48753	380
44° 0′	5·31038	295	47° 0′	5·36561	321	50° 0′	5·42574	349	53° 0′	5·49133	382
10	31333	296	10	36882	322	10	42923	352	10	49515	384
20	31629	298	20	37204	324	20	43275	352	20	49899	386
30	31927	298	30	37528	325	30	43627	355	30	50285	388
40	32225	301	40	37853	327	40	43982	356	40	50673	390
50	32526	302	50	38180	328	50	44338	358	50	51063	390
45° 0′	5·32828	302	48° 9′	5·38508	330	51° 0′	5·44696	360	54° 0′	5·51453	394
10	33130	304	10	38838	332	10	45056	361	10	51847	396
20	33434	307	20	39170	333	20	45417	363	20	52243	398
30	33741	307	30	39503	335	30	45780	365	30	52641	400
40	34048	309	40	39838	336	40	46145	367	40	53041	402
50	34357	311	50	40174	338	50	46512	370	50	53443	402
46° 0′	5·34668		49° 0′	5·40512		52° 0′	5·46882		55° 0′	5·53845	

log [3] = 4·62872 konstant.

vgl. S. 397.

$$tang\ \psi = \sqrt{1 - e^2}\ tang\ \varphi, \quad \varphi - \psi = 345{,}32538\ sin\ (\varphi + \psi)$$

[2.538 2285]

φ	φ — ψ	Diff.	φ	φ — ψ	Diff.	φ	φ — ψ	Diff.
0°	0′ 0,0″	+ 12,0″	45° 0′	5′ 45,33″	— 0,01″	53° 0′	5′ 32,10″	— 0,56″
1	0 12,0	12,0	10	45,32	0,01	10	31,50	0,56
2	0 24,0	12,0	20	45,31	0,03	20	30,98	0,58
3	0 36,0	12,0	30	45,28	0,04	30	30,40	0,59
4	0 48,0	12,0	40	45,24	0,04	40	29,81	0,60
5	1 0,0	11,7	50	45,20	0,07	50	29,21	0,62
6°	1′ 11,7″	11,7″	46° 0′	5′ 45,13	0,07″	54° 0′	5′ 28,59″	0,62″
7	1 23,4	11,6	10	45,06	0,08	10	27,97	0,63
8	35,0	11,5	20	44,98	0,10	20	27,34	0,65
9	46,5	11,4	30	44,88	0,11	30	26,69	0,66
10	57,9	11,3	40	44,77	0,12	40	26,03	0,67
11	2 9,2	11,0	50	44,65	0,13	50	25,36	0,67
12°	2′ 20,2″	11,0″	47° 0′	5′ 44,52″	0,14″	55° 0′	5′ 24,69″	4,3″
13	31,2	10,7	10	44,38	0,15	56	20,4	4,7
14	41,9	10,5	20	44,23	0,17	57	15,7	5,1
15	52,4	10,3	30	44,06	0,18	58	10,6	5,5
16	3 2,7	10,1	40	43,88	0,19	59	5,1	5,8
17	12,8	9,9	50	43,69	0,20	60	4′ 59,3	6,2
18°	3′ 22,7″	9,6″	48° 0′	5′ 43,49″	0,21″	61°	4′ 53,1″	6,5″
19	32,3	9,4	10	43,28	0,22	62	46,6	7,0
20	41,7	9,1	20	43,06	0,24	63	39,6	7,2
21	50,8	8,8	30	42,82	0,25	64	32,4	7,6
22	59,6	8,5	40	42,57	0,26	65	24,8	7,9
23	4 8,1	8,2	50	42,31	0,27	66	16,9	8,2
24°	4′ 16,3″	7,9″	49° 0′	5′ 42,04″	0,28″	67°	4′ 8,7″	8,5″
25	24,2	7,6	10	41,76	0,29	68	0,2	8,8
26	31,8	7,3	20	41,47	0,31	69	3′ 51,4	9,1
27	39,1	6,9	30	41,16	0,31	70	42,3	9,4
28	46,0	6,6	40	40,85	0,33	71	32,9	9,6
29	52,6	6,2	50	40,52	0,34	72	23,3	9,9
30°	4′ 58,8″	5,9″	50° 0′	5′ 40,18	0,35″	73°	3′ 13,4″	10,1″
31	5 4,7	5,4	10	39,83	0,37	74	3,3	10,4
32	10,1	5,2	20	39,46	0,37	75	2′ 52,9	10,5
33	15,3	4,7	30	39,09	0,39	76	42,4	10,8
34	20,0	4,3	40	38,70	0,39	77	31,6	10,9
35	24,3	4,0	50	38,31	0,41	78	20,7	11,1
36°	5′ 28,3″	3,5″	51° 0′	5′ 37,90″	0,42″	79°	2′ 9,6″	11,3″
37	31,8	3,1	10	37,48	0,44	80	1′ 58,3	11,4
38	34,9	2,8	20	37,04	0,44	81	46,9	11,6
39	37,7	2,3	30	36,60	0,45	82	35,3	11,6
40	40,0	1,9	40	36,15	0,47	83	23,7	11,8
41	41,9	1,5	50	35,68	0,48	84	11,9	11,8
42°	5′ 43,4″	1,0″	52° 0′	5′ 35,20″	0,49″	85°	1′ 0,1″	12,0″
43	44,4	0,7	10	34,71	0,50	86	0′ 48,1	11,9
44	45,1	+0,2	20	34,21	0,51	87	36,2	12,1
45	45,3	—0,2	30	33,70	0,52	88	24,1	12,0
46	45,1	0,6	40	33,18	0,53	89	12,1	12,1
47	5 44,5		50	32,65		90	0′ 0,0	

vgl. S. 404.

Sphäroidische Länge $= l$ (Ellipsoid)
Sphärische Länge $= \lambda$ (Kugel.

$$\lambda = \alpha l \qquad l = \frac{1}{\alpha}\lambda$$

$$\alpha = 1{,}000\,452\,918 \qquad \frac{1}{\alpha} = 0{,}999\,547\,287 = 1 - 0{,}000\,452\,713$$

$$\lambda - l = +\,0{,}000\,452\,918\;l \qquad l - \lambda = -\,0{,}000\,452\,713\;\lambda$$

$$\log \alpha = 0.000\,1966{\cdot}553 \qquad \log \frac{1}{\alpha} = 9.999\,8033{\cdot}447$$

Ellipsoid l	$\lambda - l$	Kugel λ	$l - \lambda$
1″	+ 0,000 453″	1″	— 0,000 453″
2″	0,000 906″	2″	0,000 905″
3″	0,001 359″	3″	0,001 358″
4″	0,001 812″	4″	0,001 811″
5″	0,002 265″	5″	0,002 264″
6″	+ 0,002 718″	6″	— 0,002 716″
7″	0,003 170″	7″	0,003 169″
8″	0,003 623″	8″	0,003 622″
9″	0,004 076″	9″	0,004 074″
10″	0,004 529″	10″	0,004 527″
20″	+ 0,009 058″	20″	— 0,009 054″
30″	0,013 588″	30″	0,013 581″
40″	0,018 117″	40″	0,018 109″
50″	0,022 646″	50″	0,022 636″
60″	0,027 175″	60″	0,027 163″
1′	+ 0,027 175″	1′	— 0,027 163″
2′	0,054 350″	2′	0,054 326″
3′	0,081 525″	3′	0,081 488″
4′	0,108 700″	4′	0,108 651″
5′	0,135 875″	5′	0,135 814″
6′	+ 0,163 050″	6′	— 0,162 977″
7′	0,190 226″	7′	0,190 139″
8′	0,217 401″	8′	0,217 302″
9′	0,244 576″	9′	0,244 465″
10′	0,271 751″	10′	0,271 628″
20′	+ 0,543 502″	20′	— 0,543 256″
30′	0,815 252″	30′	0,814 883″
40′	1,087 003″	40′	1,086 511″
50′	1,358 754″	50′	1,358 139″
60′	1,630 505″	60′	1,629 767″
1°	+ 1,630 505″	1°	— 1,629 767″
2°	3,261 010″	2°	3,259 534″
3°	4,891 514″	3°	4,889 300″
4°	6,522 019″	4°	6,519 067″
5°	8,152 524″	5°	8,148 834″
6°	+ 9,783 029″	6°	— 9,778 601″
7°	11,413 534″	7°	11,408 368″
8°	13,044 038″	8°	13,038 134″
9°	14,674 543″	9°	14,667 901″
10°	16,305 048″	10°	16,297 668″

vgl. S. 445.

Kugel u	Ellipsoid φ	Differenzen		$log\ m$	Diff.	k	Diff.
		+	—	+	—		—
46° 0′	46° 1′ 19,1599″			14·46		8,79″	
		10′ 1,4235″			1·06		0,42″
46 10	46 11 20,5834		0,0175	13·40		8,37	
		10 1,4060			1·00		0,42
46 20	46 21 21,9894		0,0175	12·40		7,95	
		10 1,3885			0·94		0,41
46 30	46 30 24,3779		0,0174	11·46		7,54	
		10 1,3711			0·90		0,40
46 40	46 41 24,74900		0,0175	10·559		7,141	
		10 1,35362			0·850		0,387
46 50	46 51 26,10262		0,01746	9·709		6,754	
		10 1,33616			0·805		0,376
47° 0′	47° 1′ 27,43878″		0,01746	8·904		6,378″	
		10′ 1,31870″			0·758		0,366″
47 10	47 11 28,75748		0,01746	8·146		6,012	
		10 1,30124			0·715		0,355
47 20	47 21 30,05872		0,01746	7·431		5,657	
		10 1,28378			0·672		0,344
47 30	47 31 31,34250		0,01745	6·759		5,313	
		10 1,26633			0·630		0,334
47 40	47 41 32,60883		0,01744	6·129		4,979	
		10 1,24889			0·590		0,324
47 50	47 51 33,85772		0,01745	5·539		4,655	
		10 1,23144			0·551		0,312
48° 0′	48° 1′ 35,08916″		0,01744	4·988		4,343″	
		10′ 1,21400″			0·513		0,302″
48 10	48 11 36,30316		0,01743	4·475		4,041	
		10 1,19657			0·477		0,292
48 20	48 21 37,49973		0,01742	3·998		3,749	
		10 1,17915			0·442		0,280
48 30	48 31 38,67888		0,01742	3·556		3,469	
		10 1,16173			0·408		0,270
48 40	48 41 39,84061		0,01740	3·148		3,199	
		10 1,14433			0·376		0,259
48 50	48 51 40,98494		0,01740	2·772		2,940	
		10 1,12693			0·345		0,248
49° 0′	49° 1′ 42,11187″		0,01739	2·427		2,692″	
		10′ 1,10954″			0·315		0,238″
49 10	49 11 43,22141		0,01737	2·112		2,454	
		10 1,09217			0·287		0,227
49 20	49 21 44,31358		0,01737	1·825		2,227	
		10 1,07480			0·259		0,215
49 30	49 31 45,38838		0,01734	1·566		2,012	
		10 1,05746			0·234		0,205
49 40	49 41 46,44584		0,01734	1·332		1,807	
		10 1,04012			0·209		0,194
49 50	49 51 47,48596		0,01732	1·123		1,613	
		10 1,02280			0·187		0,184
50° 0′	50° 1′ 48,50876″		0,01731	0·936		1,429″	
		10′ 1,00549″			0.164		0,172″
50 10	50 11 49,51425		0,01729	0·772		1,257	
		10 0,98820			0.144		0,161
50 20	50 21 50,50245		0,01727	0·628		1,096	
		10 0,97093			0.125		0,150
50 30	50 31 51,47338		0,01726	0·503		0,946	
		10 0,95367			0.107		0,140
50 40	50 41 52,42705		0,01724	0·396		0,806	
		10 0,93643			0.091		0,128
50 50	50 51 53,36348		0,01721	0·305		0,678	
		10 0,91922			0.076		0,117
51° 0′	51° 1′ 54,28270″		0,01721	0·229		0,561″	
		10′ 0,90201″			0·062		0,107″
51 10	51 11 55,18471		0,01717	0·167		0,454	
		10 0,88484			0·049		0,095
51 20	51 21 56,06955		0,01717	0·118		0,359	
		10 0,86767			0·039		0,084
51 30	51 31 56,93722		0,01712	0·079		0,275	
		10 0,85055			0·029		0,073
51 40	51 41 57,78777		0,01712	0·050		0,202	
		10 0,83343			0·021		0,061
51 50	51 51 58,62120		0,01709	0·029		0,141	
		10 0,81634			0·014		0,051
52° 0′	52° 1′ 59,43754″		0,01707	0·015		0,090″	
		10′ 0,79927″			0·009		—0,039″
52 10	52 12 0,23681		0,01703	0·006		0,051	
		10 0,78224			0·004		—0,028
52 20	52 22 1,01905		0,01701	+0·002		0,023	
		10 0,76523			0·002		—0,017
52 30	52 32 1,78428		0,01700	0·000		0,006	
		10 0,74823					—0,006
52 40	52 42 2,53251		0,01695	0·000		0,000	
		10 0,73128					+0,006
52 50	52 52 3,26379		0,01693	0·000		0,006	
		10 0,71435					+0,017
53° 0′	53° 2′ 3,97814″			—0·002		0,023	

vgl. S. 445.

Kugel u	Ellipsoid φ	Differenzen +	Differenzen —	*log m*	Diff.	k	Diff.
52° 0′	52° 1′ 59,43754″	10′ 0,79927″	0,01703″	+ 0·015	— 0·009	0,090″	—0,039″
52 10	52 12 0,23681	10 0,78224	0,01701	0·006	0·004	0,051	—0,028
52 20	52 22 1,01905	10 0,76523	0,01700	0·002	0·002	0,023	—0,017
52 30	52 32 1,78428	10 0,74823	0,01695	0·000		0,006	+0,006
52 40	52 42 2,53251	10 0,73128	0,01693	±		0,000	+0,006
52 50	52 52 3,25379	10 0,71435	0,01690	0·000	0·002	0,006	+0,017
53° 0′	53° 2′ 3,97814″	10′ 0,69745″	0,01688″	0·002	0·004	0,023″	+0,028″
53 10	53 12 4,67559	10 0,68057	0,01684	0·006	0·009	0,051	0,040
53 20	53 22 5,35616	10 0,66373	0,01681	0·015	0·014	0,091	0,051
53 30	53 32 6,01989	10 0,64692	0,01677	0·029	0·021	0,142	0,062
53 40	53 42 6,66681	10 0,63015	0,01675	0·050	0·029	0,204	0,074
53 50	53 52 7,29696	10 0,61840	0,01672	0·079	0·040	0,278	0,085
54° 0′	54° 2′ 7,91036″	10′ 0,59668″	0,01667″	0·119	0·050	0,363″	+0,097″
54 10	54 12 8,50704	10 0,58001	0,01664	0·169	0·063	0,460	0,109
54 20	54 22 9,08705	10 0,56337	0,01661	0·232	0·077	0,569	0,120
54 30	54 32 9,65042	10 0,54676	0,01658	0·309	0·092	0,689	0,131
54 40	54 42 10,19718	10 0,53018	0,01652	0·401	0·109	0,820	0,144
54 50	54 52 10,72736	10 0,51366	0,01650	0·510	0·128	0,964	0,154
55° 0′	55° 2′ 11,24102″	10′ 0,49716″	0,01645″	0·638	0·147	1,118″	+0,167″
55 10	55 12 11,73818	10 0,48071	0,01642	0·785	0·168	1,285	0,178
55 20	55 22 12,21889	10 0,46429	0,01638	0·953	0·191	1,463	0,190
55 30	55 32 12,68318	10 0,44791	0,01633	1·144	0·214	1,653	0,202
55 40	55 42 13,13109	10 0,43158	0,01630	1·358	0·240	1,855	0,213
55 50	55 52 13,56267	10 0,41528	0,01624	1·598	0·267	2,068	0,225
56° 0′	56° 2′ 13,97795″	10′ 0,39904″	0,01621″	1·865	0·296	2,293″	+0,238″
56 10	56 12 14,37699	10 0,38283	0,01617	2·161	0·325	2,531	0,249
56 20	56 22 14,75982	10 0,36666	0,01611	2·486	0·356	2,780	0,261
56 30	56 32 15,12648	10 0,35055	0,01608	2·842	0·389	3,041	0,273
56 40	56 42 15,47703	10 0,33447	0,01602	3·231	0·423	3,314	0,285
56 50	56 52 15,81150	10 0,31845	0,01598	3·654	0·459	3,599	0,297
57° 0′	57° 2′ 16,12995″	10′ 0,30247″	0,01593″	4·113	0·496	3,896″	+0,309″
57 10	57 12 16,43242	10 0,28654	0,01588	4·609	0·535	4,205	0,321
57 20	57 22 16,71896	10 0,27066	0,01584	5·144	0·575	4,526	0,333
57 30	57 32 16,98962	10 0,25482	0,01578	5·719	0·616	4,859	0,346
57 40	57 42 17,24444	10 0,23904	0,01574	6·335	0·659	5,205	0,358
57 50	57 52 17,48348	10 0,22330	0,01567	6·994	0·704	5,563	0,370
58° 0′	58° 2′ 17,70678″	10′ 0,20763″	0,01563″	7·698	0·750	5,933″	+0,382″
58 10	58 12 17,91441	10 0,19200	0,01558	8·448	0·798	6,315	0,395
58 20	58 22 18,10641	10 0,17642	0,01552	9·246	0·846	6,710	0,407
58 30	58 32 18,28283	10 0,16090	0,01547	10·092	0·898	7,117	0,419
58 40	58 42 18,44373	10 0,14543	0,01541	10·990	0·951	7,536	0,431
58 50	58 52 18,58916	10 0,13002		11·941	1·002	7,967	0,443
59° 0′	59 2 18,71918			12·943		8,410	

vgl. S. 445.

φ	log (σ1)	Diff.	log (σ2)	Diff.	log (σ3)	Diff.	log (σ4)	Diff.	log (σ5)	Diff.
30°	5.52260n	— 2651	5.99485n	— 893	3.587	— 27	3.712	+ 91	3.976n	+19
31	5.49609n	2882	5.98542n	929	3.560	30	3.803	82	3.995n	14
32	5.46727n	3144	5.97613n	966	3.530	32	3.885	74	4.009n	13
33	5.43583n	3449	5.96647n	1003	3.498	36	3.959	70	4.022n	13
34	5.40134n	3805	5.95644n	1042	3.462	40	4.029	65	4.035n	11
35°	5.36329n	4232	5.94602n	1082	3.422	44	4.094	61	4.046n	+ 8
36	5.32097n	4751	5.93520n	1122	3.378	49	4.155	59	4.054n	7
37	5.27346n	5398	5.92398n	1163	3.329	57	4.214	56	4.061n	4
38	5.21948n	6281	5.91235n	1206	3.272	66	4.270	53	4.065n	+ 3
39	5.15717n	7357	5.90029n	1249	3.206	78	4.323	52	4.068n	— 1
40°	5.08360n	8900	5.88780n	1295	3.128	96	4.375	51	4.067n	— 3
41	4.99460n	11806	5.87485n	1342	3.032	124	4.426	48	4.064n	4
42	4.88154n	15413	5.86143n	1389	2.908	176	4.474	49	4.058n	10
43	4.72741n	24225	5.84754n	1438	2.732	301	4.523	46	4.048n	15
44	4.48516n		5.83316n	1490	2.431		4.569	46	4.033n	20
45°	3.88570n	+	5.81826n	1543	−∞	+	4.615	45	4.013n	—26
46	4.18121n	39981	5.80283n	1598	2.431n	301	4.660	45	3.987n	35
47	4.58102n	20411	5.78685n	1654	2.732n	176	4.705	44	3.952n	45
48	4.78513n	13798	5.77031n	1714	2.908n	124	4.749	43	3.907n	62
49	4.92311n	10420	5.75317n	1775	3.032n	96	4.792	43	3.845n	—86
50°	5.02731n	8358	5.73542n	1839	3.128n	78	4.835	42	3.759n	127
51	5.11089n	6965	5.71703n	1906	3.206n	66	4.877	43	3.632n	219
52	5.18054n	5958	5.69797n	1976	3.272n	57	4.920	42	3.413n	607
53	5.24012n	5194	5.67821n	2049	3.329n	49	4.962	42	2.806n	
54	5.29206n	4593	5.65772n	2125	3.378n	44	5.004	42	3.202	
55	5.33799n		5.63647n		3.422n		5.046		3.617	

Besondere Tafel für log (σ1).

φ	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Diff.
							+
45°	3.88570n	3.58776n	1.73612n	3.61198	3.87962	4.05674	12547
46	4.18121	4.27944	4.35882	4.42590	4.48399	4.53521	4581
47	4.58102	4.62244	4.66024	4.69500	4.72718	4.75712	2801
48	4.78513	4.81142	4.83619	4.85963	4.88185	4.90298	2013
49	4.92311	4.94234	4.96074	4.97838	4.99532	5.01162	1569
50°	5.02731	5.04244	5.05705	5.07118	5.08483	5.09806	1283
51	5.11089	5.12334	5.13542	5.14717	5.15859	5.16971	1083
52	5.18054	5.19109	5.20138	5.21141	5.22121	5.23077	935
53	5.24012	5.24925	5.25819	5.26692	5.27548	5.28386	820
54	5.29206	5.30009	5.30797	5.31569	5.32327	5.33070	729
55	5.33799						

In der Gegend von φ = 45°, wo (σ1) durch Null geht, braucht man log (σ1) nur auf sehr wenige Stellen, man kann daher trotz der Ungleichheit der Differenzen mit hinreichender Genauigkeit proportional oder graphisch interpolieren.

vgl. S. 417—419.

φ	$log\ (\lambda_1)$		$log\ (\lambda_2)$		$log\ (\lambda_3)$		$log\ (\lambda_4)$		$log\ (\lambda_5)$	
		+		−		+		−		+
30°	5.99325_n	882	5.99435_n	893	4.065_n	19	4.012_n	9	4.013_n	22
31	6.00207_n	880	5.98542_n	929	4.084_n	20	4.003_n	16	4.035_n	19
32	6.01087_n	877	5.97613_n	966	4.104_n	19	3.987_n	21	4.054_n	19
33	6.01964_n	873	5.96647_n	1003	4.123_n	19	3.966_n	28	4.073_n	17
34	6.02837_n	867	5.95644_n	1042	4.142_n	18	3.938_n	38	4.090_n	16
35°	6.03704_n	862	5.94602_n	1082	4.160_n	17	3.900_n	50	4.106_n	15
36	6.04566_n	854	5.93520_n	1122	4.177_n	17	3.850_n	68	4.121_n	13
37	6.05420_n	845	5.92398_n	1163	4.194_n	17	3.782_n	97	4.134_n	12
38	6.06265_n	833	5.91235_n	1206	4.211_n	16	3.685_n	140	4.146_n	11
39	6.07098_n	829	5.90029_n	1249	4.227_n	16	3.545_n	—	4.157_n	9
40°	6.07927_n	818	5.88780_n	1295	4.243_n	15	3.262_n	+	4.166_n	8
41	6.08745_n	805	5.87485_n	1342	4.258_n	15	1.409_n		4.174_n	7
42	6.09550_n	793	5.86143_n	1389	4.273_n	14	3.331_n	326	4.181_n	4
43	6.10343_n	781	5.84754_n	1438	4.287_n	14	3.657_n	204	4.185_n	3
44	6.11124_n	768	5.83316_n	1490	4.301_n	13	3.861_n	152	4.188_n	±
45°	6.11892_n	754	5.81826_n	1543	4.314_n	13	4.013_n	125	4.189_n	1
46	6.12646_n	741	5.80283_n	1598	4.327_n	13	4.138_n	107	4.188_n	3
47	6.13387_n	726	5.78685_n	1654	4.340_n	12	4.245_n	95	4.185_n	6
48	6.14113_n	712	5.77031_n	1714	4.352_n	12	4.340_n	87	4.179_n	10
49	6.14825_n	697	5.75317_n	1775	4.364_n	12	4.427_n	79	4.169_n	13
50°	6.15522_n	681	5.73542_n	1839	4.376_n	11	4.506_n	74	4.156_n	17
51	6.16203_n	666	5.71703_n	1906	4.387_n	11	4.580_n	70	4.139_n	22
52	6.16869_n	650	5.69797_n	1976	4.398_n	10	4.650_n	67	4.117_n	30
53	6.17519_n	634	5.67821_n	2049	4.408_n	10	4.716_n	64	4.087_n	38
54	6.18153_n	618	5.65772_n	2125	4.418_n	10	4.781_n	61	4.049_n	50
55°	6.18771_n		5.63647_n		4.428_n		4.842_n		3.999_n	

Besondere Tafel für $log\ (\sigma_2) = log\ (\lambda_2)$.

φ	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Diff.
							−
45°	5.81826_n	5.81572_n	5.81317_n	5.81061_n	5.80803_n	5.80544_n	261
46	5.80283_n	5.80021_n	5.79757_n	5.79491_n	5.79224_n	5.78956_n	271
47	5.78685_n	5.78414_n	5.78140_n	5.77865_n	5.77589_n	5.77311_n	280
48	5.77031_n	5.76749_n	5.76466_n	5.76182_n	5.75895_n	5.75607_n	290
49	5.75317_n	5.75026_n	5.74733_n	5.74438_n	5.74141_n	5.73842_n	300
50°	5.73542_n	5.73240_n	5.72936_n	5.72631_n	5.72323_n	5.72014_n	311
51	5.71703_n	5.71390_n	5.71075_n	5.70759_n	5.70440_n	5.70120_n	323
52	5.69797_n	5.69473_n	5.69146_n	5.68818_n	5.68488_n	5.68156_n	335
53	5.67821_n	5.67485_n	5.67147_n	5.66806_n	5.66464_n	5.66119_n	347
54	5.65772_n	5.65424_n	5.65073_n	5.65720_n	5.64364_n	5.64007_n	360
55	5.63647_n						

vgl. S. 417—419.

 10 stellige Werte der Funktion $log\ V = log \sqrt{1 + e'^2 cos^2 \varphi}$.

φ	log V	Differenzen		φ	log V	Differenzen	
28° 0′	0.001 1345·090	35·072	—	35° 0′	0.000 9768·434	39·746	—
10	1310·018	35·208	0·136	10	9728·688	39·830	0·084
20	1274·810	35·344	0·136	20	9688·858	39·911	0·081
30	1239·466	35·478	0·134	30	9648·947	39·992	0·081
40	1203·988	35·612	0·134	40	9608·955	40·072	0·080
50	1168·376	35·743	0·131	50	9568·883	40·150	0·078
			0·132				0·076
29° 0′	0.001 1132·638	35·875		36° 0′	0.000 9528·733	40·226	
10	1096.758	36·003	0·128	10	9488·507	40·302	0·076
20	1060·755	36·133	0·130	20	9448·205	40·376	0·074
30	1024·622	36·259	0·126	30	9407·829	40·448	0·072
40	0988·363	36·385	0·126	40	9367·381	40·520	0·072
50	0951·978	36·510	0·125	50	9326·861	40·590	0·070
			0·123				0·068
30° 0′	0.001 0915·468	36·638		37° 0′	0.000 9286·271	40·658	
10	0878·835	36·756	0·123	10	9245·613	40·725	0·067
20	0842·079	36·877	0·121	20	9204·888	40·791	0·066
30	0805·202	36·996	0·119	30	9164·097	40·855	0·064
40	0768·206	37·115	0·119	40	9123·242	40·919	0·064
50	0731·091	37·232	0·117	50	9082·323	40·980	0·061
			0·116				0·061
31° 0′	0.001 0693·859	37·348		38° 0′	0.000 9041·343	41·041	
10	0656·511	37·463	0·115	10	9000·302	41·099	0·058
20	0619·048	37·576	0·113	20	8959·203	41·157	0·058
30	0581·472	37·688	0·112	30	8918·046	41·212	0·055
40	0543·784	37·800	0·112	40	8876·834	41·268	0·056
50	0505·984	37·909	0·109	50	8835·566	41·321	0·053
			0·108				0·052
32° 0′	0.001 0468·075	38·017		39° 0′	0.000 8794·245	41·373	
10	0430·058	38·125	0·108	10	8752·872	41·428	0·050
20	0391·933	38·230	0·105	20	8711·449	41·472	0·049
30	0353·703	38·335	0·105	30	8669·977	41·521	0·049
40	0315·368	38·438	0·103	40	8628·456	41·566	0·045
50	0276·930	38·540	0·102	50	8586·890	41·611	0·045
			0·101				0·044
33° 0′	0.001 0238·390	38·641		40° 0′	0.000 8545·279	41·655	
10	0199·749	38·740	0·099	10	8503·624	41·697	0·042
20	0161·009	38·838	0·098	20	8461·927	41·738	0·041
30	0122·171	38·935	0·097	30	8420·189	41·777	0·039
40	0083·236	39·030	0·095	40	8378·412	41·815	0·038
50	0044·206	39·124	0·094	50	8336·597	41·851	0·036
			0·094				0·035
34° 0′	0.001 0005·082	39·218		41° 0′	0.000 8294·746	41·886	
10	0.000 9965·864	39·308	0·090	10	8252·860	41·920	0·034
20	9926·556	39·399	0·091	20	8210·940	41·953	0·033
30	9887·157	39·487	0·088	30	8168·987	41·982	0·029
40	9847·670	39·575	0·088	40	8127·005	42·013	0·031
50	9808·095	39·661	0.086	50	8084·992	42·040	0·027
35° 0′	0.000 9768·434			42° 0′	0.000 8042·952		

vgl. S. 417.

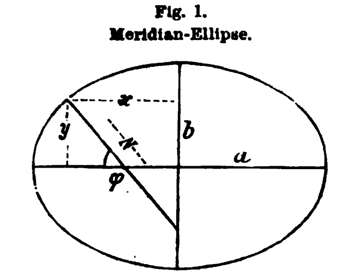
φ	log V	Differenzen		φ	log V	Differenzen	
		—	—			—	+
42° 0′	0.000 8042·952	42·067		49° 0′	0.000 6270·926	41·891	
10	8000·885	42·092	0·025	10	6229·035	41·856	0 035
20	7958·793	42·115	0·023	20	6187·179	41·820	0·036
30	7916·678	42·138	0·023	30	6145·359	41·782	0·038
40	7874·540	42·159	0·021	40	6103·577	41·743	0·039
50	7832·381	42·178	0·019	50	6061·834	41·703	0·040
43° 0′	0.000 7790·203	42·196	0·018	50° 0′	0.000 6020·131	41·661	0·042
10	7748·007	42·213	0·017	10	5978·470	41·617	0·044
20	7705·794	42·227	0·014	20	5936·853	41·572	0·045
30	7663·567	42·242	0·015	30	5895·281	41·527	0·045
40	7621·325	42·254	0·012	40	5853·754	41·478	0·049
50	7579·071	42·264	0·010	50	5812·276	41·430	0·048
44° 0′	0.000 7536·807	42·274	0·010	51° 0′	0.000 5770·846	41·379	0·051
10	7494·533	42·282	0·008	10	7529·467	41·328	0·051
20	7452·251	42·289	0·007	20	5688·139	41·274	0·054
30	7409·962	42·293	0·004	30	5646·865	41·219	0·055
40	7367·669	42·298	0·005	40	5605·646	41·164	0·055
50	7325.371	42·299	0·001	50	5564·482	41·106	0·058
			—				
			+				
45° 0′	0.000 7283·072	42·301		52° 0′	0.000 5523·376	41·047	0·059
10	7240·771	42·299	0·002	10	5482·329	40·988	0·059
20	7198·472	42·298	0·001	20	5441·341	40·925	0·063
30	7156·174	42·294	0·004	30	5400·416	40·863	0·062
40	7113·880	42·290	0·004	40	5359·553	40·798	0·065
50	7071·590	42·283	0·007	50	5318·755	40·732	0·066
46° 0′	0.000 7029·307	42·275	0·008	53° 0′	0.000 5278·023	40·666	0·066
10	6987·032	42·266	0·009	10	5237·357	40·597	0·069
20	6944·766	42·256	0·010	20	5196·760	40·527	0·070
30	6902·510	42·243	0·013	30	5156·233	40·455	0·072
40	6860·267	42·230	0·013	40	5115·778	40·383	0·072
50	6818·037	42·215	0·015	50	5075·395	40·309	0·074
47° 0′	0.000 6775·822	42·198	0·017	54° 0′	0.000 5035·086	40·234	0·075
10	6733·624	42·181	0·017	10	4994·852	40·157	0·077
20	6691·443	42·162	0·019	20	4954·695	40·079	0·078
30	6649·281	42·141	0·021	30	4914·616	39·999	0·080
40	6607·140	42·119	0·022	40	4874·617	39·919	0·080
50	6565·021	42·095	0·024	50	4834·698	39·836	0·083
48° 0′	0.000 6522·926	42·071	0,024	55° 0′	0.000 4794·862	39·753	0·083
10	6480·855	42·044	0.027	10	4755·109	39·668	0·085
20	6438·811	42·016	0.028	20	4715·441	39·581	0·087
30	6396·795	41·988	0.028	30	4675·860	39·494	0·087
40	6354·807	41·956	0.032	40	4636·366	39·405	0·089
50	6312·851	41·925	0.031	50	4596·961	39·315	0·090
49° 0′	0.000 6270·926			56° 0′	0.000 4557·646		

vgl. S. 417.

Übersicht der Haupt-Bezeichnungen, welche in den mathematischen Teilen dieses Buches angewendet sind.

(Vgl. Fig. 1.)

Fig. 1.
Meridian-Ellipse.



Gleichung der Meridian-Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Grosse Halbaxe $= a.$

Kleine Halbaxe $= b.$

Polar-Krümmungshalbmesser $= c = \frac{a^2}{b}.$

Excentricitäten: $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \quad , \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad , \quad (1 - e^2)(1 + e'^2) = 1.$$

$$a = c\sqrt{1 - e^2} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2}} \quad , \quad b = c(1 - e^2) = \frac{c}{1 + e'^2}.$$

Geographische Breite (oder Polhöhe) $= \varphi.$ $\quad tang\,\varphi = t.$

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi \qquad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi.$$

$$\frac{W^2}{1 - e^2} = V^2 \quad , \quad V^2 = 1 + \eta^2 \quad , \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi.$$

Meridian-Krümmungshalbmesser: $M = \frac{c}{V^3}.$

Quer-Krümmungshalbmesser: $N = \frac{c}{V}.$

Mittlerer Krümmungshalbmesser: $r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2}.$

Haupt-Krümmungs-Verhältnis: $\frac{N}{M} = V^2.$

Reduzierte Breite $= \psi.$

$$tang\,\psi = tang\,\varphi\sqrt{1 - e^2}. \qquad tang\,\varphi = tang\,\psi\sqrt{1 + e'^2}.$$

In den meisten Fällen bekommt man die einfachsten Formeln, wenn man als Konstanten des Umdrehungs-Ellipsoids c und e'^2 nimmt, und $V^2 = 1 + \eta^2$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi.$

Berichtigungen und Nachträge.*)

S. 3. Zu der arabischen Gradmessung unter *Almanon* ist eine neuere Massbestimmung der arabischen Elle am Nilpegel von Kairo gemacht, s. „Zeitschr. f. Verm. 1889", S. 100—109, 159 und S. 439—445. Nach der Messung von *Reiss* ist die arabische Elle = 0,540 Meter anzunehmen.

S. 4. Zu der Triangulierung von *Snellius* und zu der Geschichte der Gradmessungen im allgemeinen, sind wertvolle Mitteilungen gemacht in der „Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, onder Redactie van *I. Boer* Hz. te Utrecht". Graadmetingen in Nederland door Dr. *J. D. van der Plaats*, und Graadmeting, Geschiedkundig overzicht door *G. B. H. de Balbian*. Utrecht 1889, Jaargang V., 1e bis 6e Aflevering.

S. 6. Peru, Mittelbreite, statt $-1^\circ\,33'\,32''$ lies $-1^\circ\,31'\,30''$ (vgl. S. 498).

S. 117 und S. 184. Über die Gradmessungs- und Landesvermessungs-Triangulierung des Königsreichs Sachsen ist inzwischen ein umfassendes amtliches Werk erschienen: „Das trigonometrische Netz I. Ordnung, bearbeitet von *A. Nagel*", 1890, Druck und Verlag von *Stankiewicz* in Berlin.

S. 151. Zu dem *Schreiber*schen Satz über günstigste Gewichts-Verteilung ist eine Abhandlung von *Runge* in der „Zeitschr. f. Verm. 1890", S. 21—24 zu bemerken.

S. 211. (23) bis (23_b), die scharfe Berechnung von $log\,(1-e^2)$, giebt nicht 6·4035, sondern 6·4040.

S. 381. Im zweiten Nenner von (38) statt 25 lies 24.

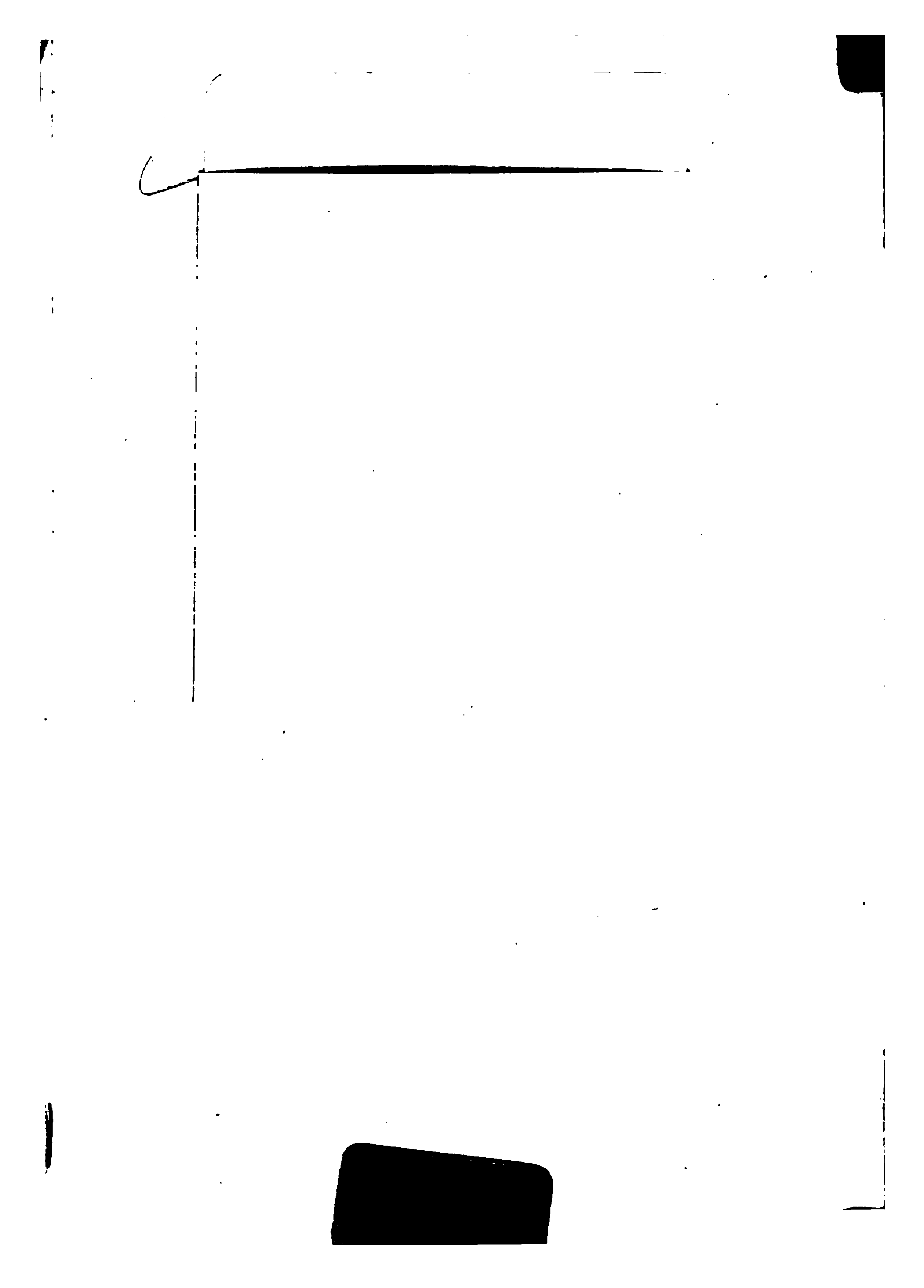
S. 385. Im Kleingedruckten statt Kapitel XI. lies Kapitel X.

S. 417. In (23) statt $\lambda^2 \sin^2 \varphi$ lies $l^2 \sin^2 \varphi$.

S. 523. In den Fehler-Gleichungen (5) sind Absolut-Glieder zuzusetzen.

---

*) Der erste Teil S. 1—192 dieses Bandes wurde schon im Winter 1888—1889 gedruckt, was wegen der Vergleichung mit der inzwischen fortgeschrittenen geodätischen Literatur zu bemerken nötig ist.





89078559556
B89078559556A

